Обобщенная линейная модель множественной регрессии с автокоррелированными остатками

Автокорреляция регрессионных остатков – корреляционная зависимость текущих и предыдущих значений регрессионных остатков.

Линейная модель множественной регрессии

$Y = X\overline{\beta} + \overline{\varepsilon}$,

для которой нарушено 5 условие Гаусса-Маркова называется **обобщенной линейной моделью множественной регрессии (ОЛММР) с автокоррелированными остатками,** а именно:

1) $x_1, \dots, x_k$ – детерминированные переменные;
2) ранг матрицы X равен "$k+1$" – среди признаков нет линейно зависимых;
3) $M\varepsilon_i = 0,\ i = \overline{1,n}$ - нет систематических ошибок в измерении y;
4) $D\varepsilon_i = M\varepsilon_i^2 = \sigma^2,\ i = \overline{1,n}$
5) $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) \neq 0,\ i \neq j,\ i = \overline{1,n}\ j = \overline{1,n}$

4') $\Sigma_\varepsilon = M\overline{\varepsilon}\overline{\varepsilon}^T = \sigma^2\Sigma_0$ $(\sigma_i^2 = \sigma_j^2)$, **т.е. на диагонали стоят равные дисперсии.**

Виды автокорреляции

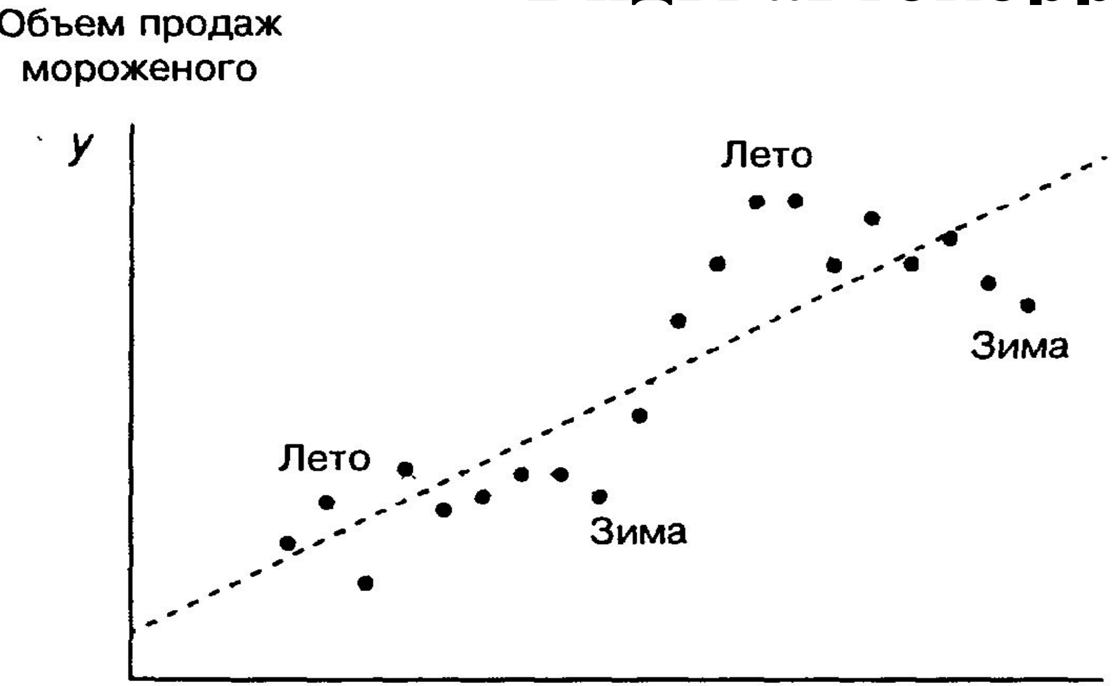


Рис. 1 Положительная автокорреляция

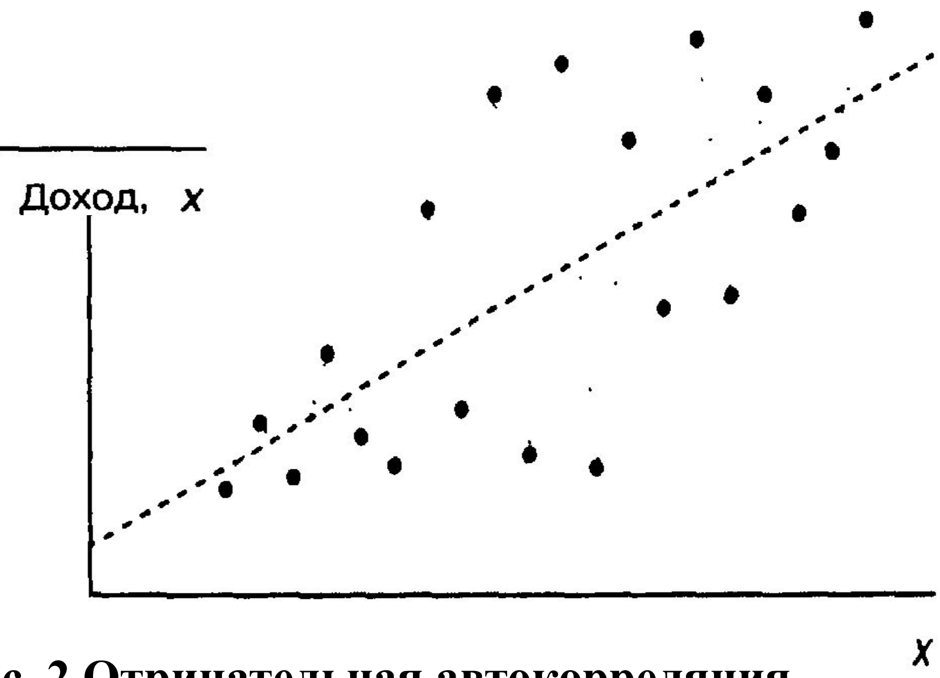
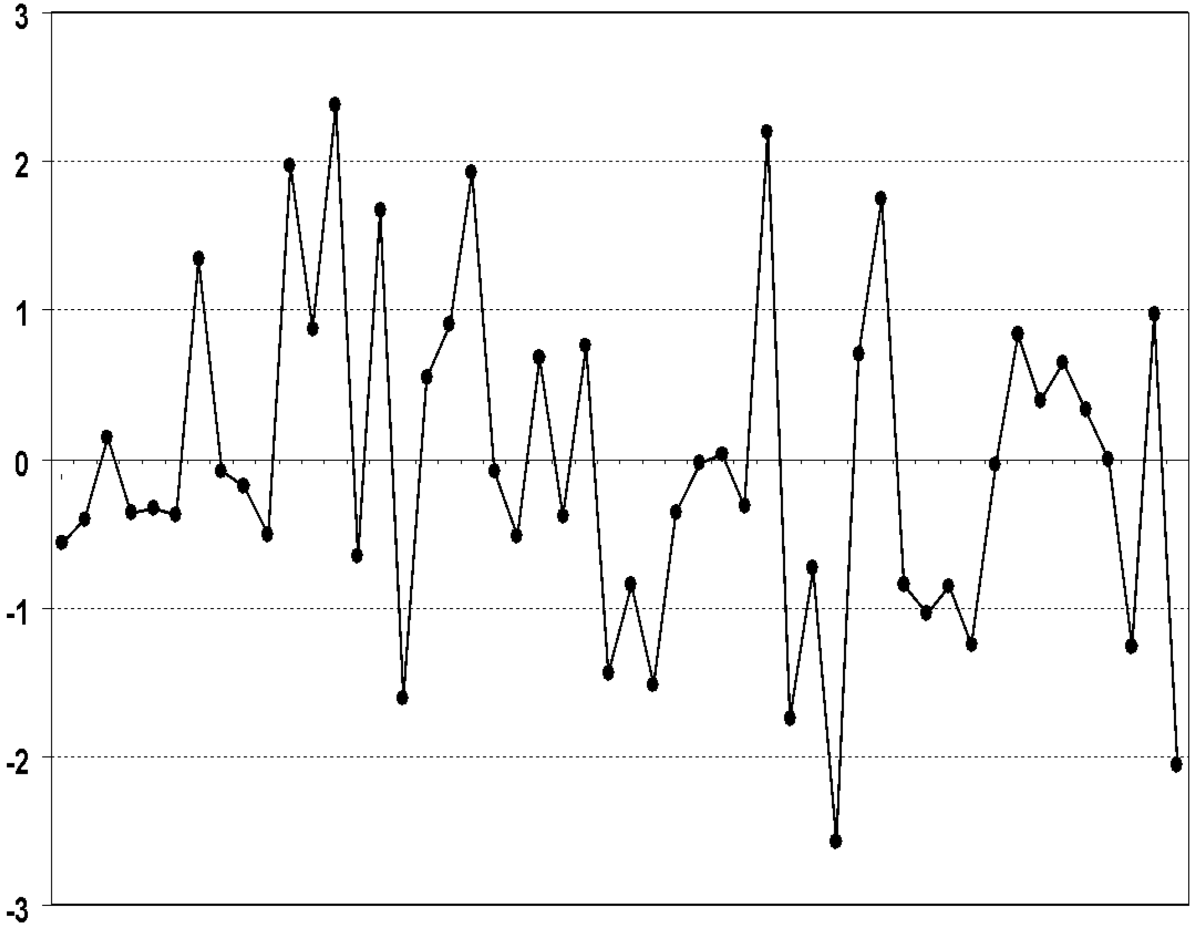


