

Раздел II. Векторная алгебра

Тема 1-6.

Линейные операции.

Проекция вектора на ось.

Скалярное произведение векторов. Базис векторов.

Векторное произведение

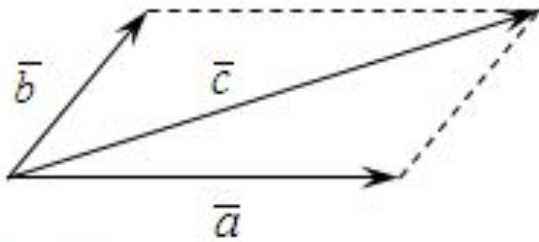
векторов. Смешанное произведение векторов

Основные определения векторной алгебры

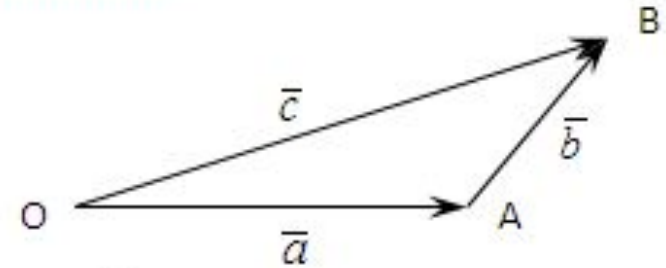
- **Вектором** называется направленный отрезок.
- **Длиной** $|\vec{a}|$ **вектора** \vec{a} называется длина задающего его направленного отрезка.
- **Нулевым вектором** называется вектор нулевой длины.
- **Единичным вектором** называется вектор длины 1.
- Векторы называются **равными**, если равны их длины и они одинаково направлены.
- Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых.
- Векторы называются **компланарными**, если они параллельны одной плоскости (лежат в одной

Линейные операции

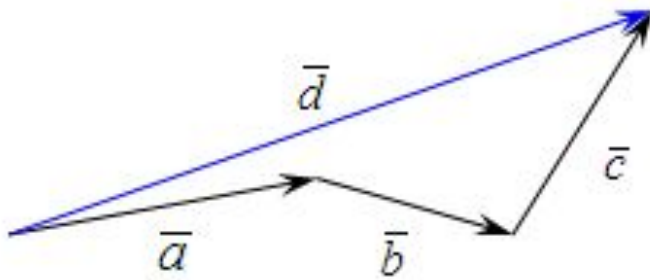
1) Сложение: (первые три правила для векторов компланарных, т.е. лежащих в одной плоскости)



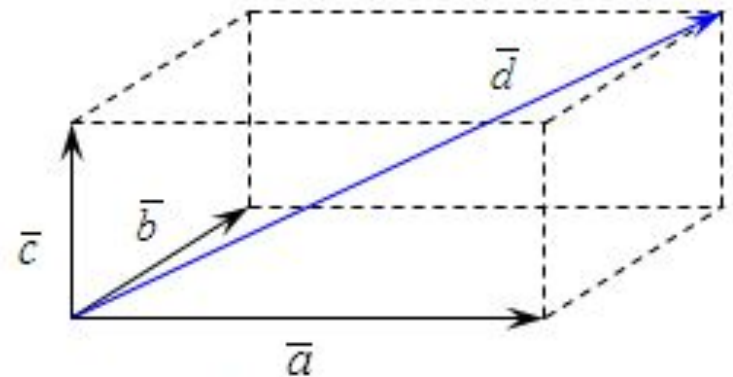
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \text{ (правило параллелограмма)}$$



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \text{ (правило треугольника)}$$



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ (правило многоугольника)}$$

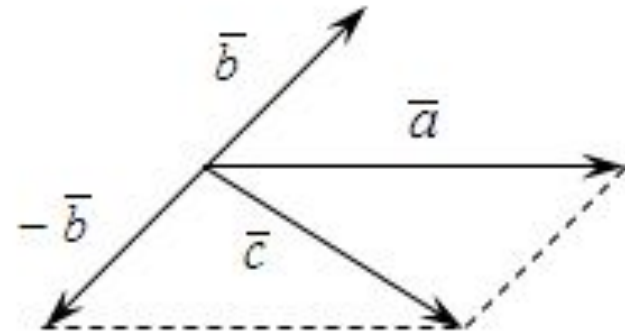
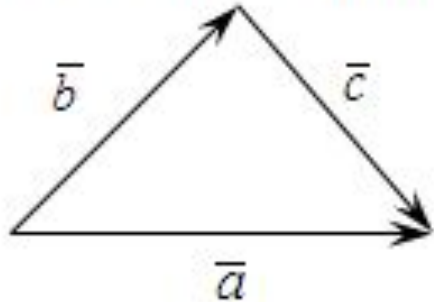


$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ (правило параллелепипеда)}$$

Линейные операции

2) Вычитание:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}, \text{ если } \vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$$



3) Умножение на число:

$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$; $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$. Если $\lambda < 0$, то векторы коллинеарные ($\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$). Если $\lambda > 0$, то векторы противоположно направленные ($\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$).

