

**Численное решение
дифференциальных уравнений
модифицированным методом
ломанных Эйлера с
использованием редактора
электронных таблиц MS Excel**

Свирина Анастасия Олеговна, методист ИМЦ

Большинство физических, химических, экономических и прочих процессов описываются дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений. Возникает необходимость получения результатов их решения. И не всегда есть возможность получить точный ответ аналитическим способом.

Поэтому требуются навыки в решении ДУ с использованием численных методов. Один из таких методов – метод ломаных Эйлера. Рассмотрим решение дифференциального уравнения усовершенствованным методом ломаных Эйлера, который имеет большую точность расчетов.



Дано:

Начальные условия:

Создание таблицы

Даем название столбцам таблицы в соответствии с алгоритмом для решения ДУ аналитически.

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following table structure:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i, y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i))$	Δy_i	
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									

Длина отрезка равна единице, а шаг разбиения – 0,05. Количество узловых точек – 21. Записываем в таблицу.

ФАЙЛ

ГЛАВНАЯ

ВСТАВКА

РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ

ФОРМУЛЫ

ДАННЫЕ

РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

ВИД

Вставить

Буфер обмена

Шрифт

Выравнивание

Число

Условное форматирование

Calibri11A+ A-≡≡≡

- Значение $x_n = 1$, а соответствующее ему значение $y_n = 2$.

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД										
Вставить Буфер обмена			Calibri 11 A⁺ A⁻ Ж К Ч Шрифт			Перенести текст Объединить и поместить в центре Выравнивание			Общий Число Условное форматирование Стили	
M26 fx										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i		
1										
2	0	1	2							
3	1									
4	2									
5	3									
6	4									
7	5									
8	6									
9	7									
10	8									
11	9									
12	10									
13	11									
14	12									
15	13									
16	14									
17	15									
18	16									
19	17									
20	18									
21	19									
22	20									
23										

Рассчитываем координаты x_i . Их значение находится по формуле: $x_i + h$.

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Условное форматирование									
M26 $\times$ $\checkmark$ f_x									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2						
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

Находим первый аргумент «внешней функции».

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Условное форматирование									
D2 fx =B2+(0,05/2)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	t	x_t	y_t	$x_t + \frac{h}{2}$	$f(x_t, y_t)$	$y_t + \frac{h}{2}f(x_t, y_t)$	$f(x_t + \frac{h}{2}, y_t + \frac{h}{2}f(x_t, y_t))$	Δy_t	
2	0	1	2	1,025					
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

- Следующим шагом находим значение функции в точке y_0

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Стиль									
E2 ✕ ✓ fx =(B2+5)-((4*C2)/B2)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2				
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

- После чего можно рассчитать второй аргумент «внешней функции». Он находится по формуле: $y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0)$

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Условное форматирование Стили									
F2 fx =C2+((0,05/2)*E2)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95			
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									
24									

Ищем значение функции в точке, рассчитанной с учетом погрешности.

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Условное форматирование Стили									
G2 ✕ ✓ fx =(D2+5)-((4*F2)/D2)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098		
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

Полученный результат умножаем на шаг разбиения.

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Стили									
H2 $\times$ $\checkmark$ f_x =G2*0,05									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

- Осуществляем поиск следующего значения y . Делается это по формуле: $y_{i(n)} = y_{i(n)-1} + \Delta y_{i(n)-1}$

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДААННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Стили									
C3 fx =C2+H2									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195						
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									
24									

Копируем полученные значения по образцу. (Выделяем значения полей D, E, F, G, H и «растягиваем» на одну строку вниз)

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Стили									
D2 ✕ ✓ f_x =B2+(0,05/2)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195						
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

