

Моделирование сезонных колебаний

Если амплитуда сезонных колебаний не меняется с течением времени, то применяется **аддитивная модель временного ряда**:

$$y_t = T_t + S_t + e_t \quad t = \overline{1, n}$$

Моделирование сезонных колебаний

Если амплитуда сезонных колебаний увеличивается или уменьшается с течением времени, то применяется **мультипликативная модель временного ряда**:

$$y_t = T_t \cdot S_t \cdot e_t \quad t = \overline{1, n}$$

Моделирование сезонных колебаний

Имеются поквартальные условные данные об объемах потребления электроэнергии жителями региона.

Номер квартала	Потребление электроэнергии жителями региона, млн. кВт·ч	Номер квартала	Потребление электроэнергии жителями региона, млн. кВт·ч
1	6,0	9	8,0
2	4,4	10	5,6
3	5,0	11	6,4
4	9,0	12	11,0
5	7,2	13	9,0
6	4,8	14	6,6
7	6,0	15	7,0
8	10,0	16	10,8

Моделирование сезонных колебаний

1. График динамики



Период сезонных колебаний $m=4$, модель аддитивная

2) Выравнивание исходного ряда методом скользящего среднего.

Этот метод состоит в замене начальных значений ряда их средними значениями на интервале времени длины m , где m – период сезонной компоненты.

$$y_{c.c}(t) = \frac{0.5y(t-2) + y(t-1) + y(t) + y(t+1) + 0.5y(t+2)}{4} \quad \text{для } m=4$$

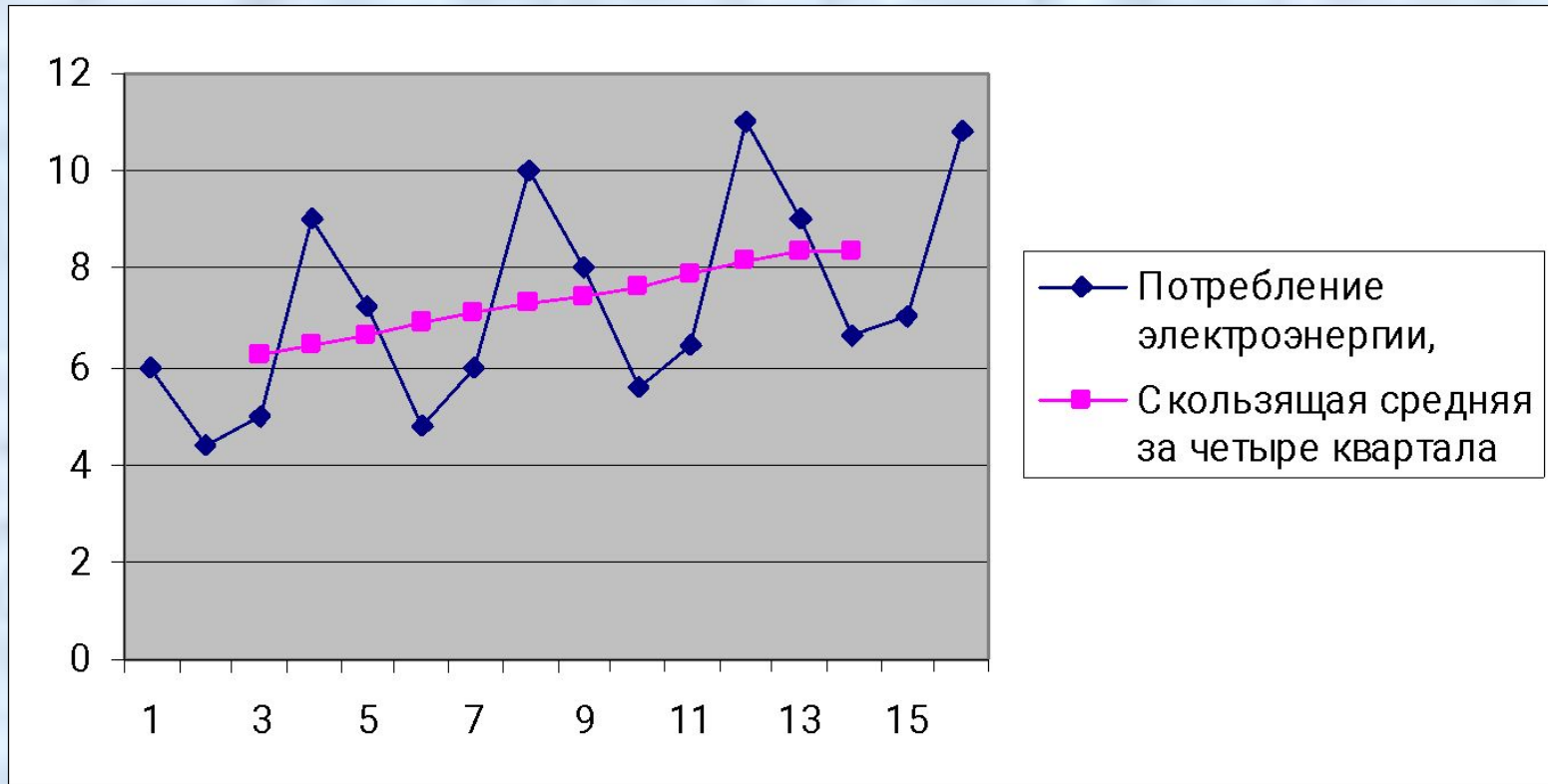
$$y_{c.c}(t) = \frac{0.5y(t-6) + y(t-5) + \dots + y(t) + y(t+1) + \dots + y(t+5) + 0.5y(t+6)}{12} \quad \text{для } m=12$$

$$y_{c.c}(t) = \frac{0.5y(t-2) + y(t-1) + y(t) + y(t+1) + 0.5y(t+2)}{4}$$

↓

<i>№</i>	<i>Потребление электроэнергии,</i>	<i>Скользящая средняя за четыре квартала</i>
1	6	
2	4,4	
3	5	6,25
4	9	6,45
5	7,2	6,625
6	4,8	6,875
7	6	7,1
8	10	7,3
9	8	7,45
10	5,6	7,625
11	6,4	7,875
12	11	8,125
13	9	8,325
14	6,6	8,375
15	7	
16	10,8	

$$y_{c.c}(t) = \frac{0.5y(t-2) + y(t-1) + y(t) + y(t+1) + 0.5y(t+2)}{4}$$



3) Предварительная оценка сезонной компоненты по формуле: $S_t = y(t) - y_{c.c}(t)$

№ квартала, t	Потребление электроэнергии, $y(t)$	Скользящая средняя за четыре квартала $y_{c.c}(t)$	оценки сезонной компоненты
1	6		
2	4,4		
3	5	6,25	-1,25
4	9	6,45	2,55
5	7,2	6,625	0,575
6	4,8	6,875	-2,075
7	6	7,1	-1,1
8	10	7,3	2,7
9	8	7,45	0,55
10	5,6	7,625	-2,025
11	6,4	7,875	-1,475
12	11	8,125	2,875
13	9	8,325	0,675
14	6,6	8,375	-1,775
15	7		
16	10,8		

