РЕШЕНИЕ ВОЗВРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Проект по алгебре.

Выполнили: Дубровская Настя, Тимофеева Алина,Смирнова Маша.

ЦЕЛИ ПРОЕКТА:

1. Познакомиться с методами решения возвратных уравнений.
2. Совершенствовать навыки решения уравнений.
3. Овладеть способами сбора и хранения информации (создать презентацию)

ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Возвратное уравнение – алгебраическое уравнение

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, в котором $a_к = a_{n-k}$,

где $k = 0, 1, 2 \dots n$, причем, $a \neq 0$.

Леонард Эйлер (Leonhard Euler)

Задачу нахождения корней возвратного уравнения сводят к задаче нахождения решений алгебраического уравнения меньшей степени. Термин возвратные уравнения был введён **Л. Эйлером.**

Уравнения, у которых коэффициенты членов, равноудаленных от «начала» и «конца» уравнения, равны между собой, называются симметричными.

$$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$$

Симметричные уравнения четвертой степени.

- 1)Если m = 1, то это симметричное уравнение первого рода, имеющее вид

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ и решающееся новой подстановкой $y = x+\frac{1}{x}$

- 2) Если m = -1, то это симметричное уравнение второго рода, имеющее вид

$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ и решающееся новой подстановкой $y = x-\frac{1}{x}$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

- разделить левую и правую части уравнения на x^2. При этом не происходит потери решения, так как x = 0 не является корнем исходного уравнения при $a \neq 0$,
- группировкой привести полученное уравнение к виду

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

- ввести новую переменную $t = x + \frac{1}{x}$, тогда выполнено $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$,

то есть $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$;

- в новых переменных рассматриваемое уравнение является квадратным: $at^2 + bt + c = 0$;
- решить его относительно t, возвратиться к исходной переменной.

Если уравнение является разрешимым, то для возвратного уравнения четвертой степени после преобразований получаем:

$$x_{1,2} = \frac{2a}{-b \pm D - 2a},\ D = \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

$$2x^4 + 9x^3 - x^2 + 9x + 2 = 0$$

т.к. $x = 0$ - не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$.

$$2x^2 + 9x - 1 + \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 9(x + \frac{1}{x}) - 1 = 0$$

Введем замену.

Пусть $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, получим

$2y^2 + 9y - 5 = 0$ $\qquad$ $y_1 = -5$, $y_2 = \frac{1}{2}$

Вернемся к замене.

$x + \frac{1}{x} = -5$	или	$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
$\frac{x^2 + 5x + 1}{x} = 0$		$\frac{2x^2 - x + 2}{2x} = 0$
$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$		корней нет

Ответ: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 5X + 1 = 0$

Данное уравнение является симметрическим уравнением четвертой степени. Так как $x = 0$ не является его корнем, то, разделив уравнение на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппировав слагаемые, перепишем уравнение в виде

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

Положив $x + \frac{1}{x} = y$, получим уравнение

$$y^2 - 5y + 6 = 0,$$

имеющее два корня $y_1 = 2$ и $y_2 = 3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x + \frac{1}{x} = 2 \qquad \text{и} \qquad x + \frac{1}{x} = 3.$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ и } x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

$X^4+X^3-4X^2+X+1=0$

Разделим на $x^2 \neq 0$ $\quad x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) - 4 = 0$

Делаем замену: $y = x + \frac{1}{x}$

Тогда: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ $\qquad$ Значит: $x + \frac{1}{x} = 2$ или $x + \frac{1}{x} = -3$

$y^2 - 2 + y - 4 = 0$ $\qquad$ Д=0 $\qquad$ Д=5

$y^2 + y - 6 = 0$ $\qquad$ $x_1 = 1$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

Д=25 $\qquad$ $x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

$y_1 = 2$

$y_2 = -3$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$; $x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

$X^4-5X^3+6X^2-5X+1=0$

Разделим на $x^2 \neq 0$ $\quad x^2-5x+6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$(x^2+\frac{1}{x^2})-5(x+\frac{1}{x})+6=0$ делаем замену $x+\frac{1}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