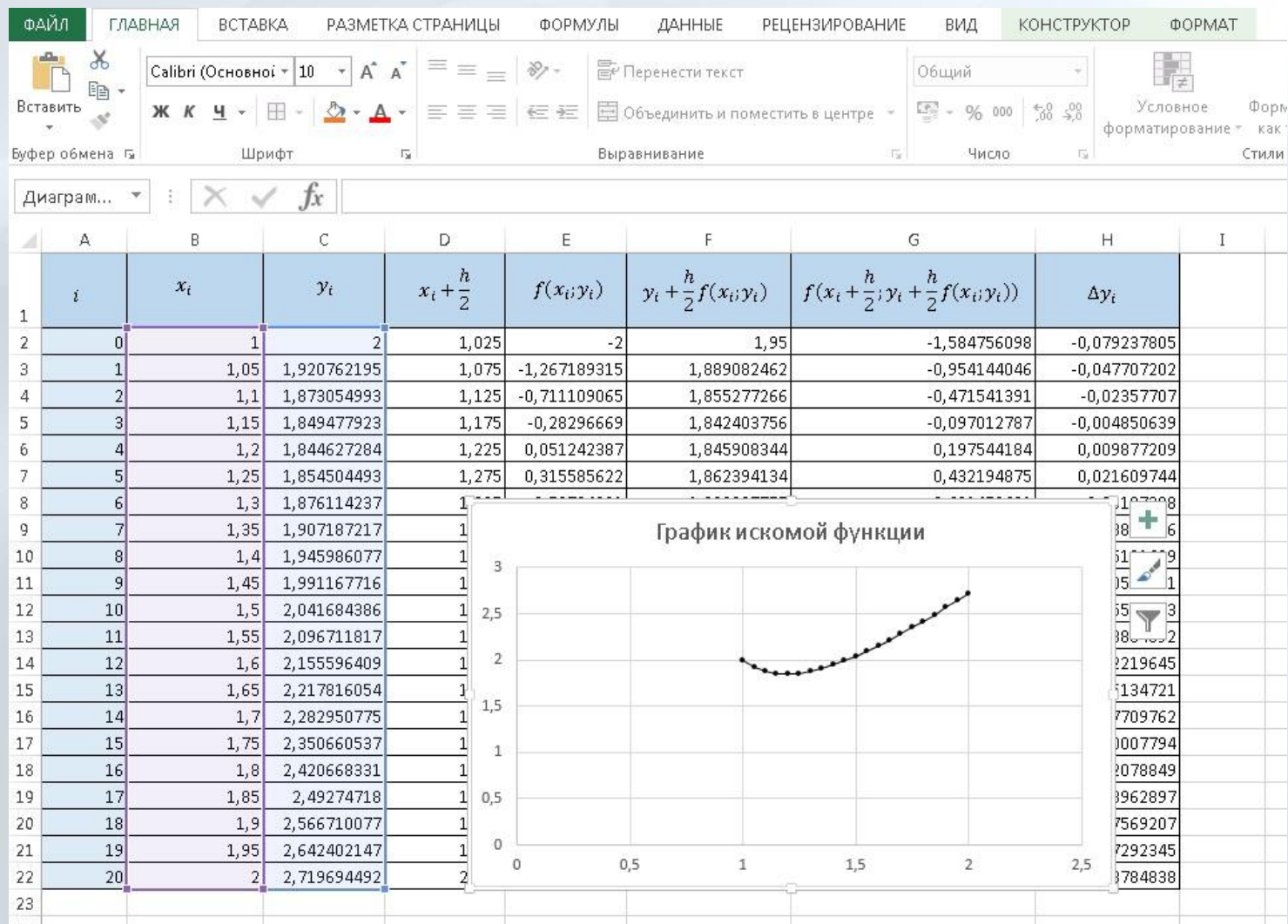
(Выделяем значения полей C, D, E, F, G, H и «растягиваем» до конца таблицы)

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Условное форматирование Стили									
C3 ✕ ✓ fx =C2+H2									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462	-0,954144046	-0,047707202	
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

Искомое приближенное решение:

Файл Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид									
Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Стили									
C22 fx =C21+H21									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462	-0,954144046	-0,047707202	
4	2	1,1	1,873054993	1,125	-0,711109065	1,855277266	-0,471541391	-0,02357707	
5	3	1,15	1,849477923	1,175	-0,28296669	1,842403756	-0,097012787	-0,004850639	
6	4	1,2	1,844627284	1,225	0,051242387	1,845908344	0,197544184	0,009877209	
7	5	1,25	1,854504493	1,275	0,315585622	1,862394134	0,432194875	0,021609744	
8	6	1,3	1,876114237	1,325	0,52734081	1,889297757	0,621459601	0,03107298	
9	7	1,35	1,907187217	1,375	0,699074913	1,92466409	0,775977193	0,03879886	
10	8	1,4	1,945986077	1,425	0,840039781	1,966987071	0,903632783	0,045181639	
11	9	1,45	1,991167716	1,475	0,957123543	2,015095804	1,010333412	0,050516671	
12	10	1,5	2,041684386	1,525	1,055508303	2,068072094	1,100548606	0,05502743	
13	11	1,55	2,096711817	1,575	1,139130796	2,125190087	1,177691844	0,058884592	
14	12	1,6	2,155596409	1,625	1,211008978	2,185871633	1,244392903	0,062219645	
15	13	1,65	2,217816054	1,675	1,273476233	2,24965296	1,302694424	0,065134721	
16	14	1,7	2,282950775	1,725	1,328351117	2,316159553	1,354195239	0,067709762	
17	15	1,75	2,350660537	1,775	1,377061629	2,385087078	1,400155881	0,070007794	
18	16	1,8	2,420668331	1,825	1,420737042	2,456186757	1,44157697	0,072078849	
19	17	1,85	2,49274718	1,875	1,460276368	2,529254089	1,479257944	0,073962897	
20	18	1,9	2,566710077	1,925	1,496399838	2,604120073	1,513841407	0,07569207	
21	19	1,95	2,642402147	1,975	1,529687903	2,680644345	1,545846897	0,077292345	
22	20	2	2,719694492	2,025	1,560611016	2,758709767	1,575696756	0,078784838	
23									
24									

- Строим график. Выделяем пары значений x и y , далее «Вставка» → «Диаграммы» → «Точечная с прямыми отрезками и маркерами».



При решении данного ДУ аналитически результат будет равен — **2,71875**.

Вывод: усовершенствованный метод ломаных Эйлера дает более точные результаты в отличие от «классического» метода. Связано это с тем, что производная берется не в начале шага, а как промежуточное или среднее на разных участках одного шага. В процессе использования метода вычисляются несколько производных в разных частях шага, которые впоследствии усредняются. За счет этого точность метода возрастает на порядок.

Список литературы

1. Эльсгольц Л.Э. «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление» (61 стр.), 1979г.
2. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», 1995г.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. «Дифференциальные уравнения» (31 стр.), 1985г.