3) Предварительная оценка сезонной компоненты по формуле:

$$S_t = y(t) - y_{c.c}(t)$$



Моделирование сезонных колебаний

4) Корректировка сезонной компоненты. Она должна удовлетворять условиям:

$$S_1 = S_5 = S_9 = S_{13}$$

$$S_2 = S_6 = S_{10} = S_{14}$$

$$S_3 = S_7 = S_{11} = S_{15}$$

$$S_4 = S_8 = S_{12} = S_{16}$$

$$\sum_{t=1}^m S_t = 0$$

Моделирование сезонных колебаний

Найдем средние значения сезонной компоненты по каждому из кварталов

Показатели	Год	№ квартала, I			
		I	II	III	IV
	1	–	–	–1,250	2,550
	2	0,575	–2,075	–1,100	2,700
	3	0,550	–2,025	–1,475	2,875
	4	0,675	–1,775	–	–
Средняя оценка сезонной компоненты	\bar{S}_i	0,600	–1,958	–1,275	2,708

Найдем сумму 4-х усредненных сезонных компонент

$$0,6 - 1,958 - 1,275 + 2,708 = 0,075 \neq 0$$

Определим корректирующий коэффициент:

$$k = 0,075 / 4 = 0,01875$$

Рассчитаем скорректированные значения сезонной компоненты

$$S_i = \bar{S}_i - k \quad k = 0,01875$$

Показатели	Год	№ квартала, I			
		I	II	III	IV
	1	–	–	–1,250	2,550
S_i	2	0,575	–2,075	–1,100	2,700
	3	0,550	–2,025	–1,475	2,875
	4	0,675	–1,775	–	–
Средняя оценка сезонной компоненты для I-го квартала,	\bar{S}_i	0,600	–1,958	–1,275	2,708
Скорректированная сезонная компонента,	S_i	0,581	–1,977	–1,294	2,690

$$0,581 - 1,977 - 1,294 + 2,690 = 0$$

Таким образом, получены следующие значения сезонной компоненты:

I квартал: $S_1 = 0,581$

II квартал:

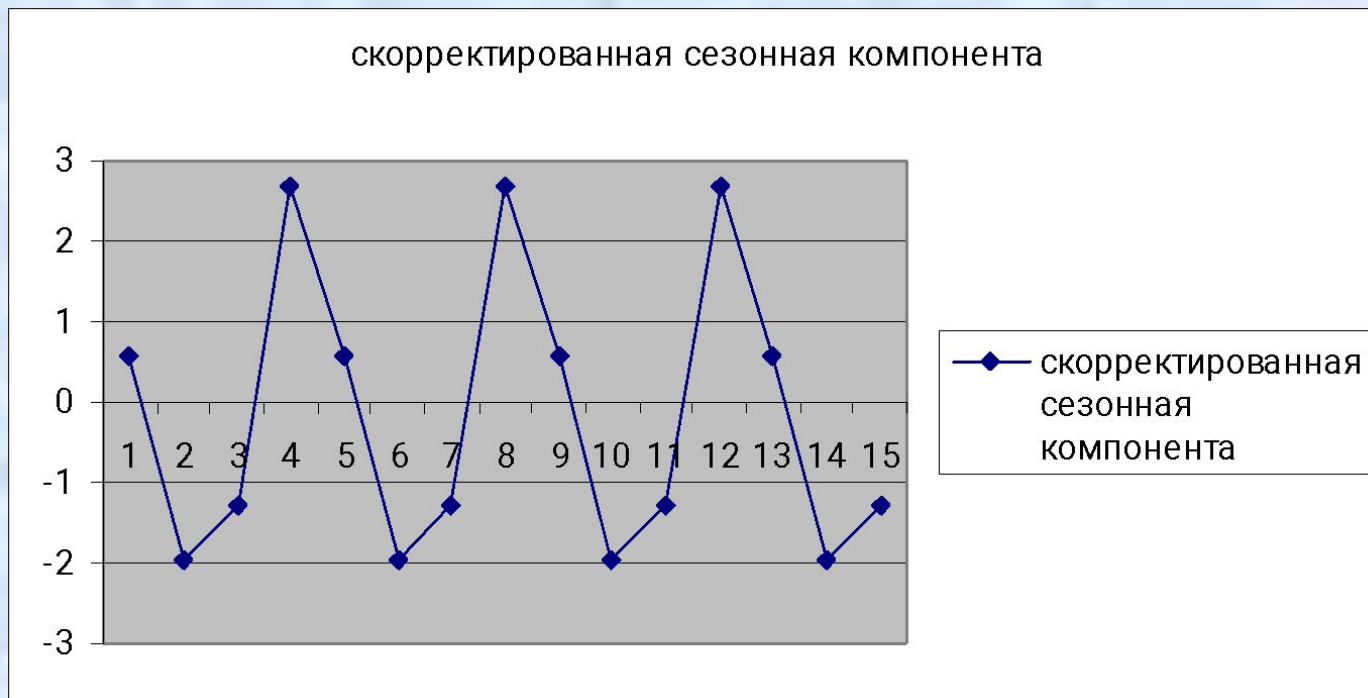
$S_2 = -1,979$

III квартал:

$S_3 = -1,294$

IV квартал:

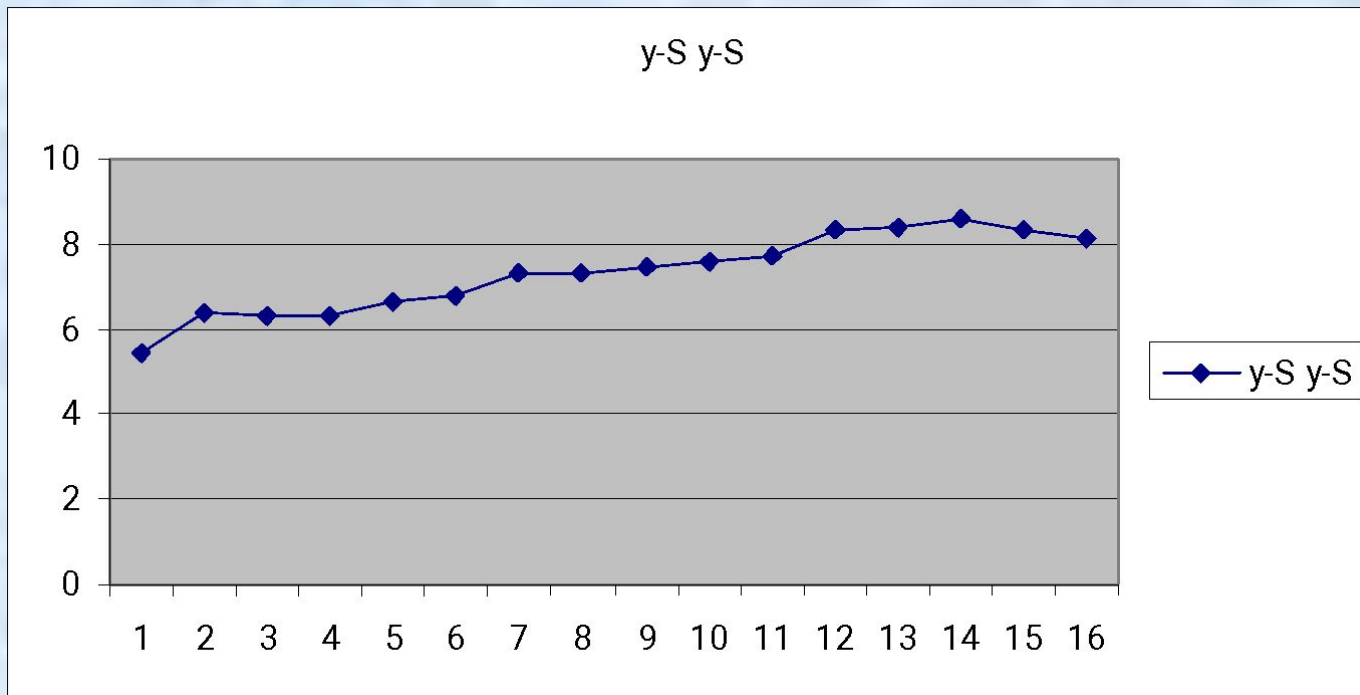
$S_4 = 2,690$



5) Исключение сезонной компоненты $y_t - S_t$

<i>№ квартала t</i>	<i>Потребление электроэнергии y(t)</i>	<i>Скорректированная сезонная компонента S(t)</i>	$y_t - S_t$
1	6	0,58125	5,41875
2	4,4	-1,9771	6,37708333
3	5	-1,2938	6,29375
4	9	2,68958	6,31041667
5	7,2	0,58125	6,61875
6	4,8	-1,9771	6,77708333
7	6	-1,2938	7,29375
8	10	2,68958	7,31041667
9	8	0,58125	7,41875
10	5,6	-1,9771	7,57708333
11	6,4	-1,2938	7,69375
12	11	2,68958	8,31041667
13	9	0,58125	8,41875
14	6,6	-1,9771	8,57708333
15	7	-1,2938	8,29375
16	10,8	2,68958	8,11041667

5) Исключение сезонной компоненты $y_t - S_t$



Моделирование сезонных колебаний

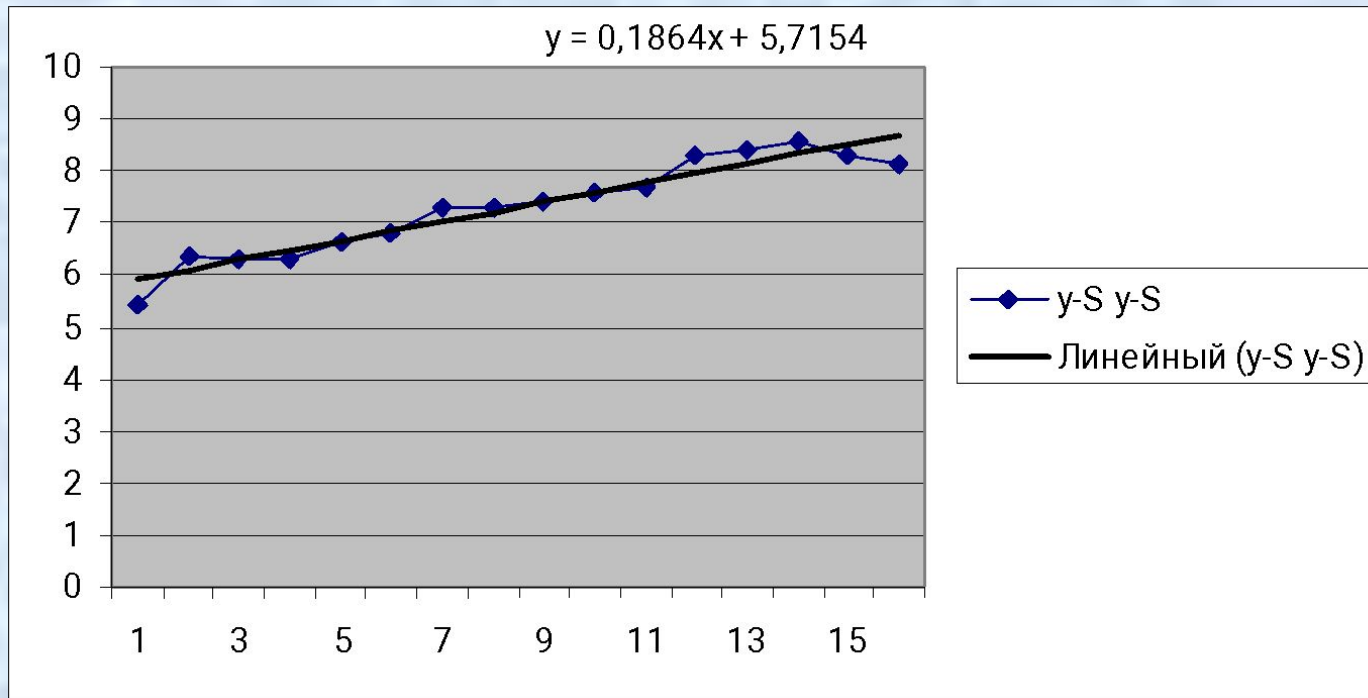
6) Построение линейного тренда по ряду без сезонной компоненты

	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>
Y-пересечение	5,715417	0,146865	38,91609	1,14E-15
t	0,186422	0,015188	12,27392	7E-09