Свойства линейных операций

$$1) \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

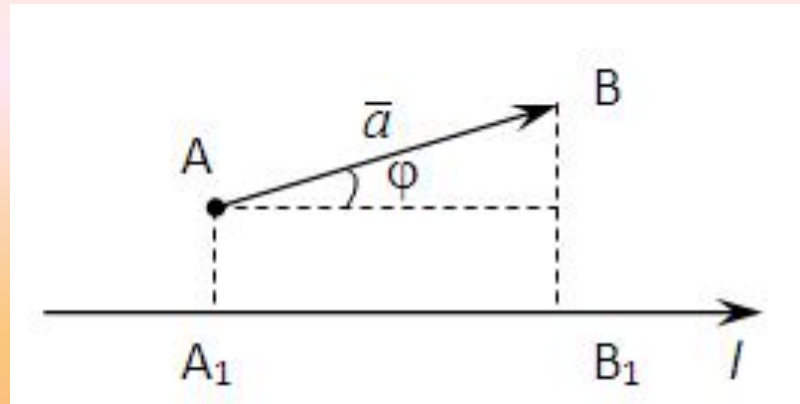
$$2) \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

$$3) \lambda_1(\lambda_2 \cdot \bar{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar{a}$$

$$4) \lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$$

$$5) \bar{a}(\lambda_1 + \lambda_2) = \bar{a}\lambda_1 + \bar{a}\lambda_2$$

Проекция вектора на ось

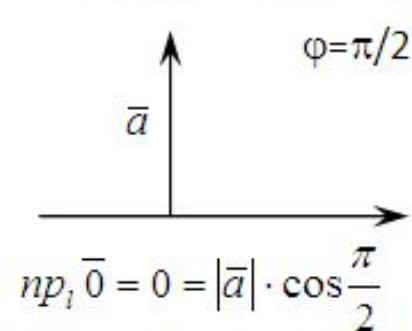
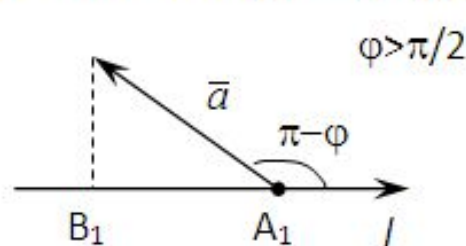
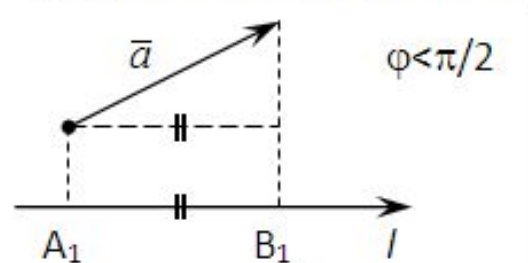


Проекцией вектора \overline{AB} на ось l называется A_1B_1 , если \overline{AB} и l сонаправленные, и $-A_1B_1$, если \overline{AB} и l противоположно направленные.

φ – угол между осью и вектором \overline{AB} (\vec{l}, \overline{AB}).

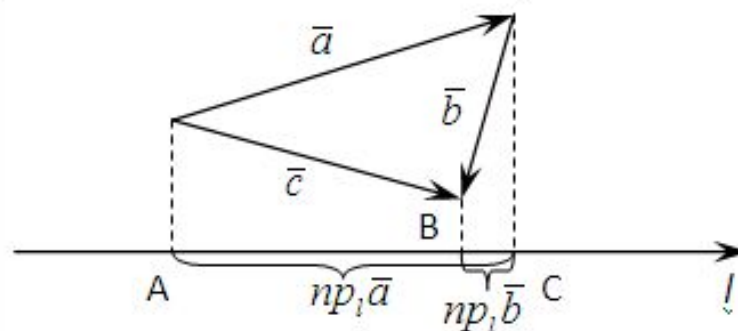
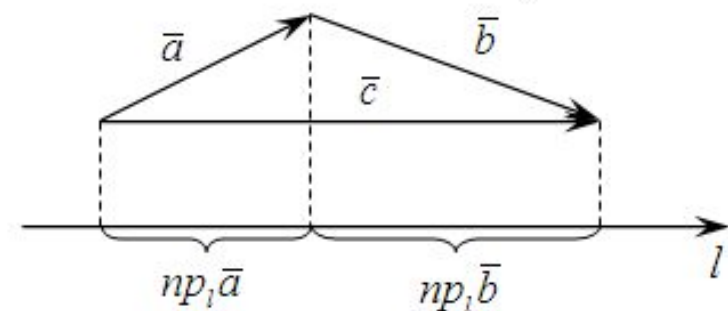
Свойства проекций:

1) Проекция вектора \vec{a} на ось l равна длине вектора \vec{a} ($|\vec{a}|$), умноженной на $\cos\varphi$ ($np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$).