Рис. 2 Отрицательная автокорреляция

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку

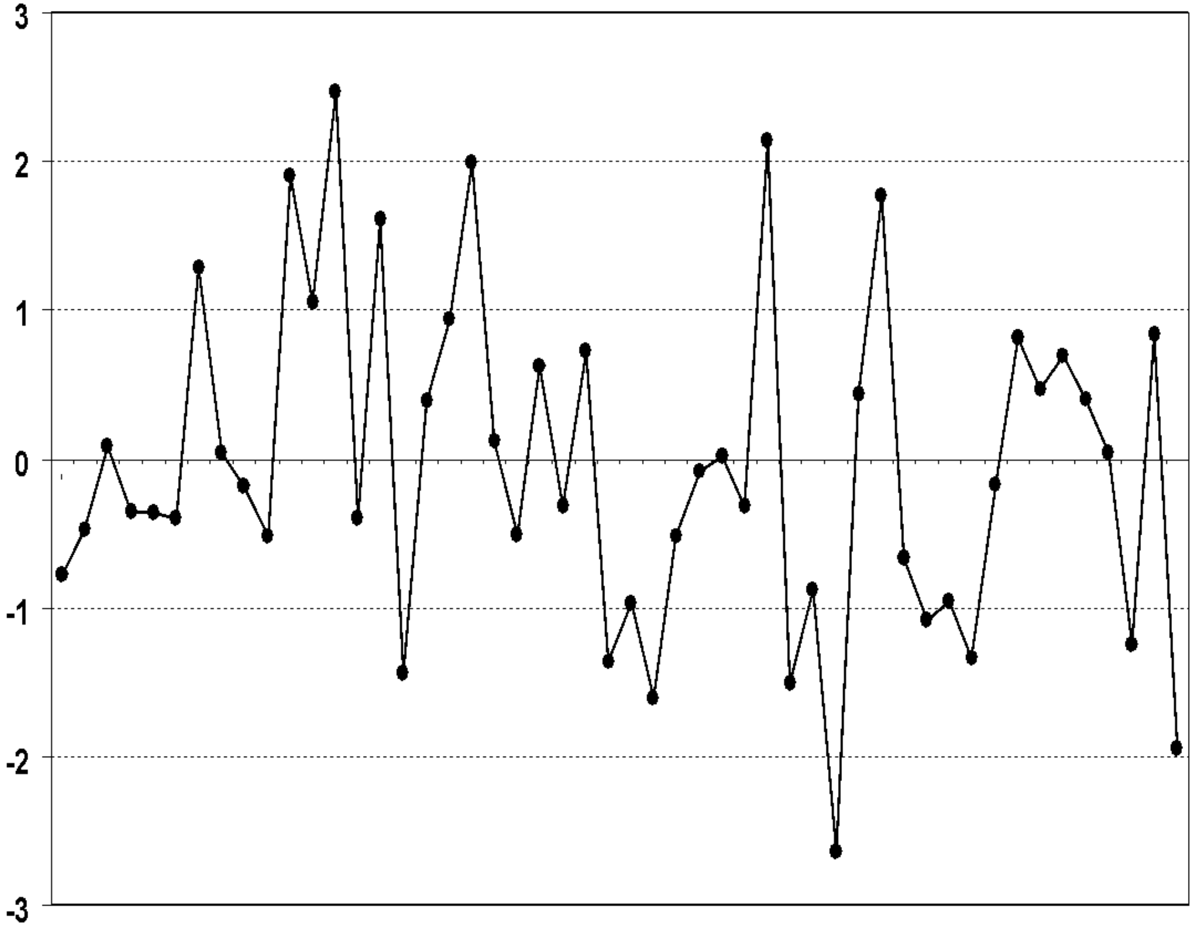
Рассмотрим выборку из 50 независимых нормально распределенных с нулевым средним значений ε_i.
С целью ознакомления с влиянием автокорреляции будем вводить в нее положительную, а затем отрицательную автокорреляцию.