$$T = 5,715 + 0,186 \cdot t$$

Моделирование сезонных колебаний

6) Построение линейного тренда по ряду без сезонной компоненты



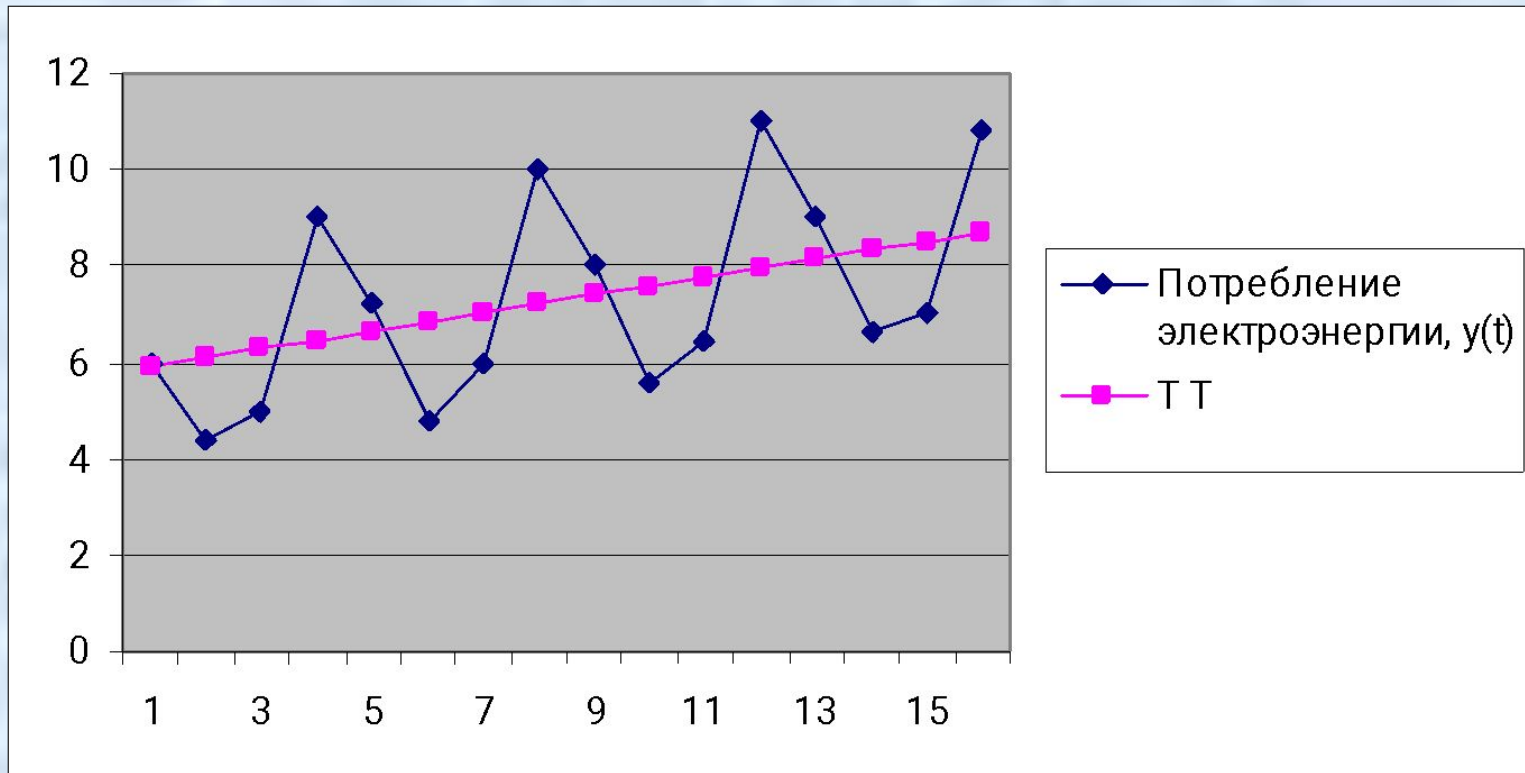
$$T = 5,715 + 0,186 \cdot t$$

Подставляя в это уравнение значения $t=1, \dots, 16$, найдем уровни T для каждого момента времени.

№ квартала, t	Потребление электроэнергии, $y(t)$	T
1	6	5,90184
2	4,4	6,08826
3	5	6,27468
4	9	6,4611
5	7,2	6,64752
6	4,8	6,83395
7	6	7,02037
8	10	7,20679
9	8	7,39321
10	5,6	7,57963
11	6,4	7,76605
12	11	7,95248
13	9	8,1389
14	6,6	8,32532
15	7	8,51174
16	10,8	8,69816

$$T = 5,715 + 0,186 \cdot t$$

Подставляя в это уравнение значения $t=1, \dots, 16$, найдем уровни T для каждого момента времени.



7) Найдем значения уровней ряда, полученные по аддитивной модели. Для этого прибавим к уровням T значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов.

№ квартала, t	Потребление электроэнергии, $y(t)$	T	$T+S$
1	6	5,90184	6,48309
2	4,4	6,08826	4,11118
3	5	6,27468	4,98093
4	9	6,4611	9,15069
5	7,2	6,64752	7,22877
6	4,8	6,83395	4,85686
7	6	7,02037	5,72662
8	10	7,20679	9,89637
9	8	7,39321	7,97446
10	5,6	7,57963	5,60255
11	6,4	7,76605	6,4723
12	11	7,95248	10,6421
13	9	8,1389	8,72015
14	6,6	8,32532	6,34824
15	7	8,51174	7,21799
16	10,8	8,69816	11,3877

Моделирование сезонных колебаний



Моделирование сезонных колебаний

Вычислим абсолютные ошибки по формуле $E = Y - (T + S)$

и относительные ошибки по формуле $A = \frac{|E|}{Y} \cdot 100\%$

№ квартала, t	Потребление электроэнергии, $y(t)$	T+S	$E = Y - (T + S)$	A
1	6	6,48309	-0,4831	8,05%
2	4,4	4,11118	0,28882	6,56%
3	5	4,98093	0,01907	0,38%
4	9	9,15069	-0,1507	1,67%
5	7,2	7,22877	-0,0288	0,40%

Вычислим среднюю ошибку аппроксимации, вычислив среднее значение по столбцу A. Она составит 2,75%.

Моделирование сезонных колебаний

Построим мультипликативную модель.

Номер квартала	Потребление электроэнергии жителями региона, млн. кВт·ч	Номер квартала	Потребление электроэнергии жителями региона, млн. кВт·ч
1	6,0	9	8,0
2	4,4	10	5,6
3	5,0	11	6,4
4	9,0	12	11,0
5	7,2	13	9,0
6	4,8	14	6,6
7	6,0	15	7,0
8	10,0	16	10,8

Моделирование сезонных колебаний

1. График динамики



Период сезонных колебаний $m=4$, модель мультипликативная

2) Выравнивание исходного ряда методом скользящего среднего.

Этот метод состоит в замене начальных значений ряда их средними значениями на интервале времени длины m , где m – период сезонной компоненты.

$$y_{c.c}(t) = \frac{0.5y(t-2) + y(t-1) + y(t) + y(t+1) + 0.5y(t+2)}{4} \quad \text{для } m=4$$