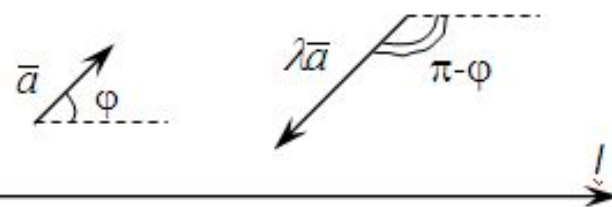
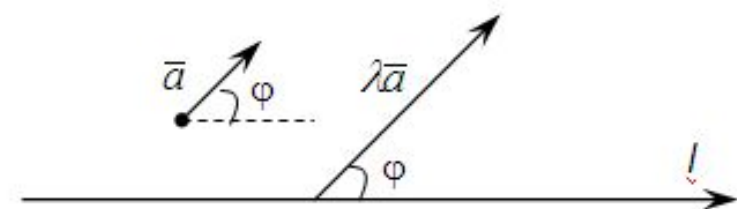
$$np_l \vec{a} = -A_1B_1 = -|\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}| \cdot \varphi$$

$$np_l \vec{0} = 0 = |\vec{a}| \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$



$$2) np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l \vec{a} + np_l \vec{b}; \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$np_l \vec{a} = AC; \quad np_l \vec{b} = -BC. \quad np_l(\vec{a} + \vec{b}) = AB = AC - BC$$



3) Проекция произведения числа на вектор

$$np_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot np_l \vec{a}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow np_l(\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) =$$

$$= |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot (-\cos\varphi) = -\lambda |\vec{a}| \cdot (-\cos\varphi) = \lambda |\vec{a}| \cdot \cos\varphi =$$

$$= \lambda \cdot np_l \vec{a}$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow np_l(\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda |\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot np_l \vec{a}$$

Скалярное произведение векторов

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или (\vec{a}, \vec{b})

Скалярным произведением векторов называется число $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$.

$np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}$ (аналогично можно получить $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b}$).

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2) $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\lambda \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}$

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Доказательство:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (np_{\vec{a}} \vec{b} + np_{\vec{a}} \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

4) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Доказательство:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^0 = |\vec{a}|^2$$

5) $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Если скалярное произведение векторов равно нулю, то вектора называют ортогональными.

Скалярное произведение в координатах

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \cdot (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\ &= a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + 0 + a_z b_z;\end{aligned}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	1	0	0
\bar{j}	0	1	0
\bar{k}	0	0	1

Применение скалярного произведения

$$1) \bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0; \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

$$2) \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}} \bar{b}; \quad np_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|}, \quad np_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

$$3) \cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

4) Работа постоянной силы:

$$\bar{F} = \{F_x; F_y; F_z\}; \quad \bar{s} = \{s_x; s_y; s_z\}$$

$$A = F \cdot s \cdot \cos \varphi = \bar{F} \cdot \bar{s}$$

Базис векторов

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не все равные нулю, такие, что выполняется равенство $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0$.

Если равенство выполняется только для $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то вектора называются *линейно независимыми*.

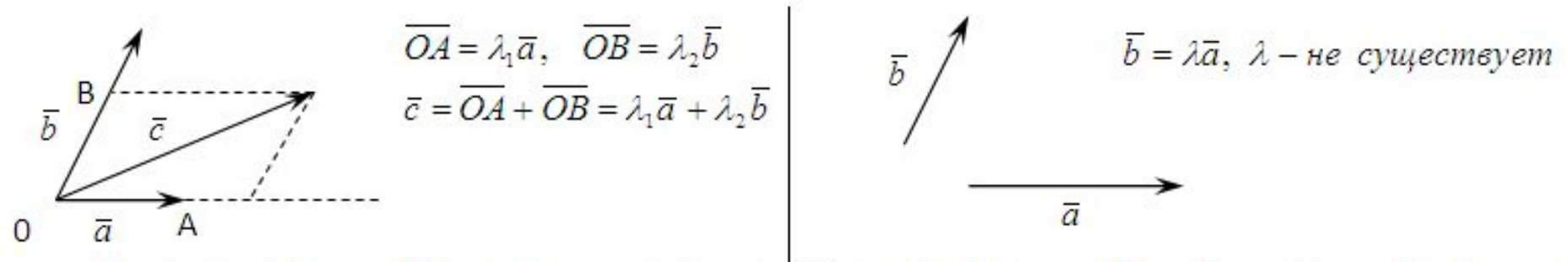
Если вектора линейно зависимые, то один из них можно выразить через другие.

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0, \text{ существует } \lambda_i \neq 0.$$

Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\lambda_1 \bar{a}_1 = -\lambda_2 \bar{a}_2 - \dots - \lambda_n \bar{a}_n$, тогда $\bar{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \bar{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \bar{a}_n$.

Для двух векторов получим условие коллинеарности $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$.