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



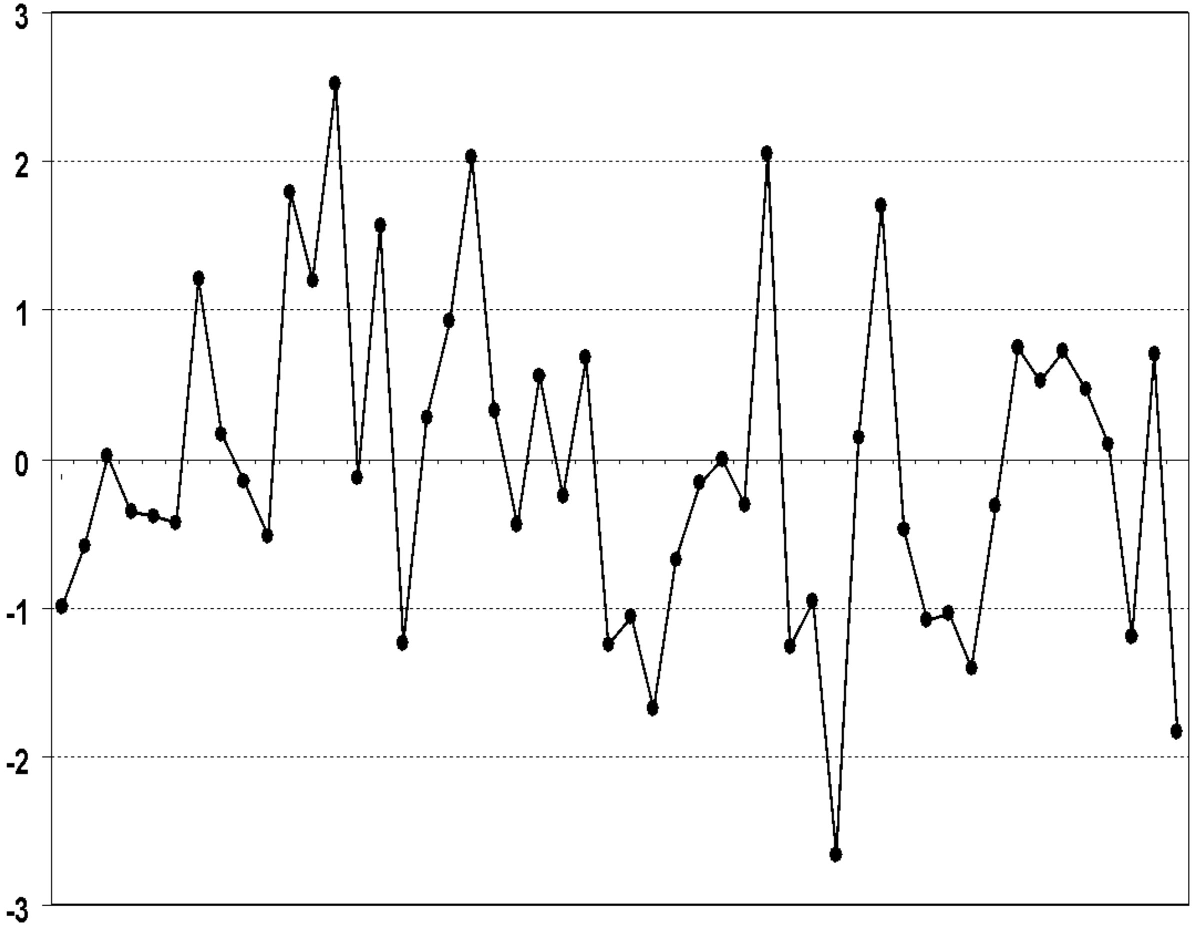
$$u_t = 0.0 u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



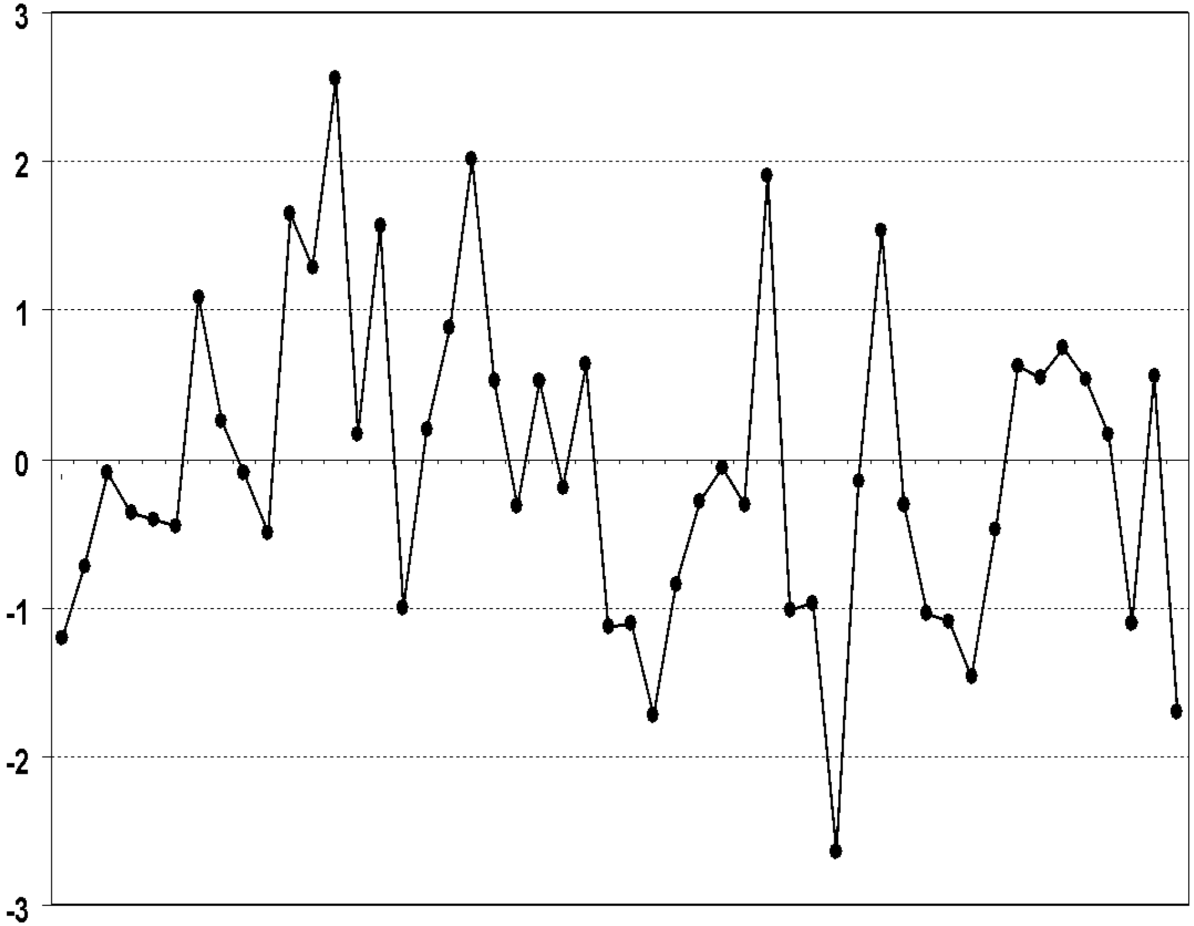
$$u_t = 0.1u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



