

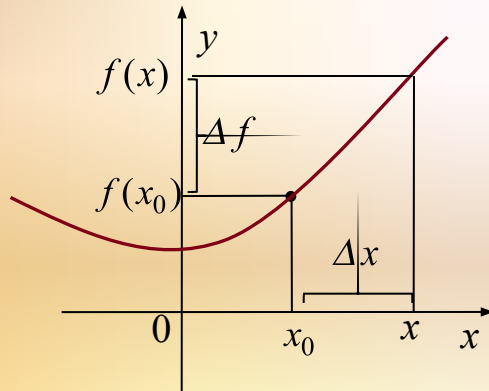
НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

1. Непрерывность функции в точке

Определение 1

Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0 , включая саму точку x_0 , называется **непрерывной в точке x_0** , если предел функции и значение функции в этой точке равны:

$$\underline{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$$



$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции

Заметим, что $x \rightarrow x_0 \Rightarrow x - x_0 \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

Определение 2

Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0 , включая саму точку x_0 , называется **непрерывной в точке x_0** , если предел приращения функции равен 0 при стремлении приращения аргумента к 0:

$$\underline{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0}$$

Итак, бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции в любой точке непрерывности функции:

$$\underline{\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta f \rightarrow 0}$$

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Определение

Функция $f(x)$, называется непрерывной в интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение

Функция $f(x)$, называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) ,

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (непрерывность справа), $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (непрерывность слева).

Все простейшие элементарные функции непрерывны в своей области определения

$$f(x) = C,$$

$$f(x) = \sin x,$$

$$f(x) = \arcsin x,$$

$$f(x) = x^n,$$

$$f(x) = \cos x,$$

$$f(x) = \arccos x,$$

$$f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1),$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x,$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x,$$

$$f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1),$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x,$$

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x$$

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

3. Свойства непрерывных в точке функций

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , тогда функции

$$f(x) \pm g(x),$$

$$f(x) \cdot g(x),$$

непрерывны в точке x_0 .

$$\frac{f(x)}{g(x)}, (g(x_0) \neq 0),$$

$$f(g(x))$$

Указанные свойства можно обобщить на случай непрерывности функций на некотором множестве

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

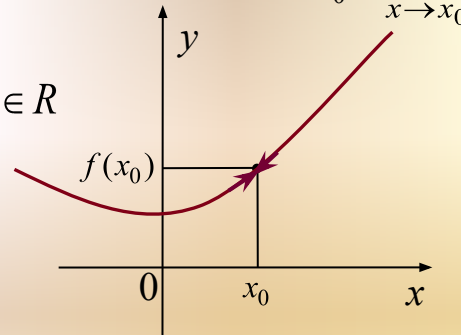
4. Классификация точек разрыва

Определение

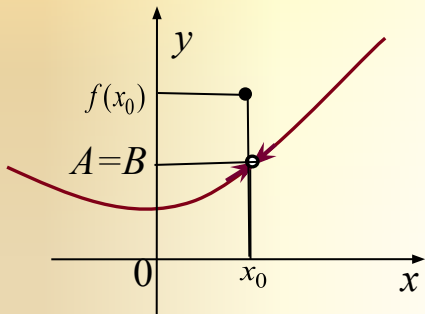
Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 , но не является непрерывной в этой точке, то точка x_0 называется **точкой разрыва**.

Детализируем определение функции, непрерывной в точке x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

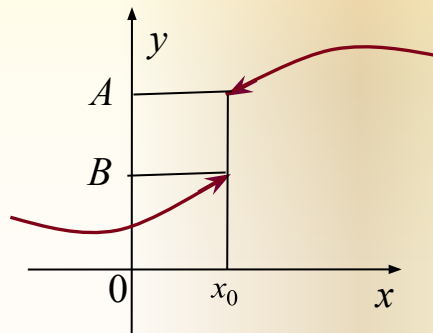
1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \in R, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B \in R$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$



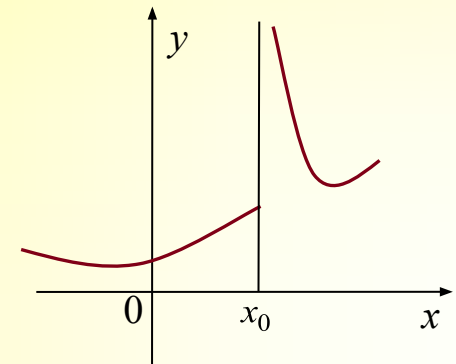
Если 1, 2 выполняются,
а 3 не выполняется,
то x_0 – **точка устранимого
разрыва I рода**



Если 1 выполняется,
2 не выполняется,
то x_0 – **точка неустраняемого
разрыва I рода**



Если 1 не выполняется,
то x_0 – **точка разрыва
II рода**



НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть x_0 - внутренняя точка области определения

Рассмотрим условия:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B \in \mathbb{R}$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$