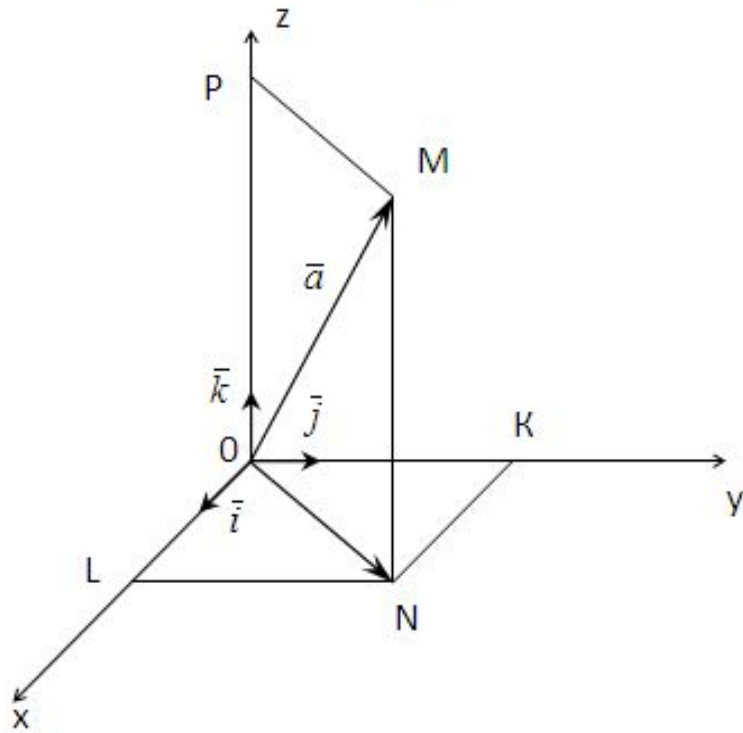
На плоскости любые три вектора линейно зависимые, любые два коллинеарных вектора линейно независимые.



В пространстве любые четыре вектора линейно зависимые, любые три компланарных вектора линейно независимые.

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ образуют **базис**, если они линейно независимые и любой вектор \bar{b} единственным образом можно представить в виде $\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$ (это есть разложение \bar{b} по базису $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$), тогда $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – координата вектора \bar{b} в базисе $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$.

Чаще всего пользуются прямоугольным базисом



$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные вектора (орты).

Орты направлены по осям и имеют единичную длину:

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1.$$

$$\bar{a} = \overline{OM} = \overline{OL} + \overline{OK} + \overline{OP} = (\overline{ON} + \overline{MN}) =$$

$$= a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}.$$

a_x, a_y, a_z – прямоугольные координаты вектора \bar{a} .

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \text{ – разложение по ортам.}$$

$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\} \text{ – координатная форма записи.}$$

$$OM^2 = ON^2 + NM^2 = OL^2 + OK^2 + NM^2 =$$

$$= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \text{ значит } OM = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Линейные операции над векторами:

$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$$

$$\bar{a} \pm \bar{b} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \pm (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \bar{i}(a_x \pm b_x) + \bar{j}(a_y \pm b_y) + \bar{k}(a_z \pm b_z) = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$$

$$\lambda \bar{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$$

Направляющие косинусы:

$$\alpha = (\bar{a}, \hat{i}); \quad \beta = (\bar{a}, \hat{j}); \quad \gamma = (\bar{a}, \hat{k});$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|};$$

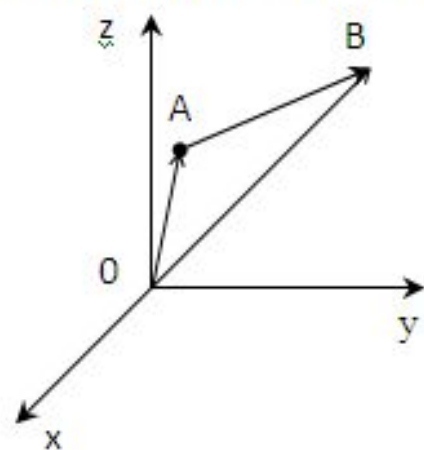
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Признак коллинеарности векторов:

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \lambda \vec{a} \\ \{b_x; b_y; b_z\} &= \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\} \\ \frac{b_x}{a_x} &= \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}, \end{aligned} \quad \begin{cases} b_x = \lambda a_x \\ b_y = \lambda a_y \\ b_z = \lambda a_z \end{cases}$$

Если вектора коллинеарны, то их одноименные координаты пропорциональны.

Координаты \vec{AB} по координатам начала и конца.



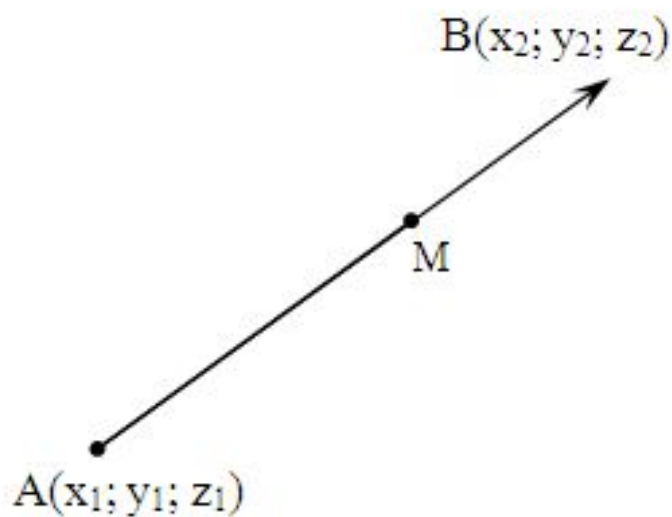
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \{x_2; y_2; z_2\} - \{x_1; y_1; z_1\};$$

$$\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Итак, чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вычесть координаты начала.