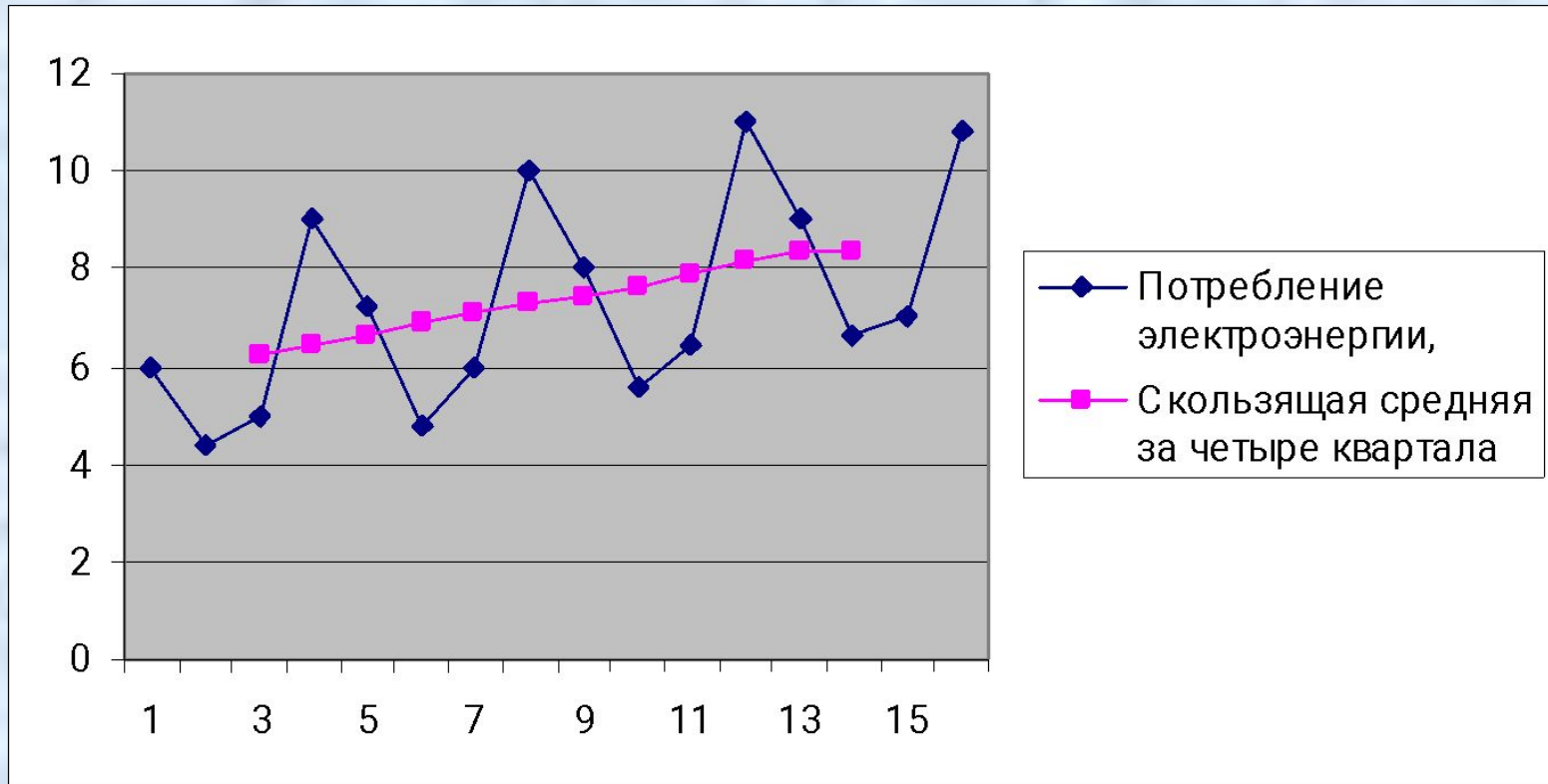
$$y_{c.c}(t) = \frac{0.5y(t-6) + y(t-5) + \dots + y(t) + y(t+1) + \dots + y(t+5) + 0.5y(t+6)}{12} \quad \text{для } m=12$$

$$y_{c.c}(t) = \frac{0.5y(t-2) + y(t-1) + y(t) + y(t+1) + 0.5y(t+2)}{4}$$

↓

<i>№</i>	<i>Потребление электроэнергии,</i>	<i>Скользящая средняя за четыре квартала</i>
1	6	
2	4,4	
3	5	6,25
4	9	6,45
5	7,2	6,625
6	4,8	6,875
7	6	7,1
8	10	7,3
9	8	7,45
10	5,6	7,625
11	6,4	7,875
12	11	8,125
13	9	8,325
14	6,6	8,375
15	7	
16	10,8	

$$y_{c.c}(t) = \frac{0.5y(t-2) + y(t-1) + y(t) + y(t+1) + 0.5y(t+2)}{4}$$



3) Предварительная оценка сезонной компоненты по формуле:

$$S_t = \frac{y(t)}{y_{c.c}(t)}$$

<i>№ квартала, t</i>	<i>Потребление электроэнергии, y(t)</i>	<i>Скользящая средняя за четыре квартала</i>	<i>оценки сезонной компоненты</i>
1	6		
2	4,4		
3	5	6,25	0,8
4	9	6,45	1,39535
5	7,2	6,625	1,08679
6	4,8	6,875	0,69818
7	6	7,1	0,84507
8	10	7,3	1,36986
9	8	7,45	1,07383
10	5,6	7,625	0,73443
11	6,4	7,875	0,8127
12	11	8,125	1,35385
13	9	8,325	1,08108
14	6,6	8,375	0,78806
15	7		
16	10,8		

3) Предварительная оценка сезонной компоненты по формуле: $S_t = \frac{y(t)}{y_{c.c.}(t)}$



Моделирование сезонных колебаний

4) Корректировка сезонной компоненты. Она должна удовлетворять условиям:

$$S_1 = S_5 = S_9 = S_{13}$$

$$S_2 = S_6 = S_{10} = S_{14}$$

$$S_3 = S_7 = S_{11} = S_{15}$$

$$S_4 = S_8 = S_{12} = S_{16}$$

$$\prod_{t=1}^m S_t = 1$$

Моделирование сезонных колебаний

Найдем средние значения сезонной компоненты по каждому из кварталов

Показатели	Год	№ квартала, I			
		I	II	III	IV
	1	–	–	0,8000	1,3953
	2	1,0868	0,6982	0,8451	1,3699
	3	1,0738	0,7344	0,8127	1,3538
	4	1,0811	0,7881	–	–
Средняя оценка сезонной компоненты	\bar{S}_i	1,0806	0,7402	0,8193	1,3730

Найдем произведение 4-х усредненных сезонных компонент

$$1,0806 \cdot 0,7402 \cdot 0,8193 \cdot 1,3730 = 0,899$$

Определим корректирующий коэффициент:

$$k = \sqrt[4]{0,899} = 0,974$$

Рассчитаем скорректированные значения сезонной компоненты

$$S_i = \bar{S}_i / k \quad k = \sqrt[4]{0,899} = 0,974$$

Показатели	Год	№ квартала, I			
		I	II	III	IV
	1	–	–	0,8000	1,3953
	2	1,0868	0,6982	0,8451	1,3699
	3	1,0738	0,7344	0,8127	1,3538
	4	1,0811	0,7881	–	–
Средняя оценка сезонной компоненты	\bar{S}_i	1,0806	0,7402	0,8193	1,3730
Скорректированная сезонная компонента	S_i	1,10949	0,76004	0,84119	1,40977