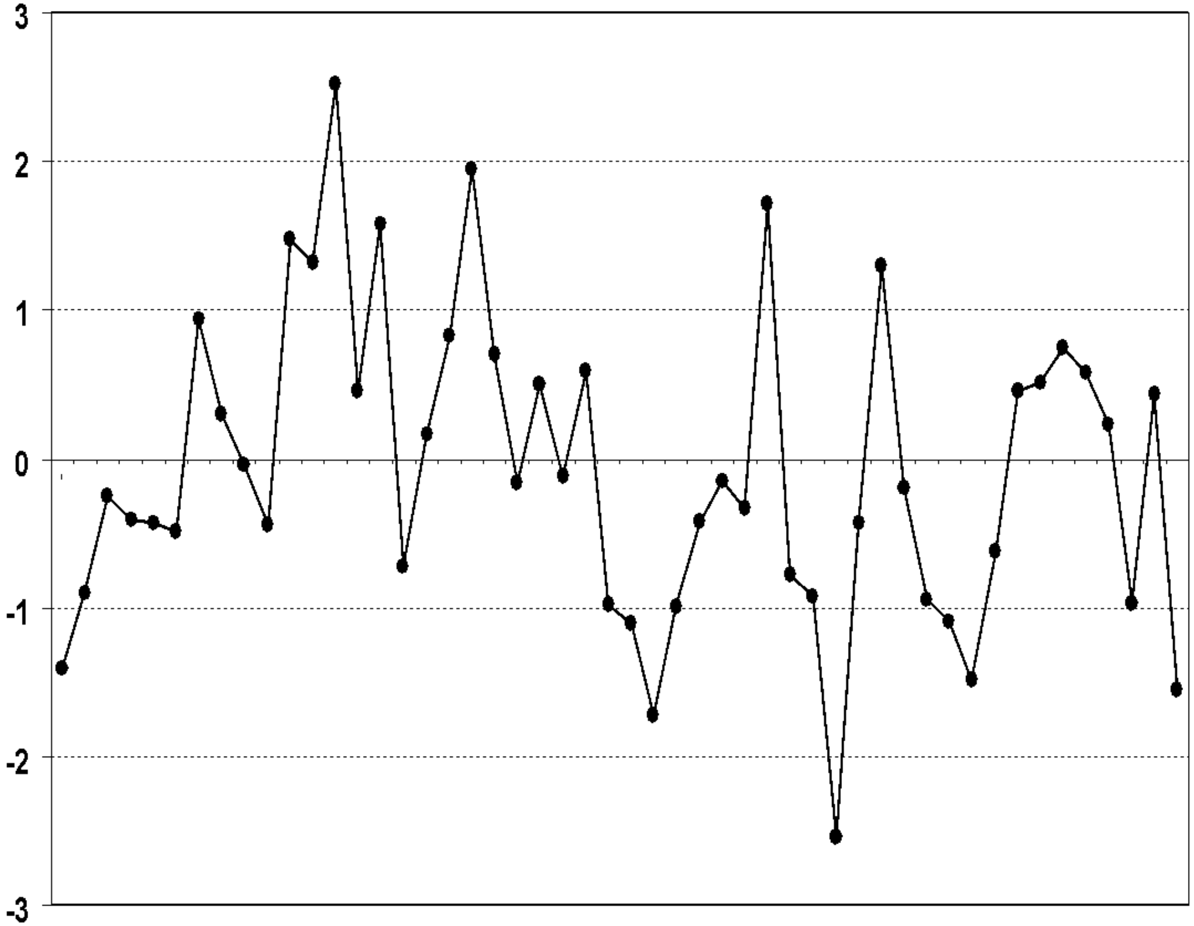
$$u_t = 0.2u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