Деление отрезка в заданном отношении:



Найти $M(x; y; z)$.

$$AM = \lambda \cdot MB; \quad \overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB};$$

$$\{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} = \lambda \{x - x_2; y - y_2; z - z_2\}$$

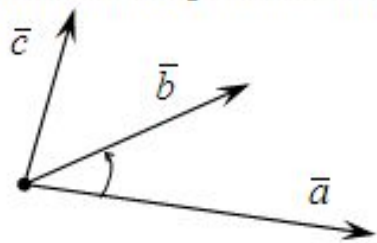
$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y \\ z - z_1 = \lambda z_2 - \lambda z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

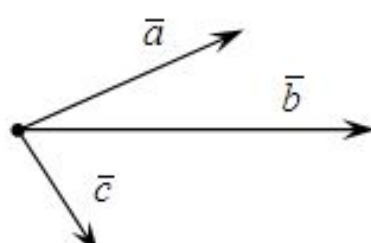
Векторное произведение векторов

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

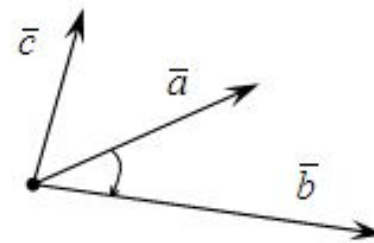
Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора \vec{c} кратчайший поворот от вектора \vec{a} к вектору \vec{b} виден совершающимся против часовой стрелки, иначе тройка левая.



Правая тройка



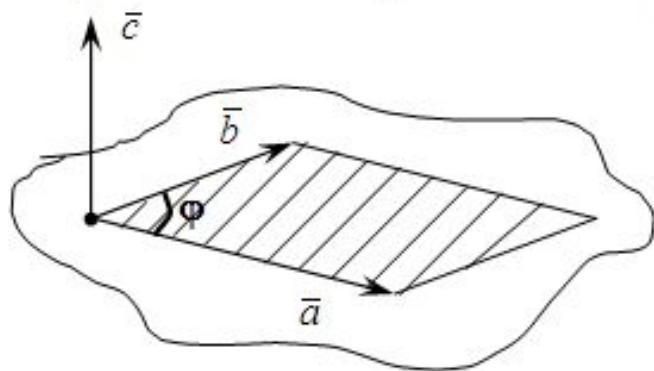
Правая тройка



Левая тройка

Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , обладающий свойствами:

- 1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) величина вектора \vec{c} численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .



$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

Свойства $\bar{a} \times \bar{b}$:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (тройка станет не левой, а правой)

2) $\lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \cdot \bar{b})$

3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

4) $\bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0; \bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$

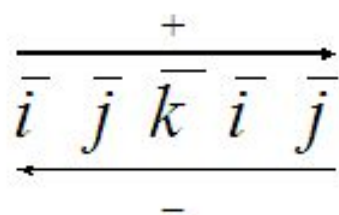
Применение $\bar{a} \times \bar{b}$:

1) $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0$

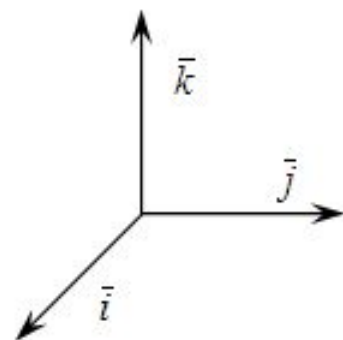
2) $S_{\text{параллелограмма}} = |\bar{a} \times \bar{b}|; S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|$

Векторное произведение в координатах:

	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	0	\bar{k}	$-\bar{j}$
\bar{j}	$-\bar{k}$	0	\bar{i}
\bar{k}	\bar{j}	$-\bar{i}$	0



$$|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1$$



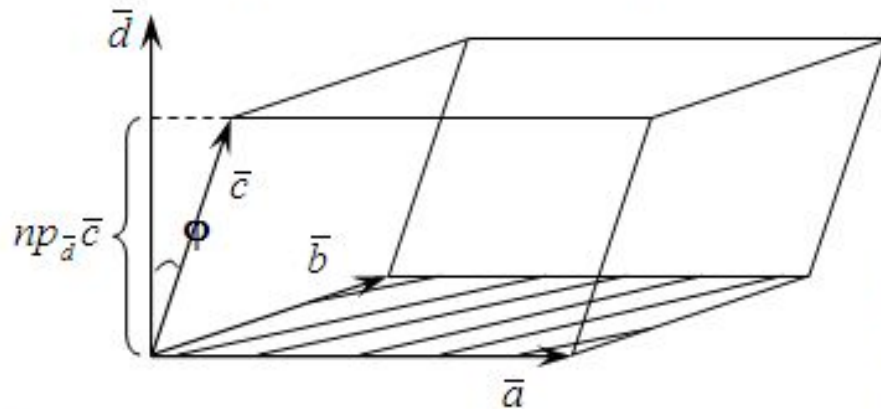
$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = 0 + a_x b_y \bar{k} - a_x b_z \bar{j} - a_y b_x \bar{k} + 0 + a_y b_z \bar{i} + a_z b_x \bar{j} - a_z b_y \bar{i} + 0 =$$

$$= \bar{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \bar{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \bar{k}(a_x b_y - a_y b_x) = \bar{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{a} \times \bar{b}$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов называется число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi = |\vec{d}| \cdot np_{\vec{d}} \vec{c} =$$

$$= S(\pm H) = \pm V$$

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятого со знаком «+», если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку, и со знаком «-», если левую.