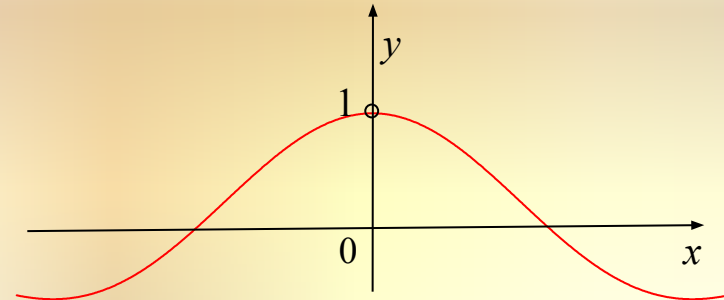
1,2,3 $\Rightarrow x_0$ - точка непрерывности	1,2, 3 $\Rightarrow x_0$ - точка устранимого разрыва I рода	1, 2 $\Rightarrow x_0$ - точка неустранимого разрыва I рода	1 $\Rightarrow x_0$ - точка разрыва II рода
--	--	--	---

Пример 1

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$x = 0$ - точка устранимого разрыва I рода

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть x_0 - внутренняя точка области определения

Рассмотрим условия:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \in R, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B \in R$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$

1,2,3 $\Rightarrow x_0$ - точка непрерывности	1,2, 3 $\Rightarrow x_0$ - точка устранимого разрыва I рода	1, 2 $\Rightarrow x_0$ - точка неустранимого разрыва I рода	1 $\Rightarrow x_0$ - точка разрыва II рода
--	--	--	---

Пример 2

$$f(x) = \frac{|x+2|}{x+2} = \begin{cases} -1, & \text{если } x < -2; \\ 1, & \text{если } x > -2 \end{cases}$$

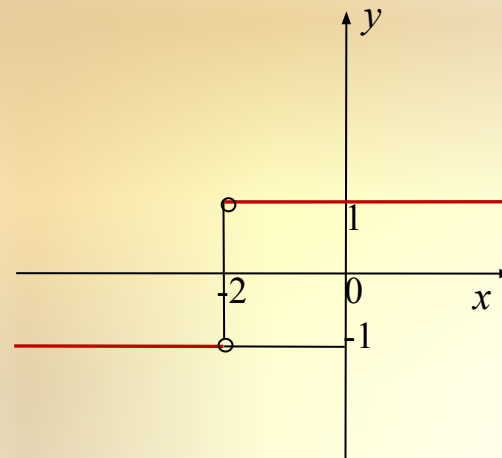
$$D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-1) = -1 \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (1) = 1 \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$x = -2$ - точка неустранимого разрыва I рода



НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть x_0 - внутренняя точка области определения

Рассмотрим условия:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \in R, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B \in R$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$

1,2,3 $\Rightarrow x_0$ - точка непрерывности	1,2, 3 $\Rightarrow x_0$ - точка устранимого разрыва I рода	1, 2 $\Rightarrow x_0$ - точка неустранимого разрыва I рода	1 $\Rightarrow x_0$ - точка разрыва II рода
--	--	--	---

Пример 3

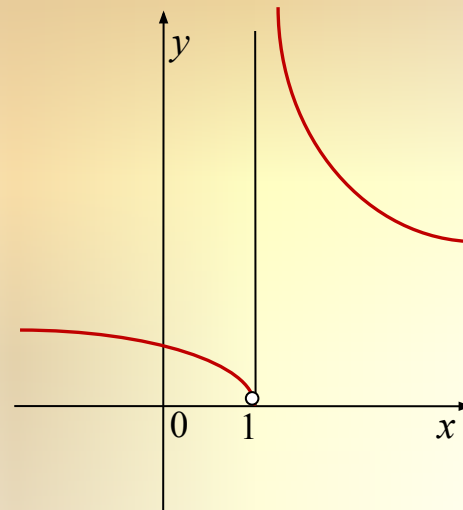
$$f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0 \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

$x = 1$ - точка разрыва II рода



НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть x_0 - внутренняя точка области определения

Рассмотрим условия:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \in R, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B \in R$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$

1,2,3 $\Rightarrow x_0$ - точка непрерывности	1,2, 3 $\Rightarrow x_0$ - точка устранимого разрыва I рода	1, 2 $\Rightarrow x_0$ - точка неустранимого разрыва I рода	1,2,3 $\Rightarrow x_0$ - точка разрыва II рода
--	--	--	---

Пример 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1; \\ 2 - x, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

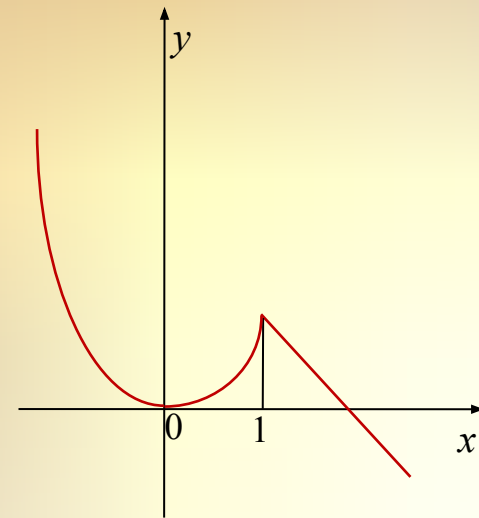
$$D(f) = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \in R \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1 \in R$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