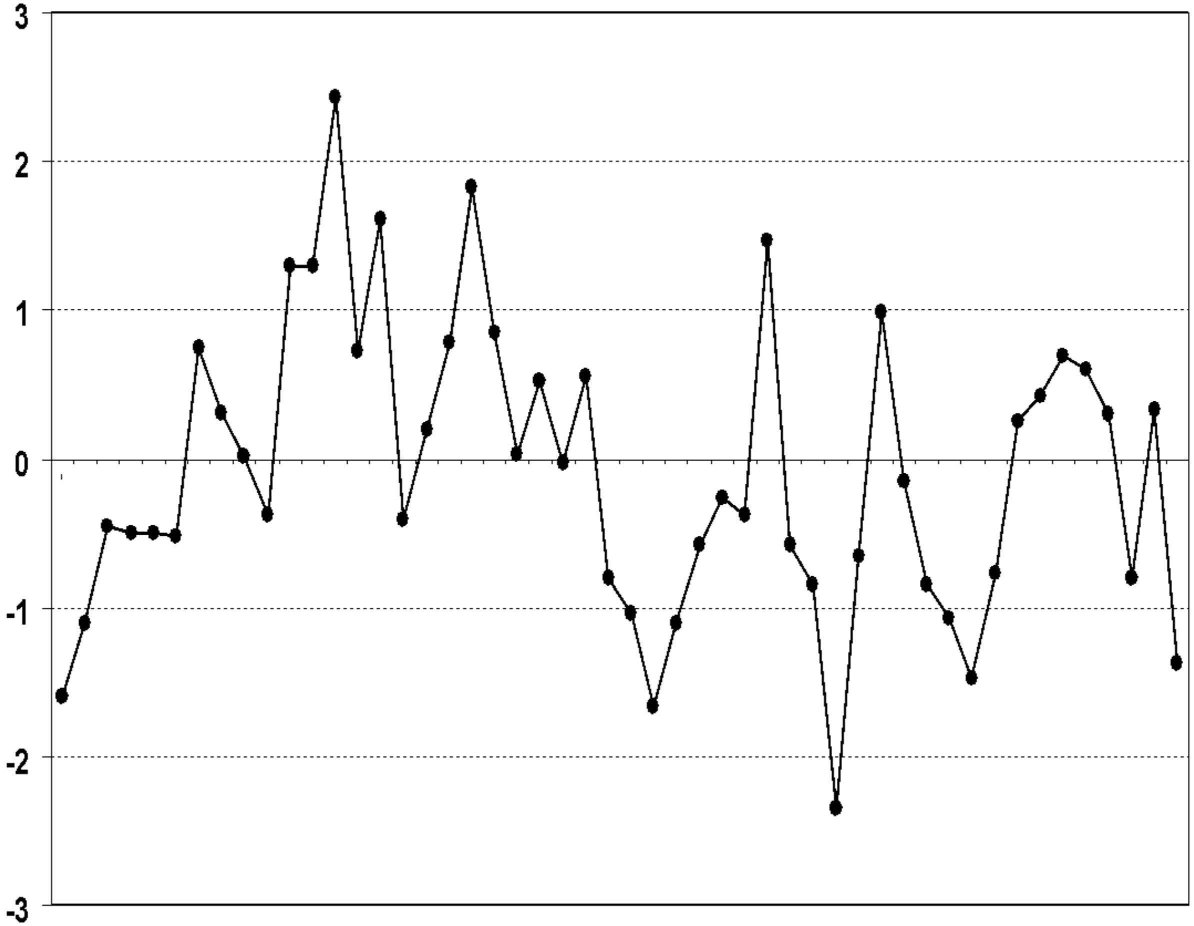
$$u_t = 0.3u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