Свойства $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$:

1) Смешанное произведение векторов не изменится при круговой перестановке сомножителей и меняет знак при перестановке двух соседних множителей.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}$$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = \dots$$

2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Применение смешанного произведения:

1) $\bar{a} \bar{b} \bar{c} = 0 \Leftrightarrow a, b, c$ – компланарные;

2) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некопланарны, а значит, образуют базис, если $\bar{a} \bar{b} \bar{c} \neq 0$;

3) $V_{\text{параллелепипеда}} = |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$; $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$;

4) Ориентация:

$\bar{a} \bar{b} \bar{c} > 0$, то $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$ – правая тройка,

$\bar{a} \bar{b} \bar{c} < 0$, то $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$ – левая тройка.

Смешанное произведение векторов в координатах:

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) = (\bar{i} \cdot (a_y b_z - a_z b_y) - \bar{j} \cdot (a_x b_z - a_z b_x) + \bar{k} \cdot (a_x b_y - a_y b_x)) \cdot$$

$$(c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot c_x - (a_x b_z - a_z b_x) \cdot c_y + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \bar{a} \bar{b} \bar{c}.$$

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Примеры вычисления длины вектора

Пример. Найти длину вектора $a = \{2; 4; 4\}$.

Решение: $|a| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$.

Определение равенства векторов

Пример. При каком значении параметра n вектора $a = \{1; 2; 4\}$ и $b = \{1; 2; 2n\}$ равны.

Решение:

Проверим равенство компонентов векторов

$$a_x = b_x = 1$$

$$a_y = b_y = 2$$

$$a_z = b_z \Rightarrow 4 = 2n \Rightarrow n = 4/2 = 2$$

Ответ: при $n = 2$ вектора a и b равны.

Пример умножения вектора на число

Пример. Найти произведение вектора $a = \{1; 2\}$ на 3.

Решение: $3 \cdot a = \{3 \cdot 1; 3 \cdot 2\} = \{3; 6\}$.

Примеры на сложение (вычитание) векторов

Пример 1. Найти сумму векторов $a = \{1; 2\}$ и $b = \{4; 8\}$.

Решение: $a + b = \{1 + 4; 2 + 8\} = \{5; 10\}$

Примеры вычисления проекции вектора

Пример. Найти проекцию вектора $a = \{1; 4; 0\}$ на вектор $b = \{4; 2; 4\}$.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов

$$a \cdot b = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 4 + 8 + 0 = 12$$

Найдем модуль вектора b

$$|b| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Найдем проекцию вектора a на вектор b

$$\text{Пр}_{b}a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{12}{6} = 2$$

Примеры вычисления скалярного произведения векторов

Пример. Найти скалярное произведение векторов $a = \{1; 2; -5\}$ и $b = \{4; 8; 1\}$.

Решение: $a \cdot b = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + (-5) \cdot 1 = 4 + 16 - 5 = 15$.

Пример. Найти скалярное произведение векторов a и b , если их длины $|a| = 3$, $|b| = 6$, а угол между векторами равен 60° .

Решение: $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \alpha = 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 9$.

Вычисление угла между векторами

Пример. Найти угол между векторами $a = \{3; 4; 0\}$ и $b = \{4; 4; 2\}$.

Решение: Найдем скалярное произведение векторов:

$$a \cdot b = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 12 + 16 + 0 = 28.$$

Найдем модули векторов:

$$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|b| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

Найдем угол между векторами

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{28}{5 \cdot 6} = \frac{14}{15}$$

Примеры задач с направляющими косинусами вектора

Пример. Найти направляющие косинусы вектора $a = \{3; 4\}$.

Решение:

Найдем модуль вектора a :

$$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Найдем направляющие косинусы вектора

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Определение линейной зависимости

Пример. Проверить будут ли вектора $a = \{1; 1; 1\}$, $b = \{1; 2; 0\}$, $c = \{0; -1; 1\}$ линейно независимыми.

Решение: Найдем значения коэффициентов при котором линейная комбинация этих векторов будет равна нулевому вектору.

$$x_1 a + x_2 b + x_3 c = 0$$

Это векторное уравнение можно записать в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему используя метод Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

из второй строки вычтем первую; из третьей строки вычтем первую:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & 2-1 & -1-0 & 0-0 \\ 1-1 & 0-1 & 1-0 & 0-0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

из первой строки вычтем вторую; к третьей строке добавим вторую:

$$\sim \begin{pmatrix} 1-0 & 1-1 & 0-(-1) & 0-0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0-0 & 0-1 & 1-(-1) & 0-0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Данное решение показывает, что система имеет множество решений, то есть существует не нулевая комбинация значений чисел x_1, x_2, x_3 таких, что линейная комбинация векторов a, b, c равна нулевому вектору, например: $-a + b + c = 0$, а это значит вектора a, b, c линейно зависимы.