$$1,109 \cdot 0,76 \cdot 0,84119 \cdot 1,41 = 1$$

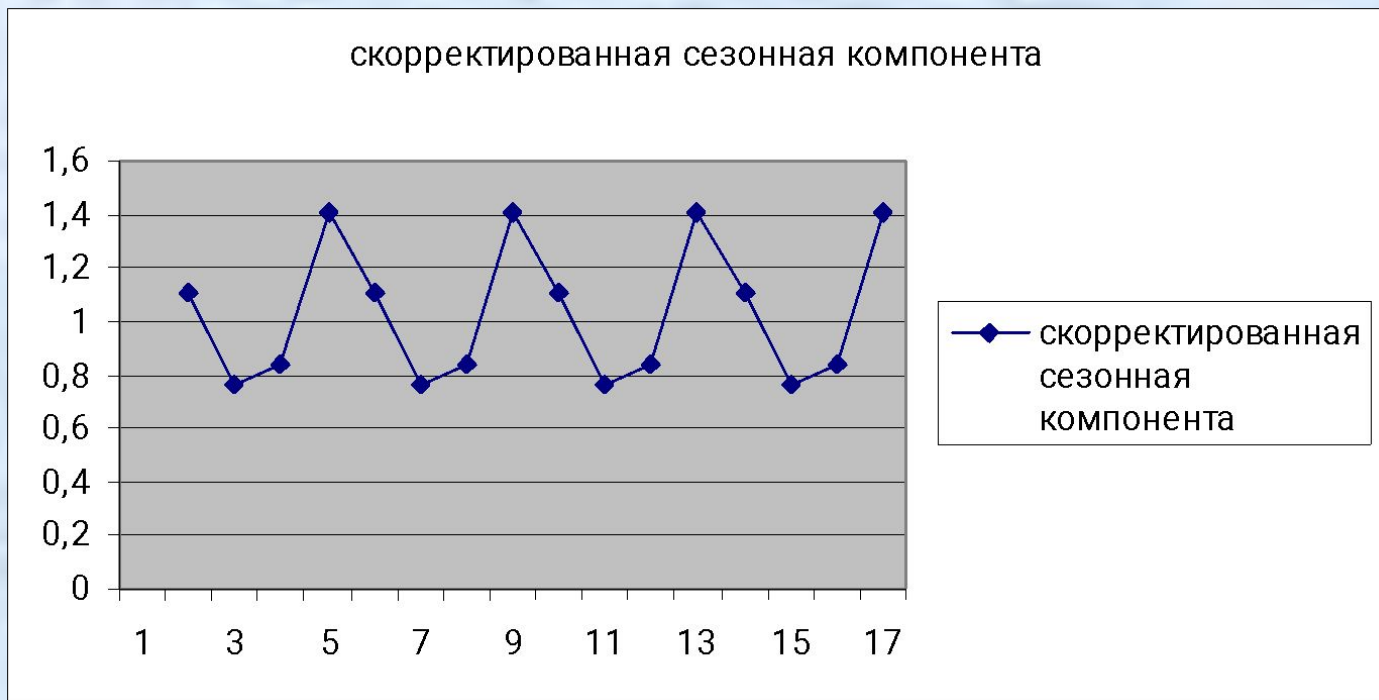
Таким образом, получены следующие значения сезонной компоненты:

I квартал: $S_1 = 1,109$

II квартал: $S_2 = 0,76$

III квартал: $S_3 = 0,84$

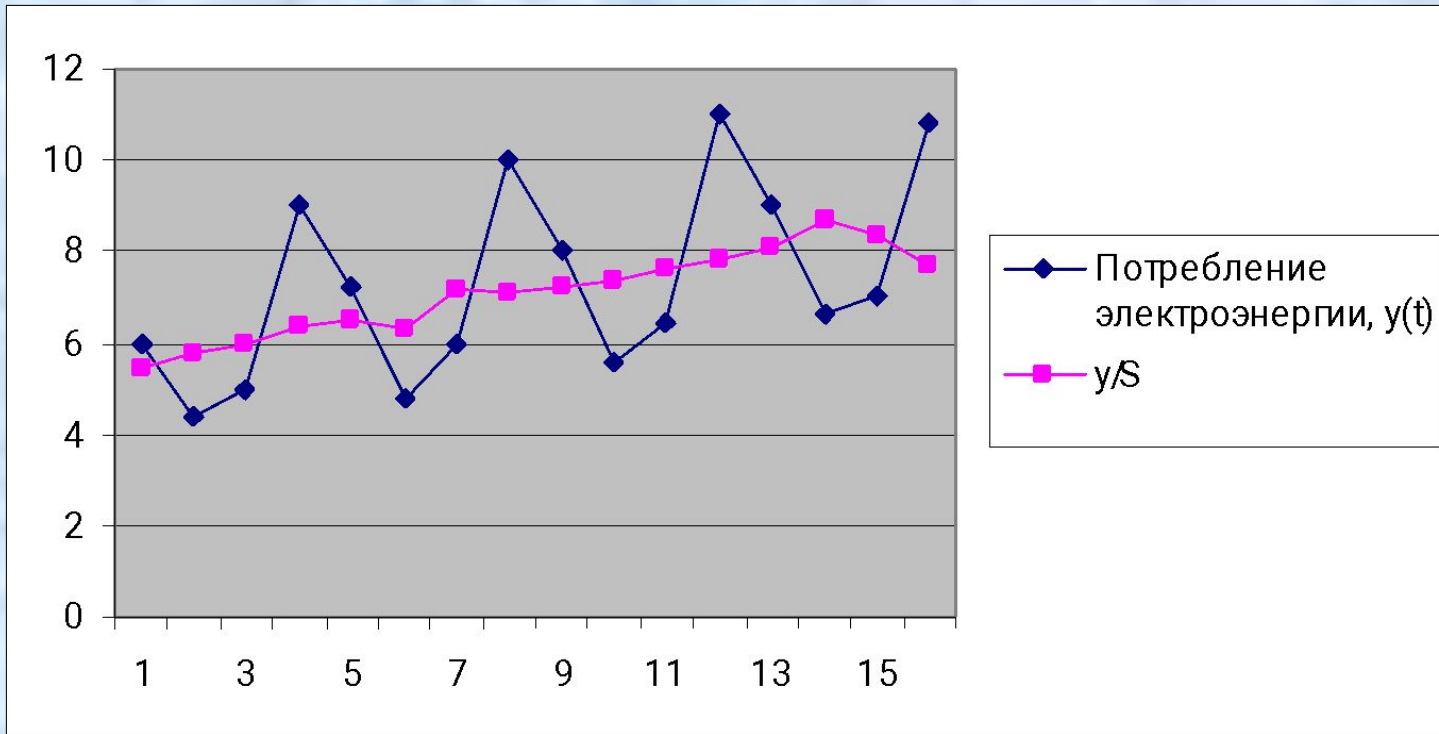
$S_4 = 1,41$



5) Исключение сезонной компоненты y_t / S_t

<i>№ квартала t</i>	<i>Потребление электроэнергии y(t)</i>	<i>Скорректированная сезонная компонента S(t)</i>	y_t / S_t
1	6	1,10949	5,40788394
2	4,4	0,76004	5,78919123
3	5	0,84119	5,94398597
4	9	1,40977	6,38400776
5	7,2	1,10949	6,48946073
6	4,8	0,76004	6,31548134
7	6	0,84119	7,13278317
8	10	1,40977	7,09334196
9	8	1,10949	7,21051193
10	5,6	0,76004	7,36806157
11	6,4	0,84119	7,60830204
12	11	1,40977	7,80267615
13	9	1,10949	8,11182592
14	6,6	0,76004	8,68378685
15	7	0,84119	8,32158036
16	10,8	1,40977	7,66080931