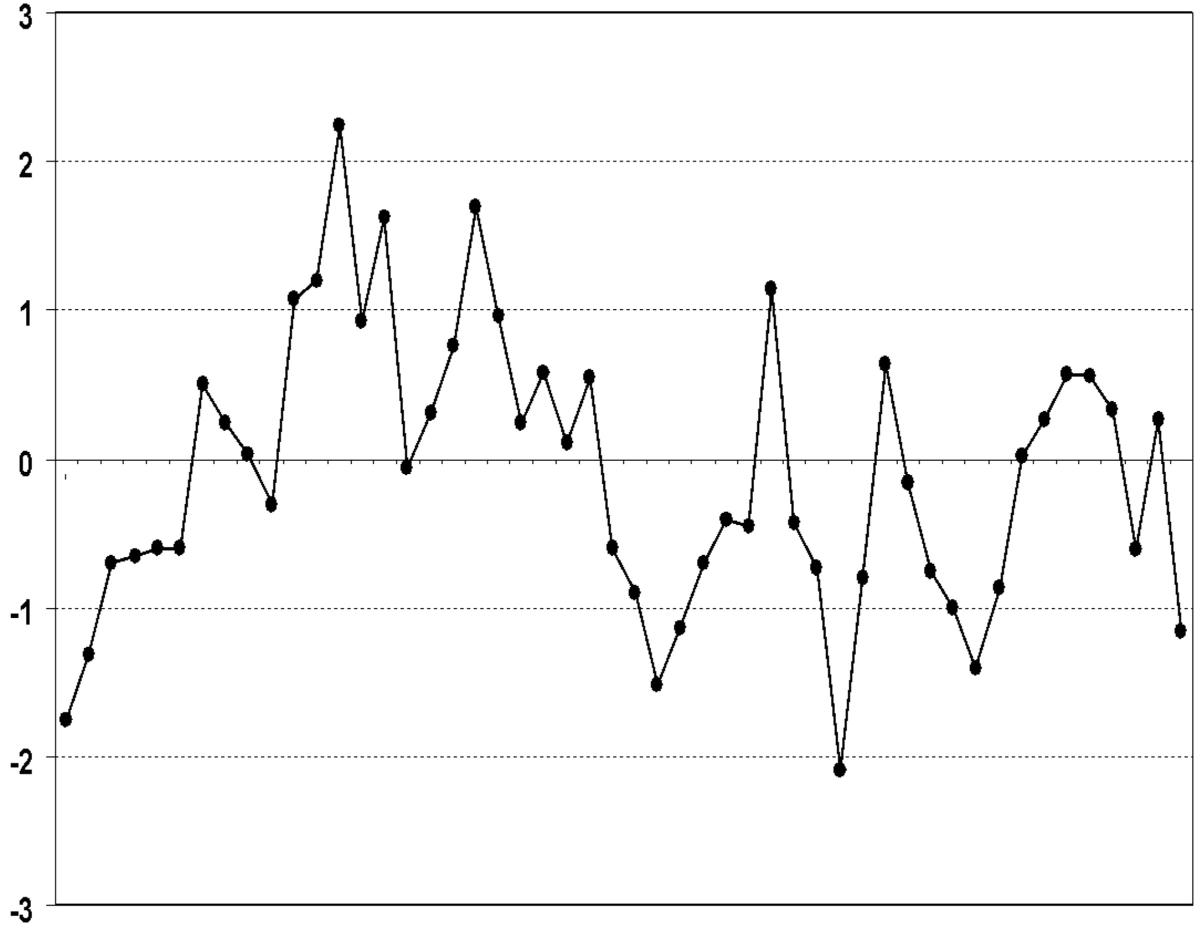
$$u_t = 0.4u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



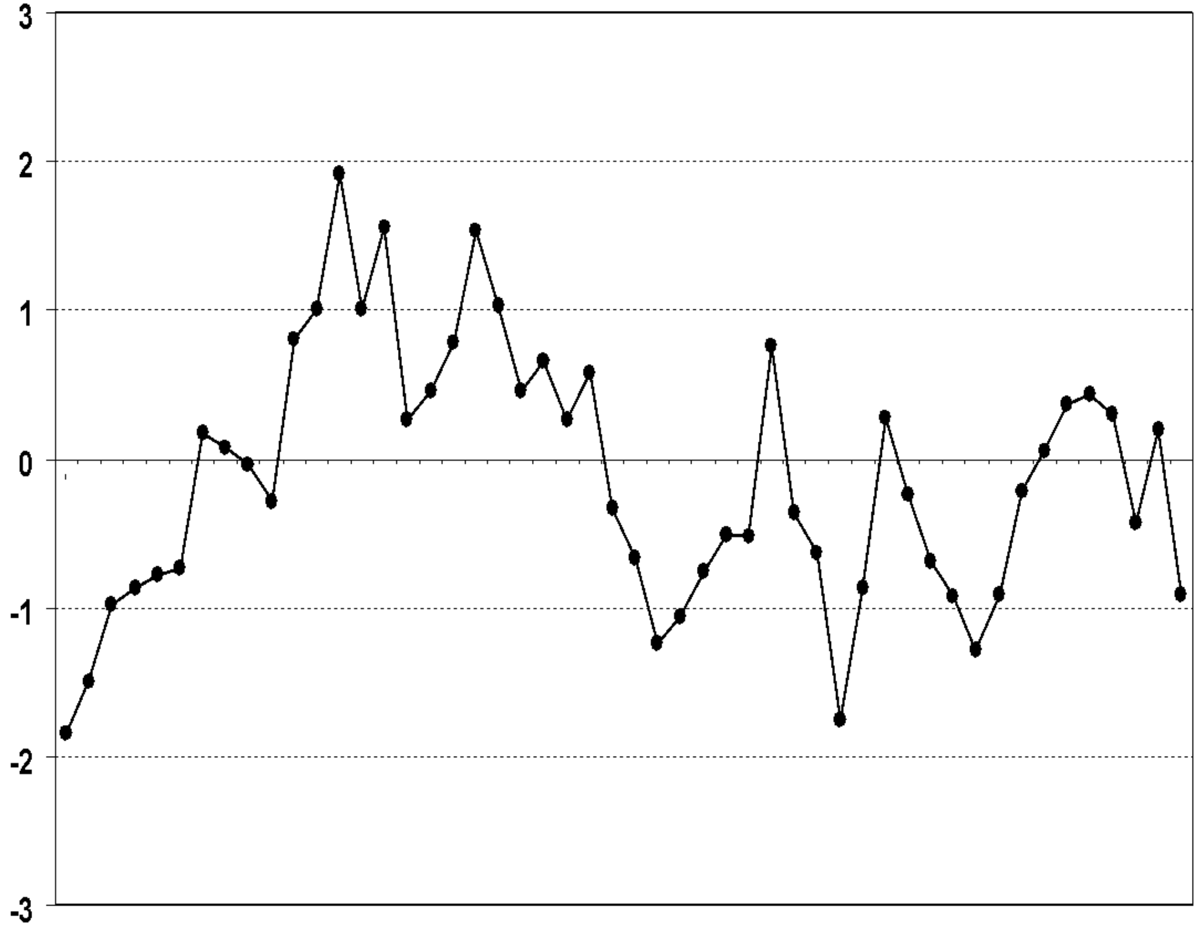
$$u_t = 0.5u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