Коллинеарность векторов

Пример. найти значение параметра n при котором вектора $a = \{3; 2\}$ и $b = \{9; n\}$ коллинеарны.

Решение: Так как вектора не содержат компоненты равные нулю, то воспользуемся вторым условием коллинеарности

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$$

Значит:

$$\frac{3}{9} = \frac{2}{n}$$

Решим это уравнение:

$$n = \frac{2 \cdot 9}{3} = 6$$

Ответ: вектора a и b коллинеарны при $n = 6$.

Пример. Какие из векторов $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{4; 8; 12\}$, $c = \{5; 10; 12\}$ коллинеарны?

Решение: Так как вектора не содержат компоненты равные нулю, то воспользуемся вторым условием коллинеарности, которое в случае пространственной задачи для векторов a и b примет вид:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Значит:

Вектора a и b коллинеарны т.к. $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$.

Вектора a и c не коллинеарны т.к. $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \neq \frac{3}{12}$.

Вектора c и b не коллинеарны т.к. $\frac{5}{4} = \frac{10}{8} \neq \frac{12}{12}$.

Ортогональность векторов

Пример. Проверить являются ли вектора $a = \{3; -1\}$ и $b = \{7; 5\}$ ортогональными.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$a \cdot b = 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 5 = 21 - 5 = 16$$

Ответ: так как скалярное произведение не равно нулю, то вектора a и b не ортогональны.

Пример. Найти значение числа n при котором вектора $a = \{2; 4\}$ и $b = \{n; 1\}$ будут ортогональны.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$a \cdot b = 2 \cdot n + 4 \cdot 1 = 2n + 4$$

$$2n + 4 = 0$$

$$2n = -4$$

$$n = -2$$

Ответ: вектора a и b будут ортогональны при $n = -2$.

Вычисление координат

Пример. Найти координаты вектора АВ, если А(1; 4; 5), В(3; 1; 1).

Решение: $AB = \{3 - 1; 1 - 4; 1 - 5\} = \{2; -3; -4\}$.

Пример. Найти координаты точки В вектора $AB = \{5; 1; 2\}$, если координаты точки А(3; -4; 3).

Решение:

$$AB_x = B_x - A_x \Rightarrow B_x = AB_x + A_x \Rightarrow B_x = 5 + 3 = 8$$

$$AB_y = B_y - A_y \Rightarrow B_y = AB_y + A_y \Rightarrow B_y = 1 + (-4) = -3$$

$$AB_z = B_z - A_z \Rightarrow B_z = AB_z + A_z \Rightarrow B_z = 2 + 3 = 5$$

Ответ: В(8; -3; 5).

Вычисление векторного произведения

Пример. Найти векторное произведение векторов $a = \{1; 2; 3\}$ и $b = \{2; 1; -2\}$.

Решение:

$$a \times b = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) - \mathbf{j}(1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) + \mathbf{k}(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) =$$

$$= \mathbf{i}(-4 - 3) - \mathbf{j}(-2 - 6) + \mathbf{k}(1 - 4) = -7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = \{-7; 8; -3\}$$

Смешанное произведение векторов

Пример. Найти смешанное произведение векторов $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{1; 1; 1\}$, $c = \{1; 2; 1\}$.

Решение:

$$a \cdot [b \times c] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2$$

Компланарность векторов

Пример. Проверить компланарны ли три вектора $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{1; 1; 1\}$, $c = \{1; 2; 1\}$.

Решение: найдем смешанное произведение векторов

$$a \cdot [b \times c] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2$$

Ответ: вектора не компланарны так, как их смешанное произведение не равно нулю.

Базис векторов

Пример. Даны векторы $\bar{a}_1(4; 1; 4)$, $\bar{a}_2(-2; -1; 1)$, $\bar{a}_3(3; 1; 5)$, $\bar{b}(-3; -2; 1)$. Показать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора \bar{b} в этом базисе.

Решение: Сначала разбираемся с условием. По условию даны четыре вектора, и, как видите, у них уже есть координаты в некотором базисе. Какой это базис – нас не интересует. А интересует следующая вещь: три вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ вполне могут образовывать новый базис. И первый этап: необходимо проверить, действительно ли векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно независимы:

Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 4 \cdot (-5 - 1) + 2 \cdot (5 - 4) + 3 \cdot (1 + 4) = -24 + 2 + 15 = -7 \neq 0$, значит, векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно независимы и образуют базис трехмерного пространства.

! Важно: координаты векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ обязательно записываем в столбцы определителя, а не в строки. Иначе будет путаница в дальнейшем алгоритме решения.

Теперь вспомним теоретическую часть: если векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ образуют базис, то любой вектор \bar{v} можно единственным способом разложить по данному базису: $\bar{v} = \alpha \cdot \bar{e}_1 + \beta \cdot \bar{e}_2 + \gamma \cdot \bar{e}_3$, где α, β, γ – координаты вектора в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Поскольку наши векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис трёхмерного пространства (это уже доказано), то вектор \bar{b} можно единственным образом разложить по данному базису:

$\bar{b} = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3$, где x_1, x_2, x_3 – координаты вектора \bar{b} в базисе $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$.