5) Исключение сезонной компоненты y_t / S_t



Моделирование сезонных колебаний

6) Построение линейного тренда по ряду без сезонной компоненты

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение
Y-пересечение	5,471	0,164428	33,27718	9,96E-15
Переменная X 1	0,189	0,017005	11,14593	2,4E-08

$$T = 5,47 + 0,189 \cdot t$$

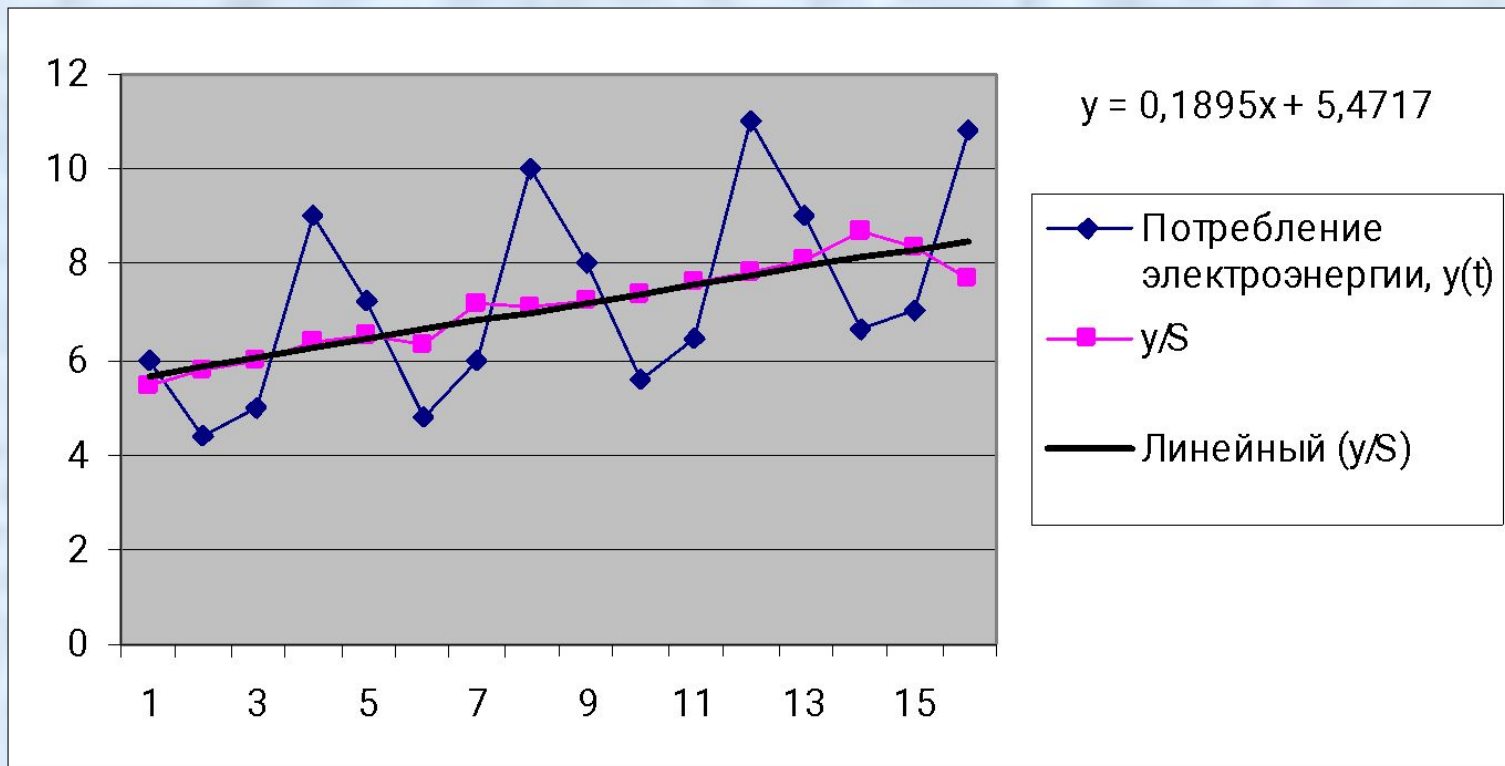
$$T = 5,47 + 0,189 \cdot t$$

Подставляя в это уравнение значения $t=1, \dots, 16$, найдем уровни T для каждого момента времени.

№ квартала, t	Потребление электроэнергии, $y(t)$	T
1	6	5,90184
2	4,4	6,08826
3	5	6,27468
4	9	6,4611
5	7,2	6,64752
6	4,8	6,83395
7	6	7,02037
8	10	7,20679
9	8	7,39321
10	5,6	7,57963
11	6,4	7,76605
12	11	7,95248
13	9	8,1389
14	6,6	8,32532
15	7	8,51174
16	10,8	8,69816

Моделирование сезонных колебаний

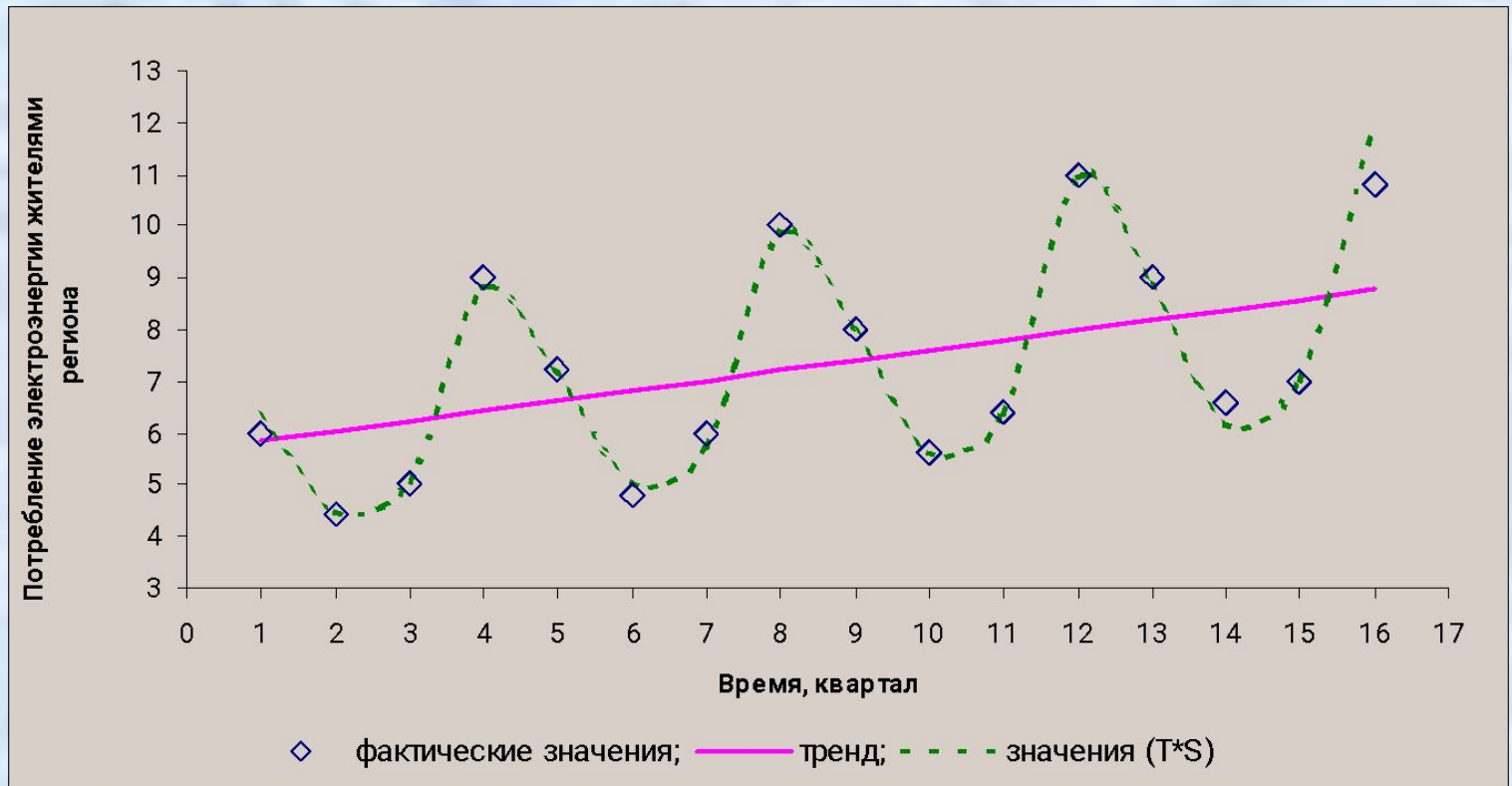
б) Построение линейного тренда по ряду без сезонной компоненты



7) Найдем значения уровней ряда, полученные по мультипликативной модели. Для этого умножим уровни T на значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов.