Получим $(y^2-2)-5y+6=0$

$Y^2-5y+4=0$; $y=1$, $y=4$

Переходим к замене: $X+\frac{1}{x}=4$ или $x+\frac{1}{x}=1$

$X^2-4x+1=0$ или $x^2-x+1=0$

Д=12 Д= - 3

$X_1=2-\sqrt{3}$ корней нет

$X_2=2+\sqrt{3}$

Ответ: $X_1=2-\sqrt{3}$

$X_2=2+\sqrt{3}$

$3X^4 + 5X^3 - 14X^2 - 10X + 12 = 0$

Разделим на $x^2 \neq 0$ $\quad 3x^2 + 5x - 14 - \frac{10}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$

$3(x^2 + \frac{4}{x^2}) + 5(x - \frac{2}{x}) - 14 = 0$ $\quad$ Делаем замену $\quad x - \frac{2}{x} = y$,

тогда $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$

Получим: $3(y^2 - 4) + 5y - 14 = 0$

$3y^2 + 5y - 26 = 0$

$y_1 = \frac{1}{3}$; $y_2 = -2$;

Переходим к замене: $\quad x - \frac{2}{x} = \frac{1}{3}$ или $x - \frac{2}{x} = -2$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{6} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{6}$; $\quad x_3 = -1 + \sqrt{3} \quad x_4 = -1 - \sqrt{3}$

Ответ: $\quad x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{6} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{6}$; $\quad x_3 = -1 + \sqrt{3} \quad x_4 = -1 - \sqrt{3}$

$5X^3 + 21X^2+21X +5=0$
СИММЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

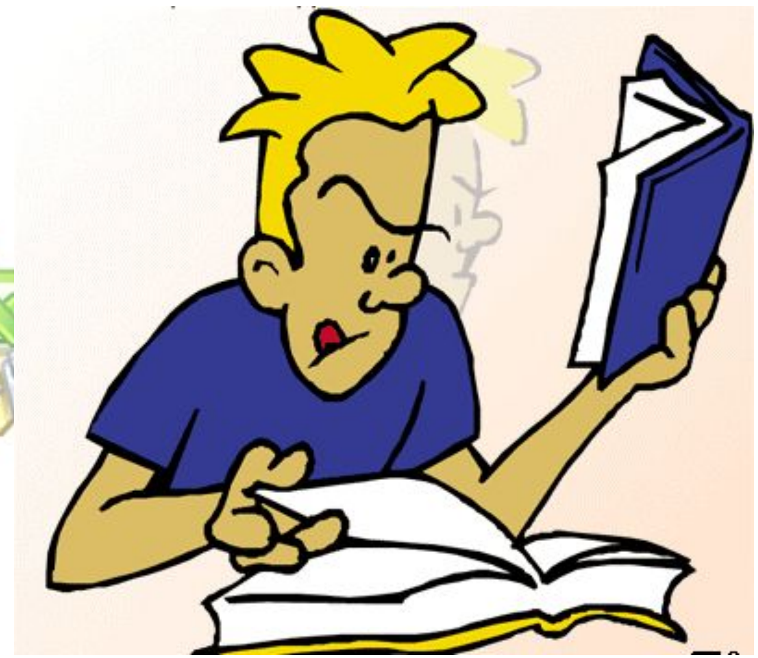
$5(x^3+1) + 21x\ (x+1)=0$

$5(x+1)(x^2 + x +1) + 21x(\ x+1)=0$

$(x+1)\ (5(x^2+x+1)+21x)\ =0$

$(x+1)(5x^2+26x + 5)= 0$

$X_1= -1$ Д$= \frac{676-4x25}{10} = 576$



$X_2= \frac{-26+24}{10} = -\frac{1}{5}$

$X_3=\frac{-26-24}{10} = -5$

Ответ: $x_1= -1$; $x_2= -\frac{1}{5}$; $x_3= -5$

$6X^4 - 3X^3 + 12X^2 - 6X = 0$

$6x^2 (x^2+2) – 3x (x^2 +2)=0$

$(x^2 +2) (6 x^2- 3x) = 0$

$3x(x^2 + 2) (2x -1) =0$

$3x=0$ или $x^2 + 2 =0$ или $2x -1=0$

$X_1=0$ нет корней $x_2 = \frac{1}{2}$

Ответ: $X_1=0$ $x_2 = \frac{1}{2}$