По условию и требуется найти координаты x_1, x_2, x_3 .

Для удобства объяснения поменяем части местами: $x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3 = \bar{b}$. В целях нахождения x_1, x_2, x_3 следует расписать данное равенство по координатам:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

По какому принципу расставлены коэффициенты? Все коэффициенты левой

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

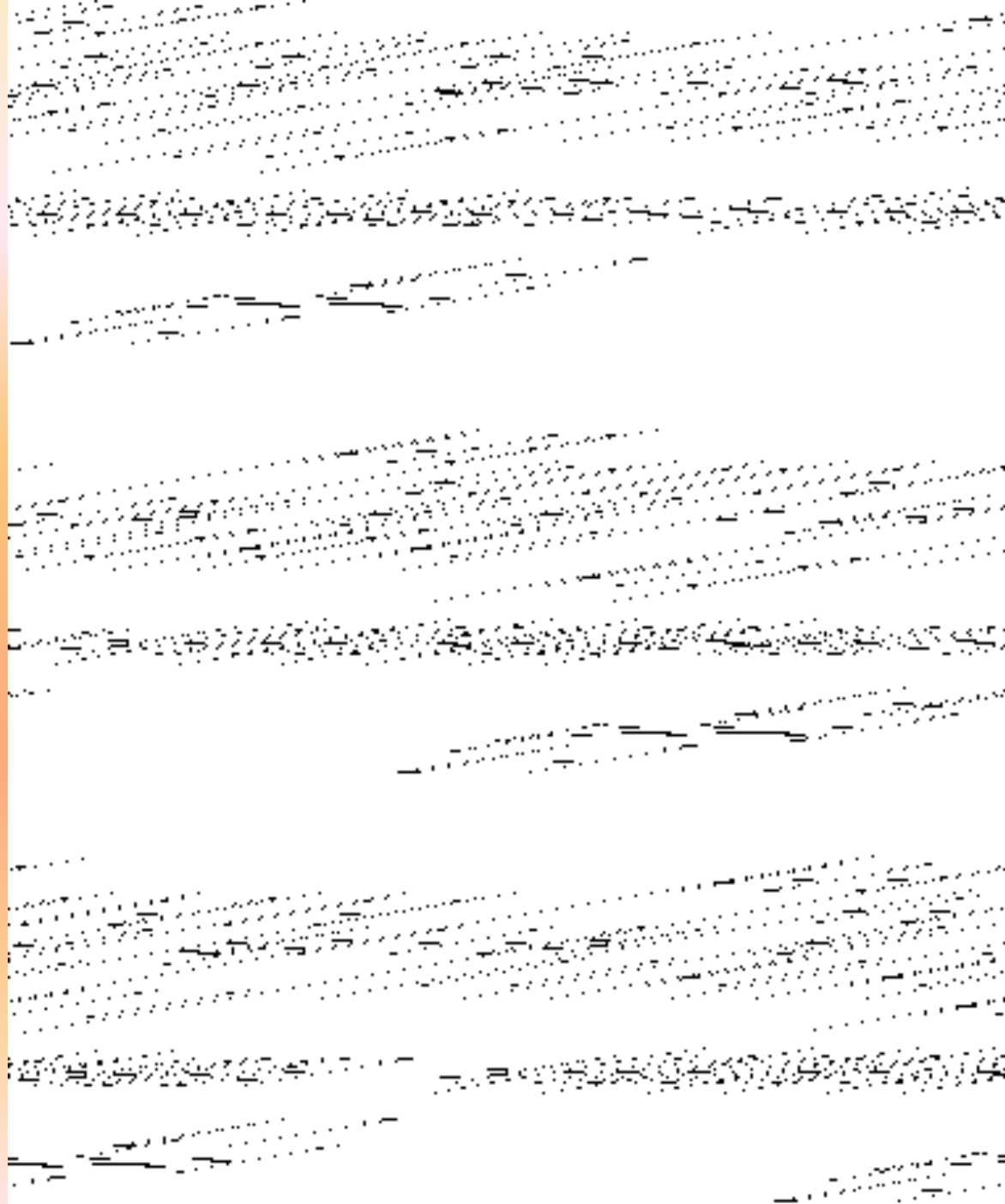
части в точности перенесены из определителя

записаны координаты вектора $\bar{b}(-3; -2; 1)$.

Получилась система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Обычно её решают по формулам Крамера, часто даже в условии задачи есть такое требование.

Главный определитель системы уже найден:

$\Delta = -7 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.



Таким образом:

$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 2 \cdot \vec{a}_2 - 1 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ – разложение вектора \vec{b} по базису $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

Ответ: $\vec{b} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3$

Задача носит алгебраический характер. Векторы, которые были рассмотрены – это не обязательно те векторы, которые можно нарисовать в пространстве, а, в первую очередь, абстрактные векторы курса линейной алгебры. Для случая двумерных векторов можно сформулировать и решить аналогичную задачу, решение будет намного проще.