В точке $x=1$ функция непрерывна

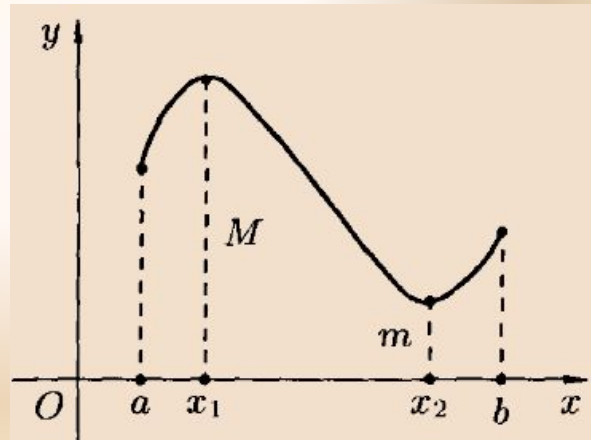


НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема Вейерштрасса

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения.



$$\exists x_1 \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b] (f(x) \leq f(x_1) = M)$$

$$\exists x_2 \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b] (f(x) \geq f(x_2) = m)$$

Следствие

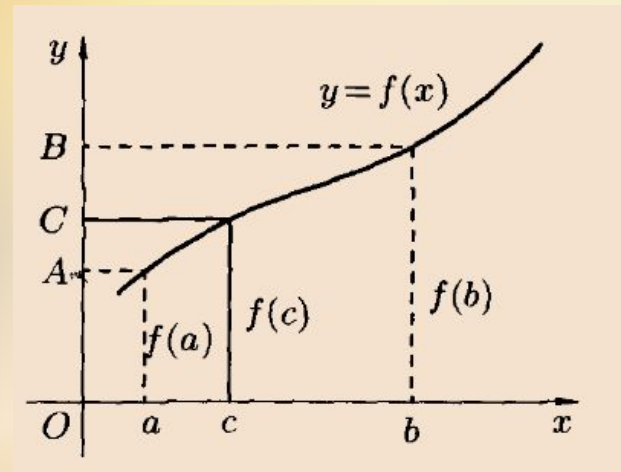
Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Теорема Больцано – Коши

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка не равные значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B .

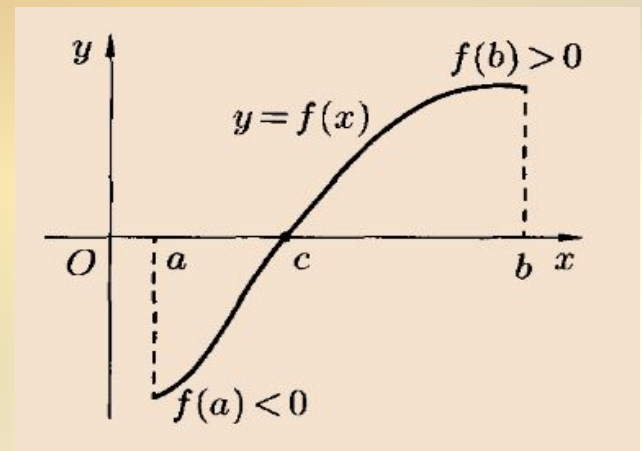
$$A = f(a) \neq f(b) = B \Rightarrow \forall C (C \text{ между } A \text{ и } B) \exists c \in [a, b] (f(c) = C)$$



Следствие

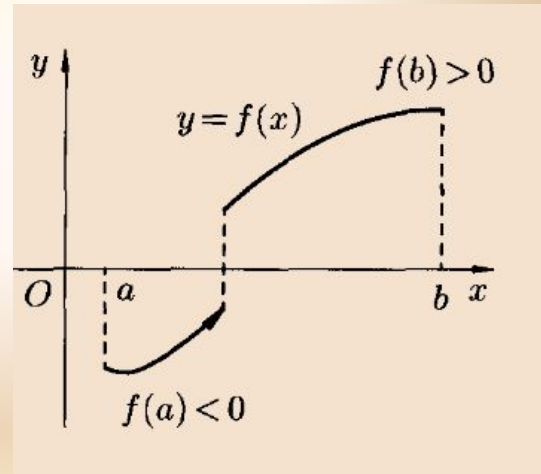
Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка, в которой функция обращается в 0.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] (f(c) = 0)$$



НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Утверждения указанных теорем могут не выполняться, если нарушены какие-либо из ее условий: например, функция непрерывна не на отрезке $[a, b]$, а на интервале (a, b) , или функция на отрезке $[a, b]$ имеет разрыв.



Спасибо за внимание!