<i>№ квартала, t</i>	<i>Потребление электроэнерг ии, y(t)</i>	$T = 5,472 + 0,1895 \cdot t$	$T \cdot S$
1	6	5,90184	6,281
2	4,4	6,08826	4,447
3	5	6,27468	5,081
4	9	6,4611	8,783
5	7,2	6,64752	7,122
6	4,8	6,83395	5,023
7	6	7,02037	5,719
8	10	7,20679	9,851
9	8	7,39321	7,963
10	5,6	7,57963	5,599
11	6,4	7,76605	6,356
12	11	7,95248	10,920
13	9	8,1389	8,805
14	6,6	8,32532	6,175
15	7	8,51174	6,994
16	10,8	8,69816	11,989

Моделирование сезонных колебаний



Моделирование сезонных колебаний

Вычислим абсолютные ошибки по формуле $E = Y - (T + S)$

и относительные ошибки по формуле $A = \frac{|E|}{Y} \cdot 100\%$

№ квартала, t	Потребление электроэнергии, $y(t)$	$T \cdot S$	$E = Y - (T + S)$	A
1	6	6,281	-0,2811	4,68%
2	4,4	4,447	-0,0468	1,06%
3	5	5,081	-0,081	1,62%
4	9	8,783	0,21736	2,42%
5	7,2	7,122	0,07777	1,08%

Вычислим среднюю ошибку аппроксимации, вычислив среднее значение по столбцу A. Она составит 2,7%.

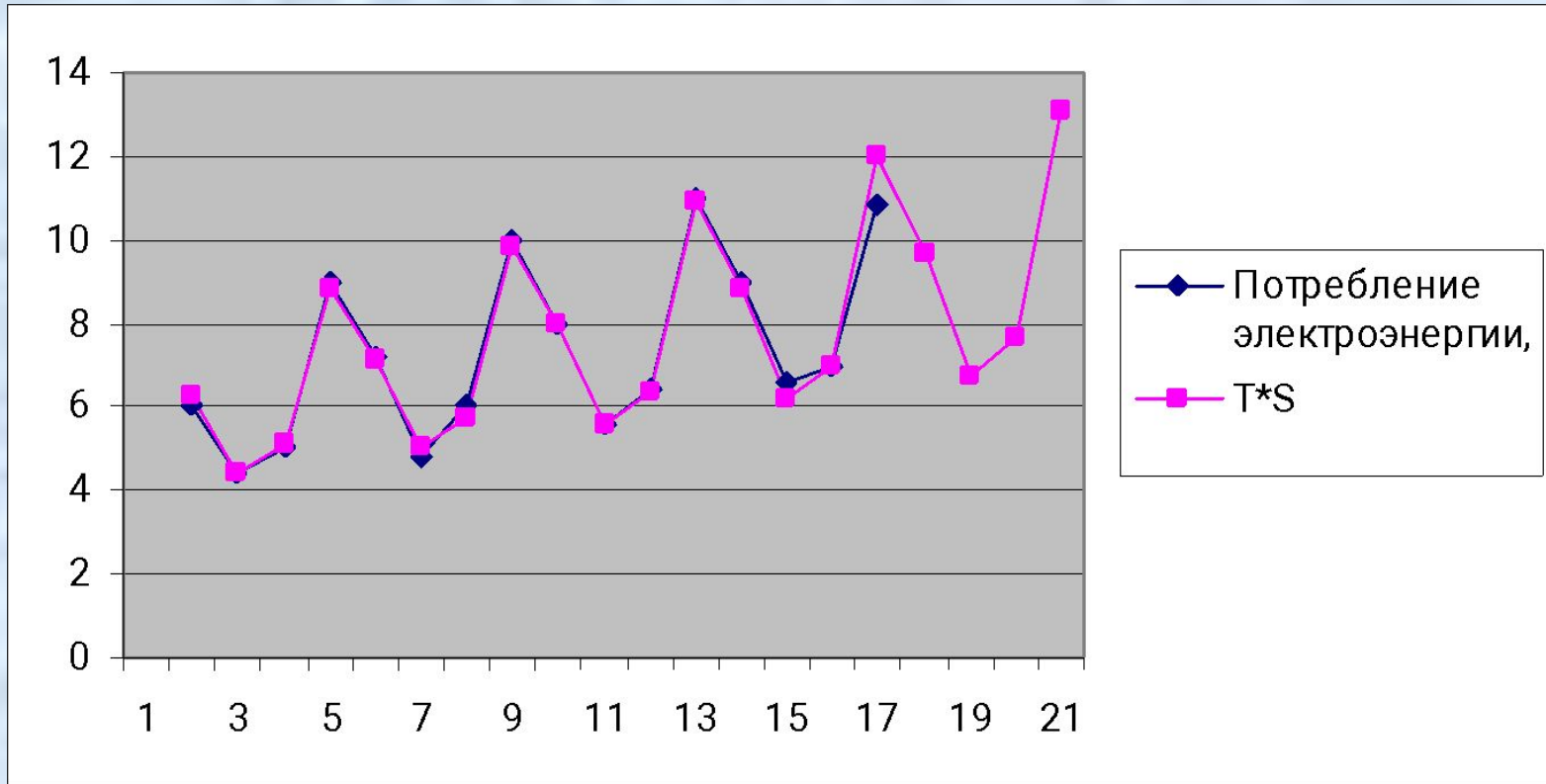
Моделирование сезонных колебаний

Выполним прогноз по мультипликативной модели на следующие 4 квартала

<i>№ квартала, t</i>	<i>Сезонная составляющая, S(t)</i>	<i>Тренд</i> $T = 5,472 + 0,1895 \cdot t$	<i>T*S</i>
17	1,10949	8,69376	9,646
18	0,76004	8,8833	6,752
19	0,84119	9,07283	7,632
20	1,40977	9,26237	13,058

Моделирование сезонных колебаний

Выполним прогноз по мультипликативной модели на следующие 4 квартала



Задание

На сайте www.gks.ru выбрать временной ряд по одному из социально-экономических показателей, содержащий сезонную составляющую.

1. Постройте график данного временного ряда. Охарактеризуйте структуру этого ряда.
2. Рассчитайте сезонную компоненты временного ряда и постройте его *аддитивную* и *мультипликативную* модели.
3. Рассчитайте трендовую компоненту временного ряда. Постройте графики построенных рядов.
4. Оцените качество модели через среднюю ошибку аппроксимации.
5. Выполните прогноз показателя на следующие 4 периода времени по лучшей модели.