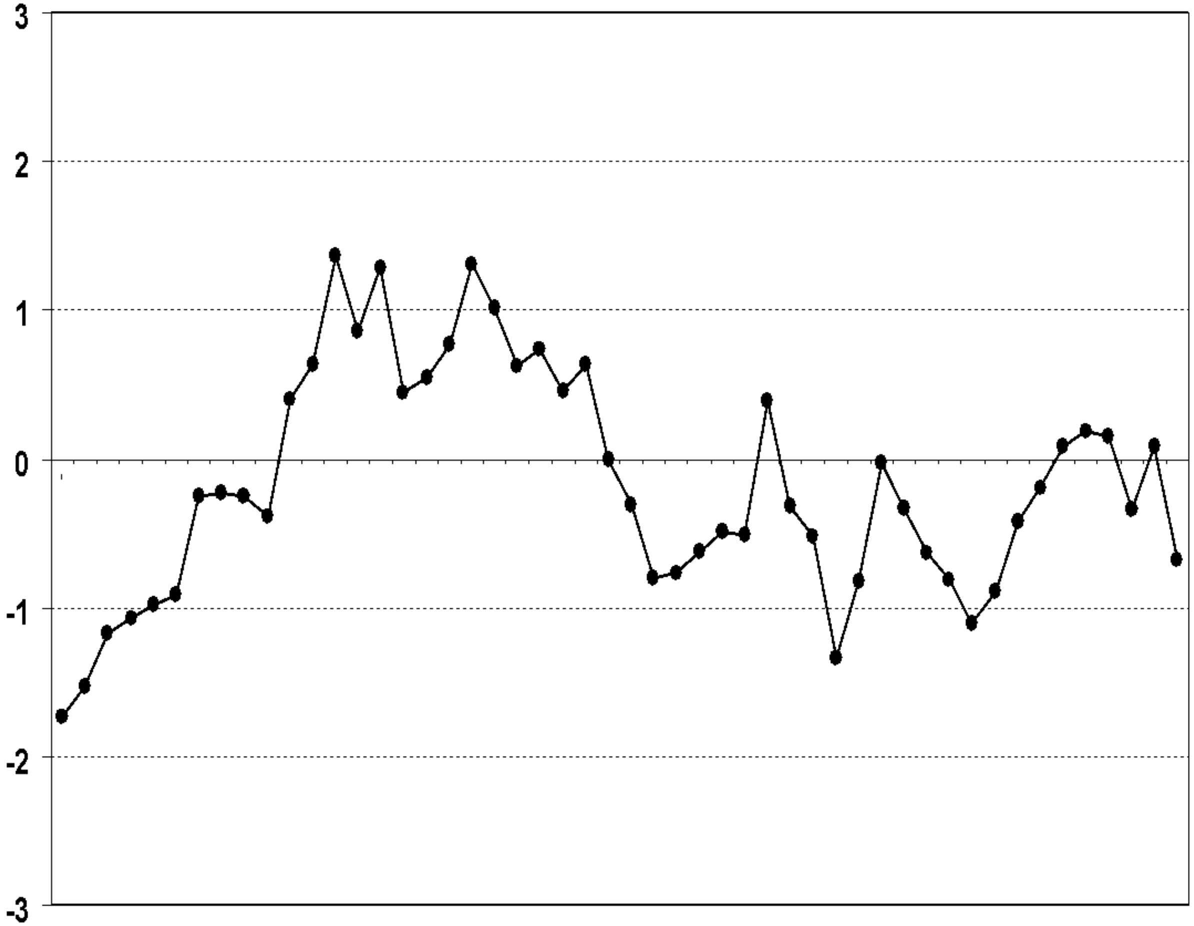
$$u_t = 0.6u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



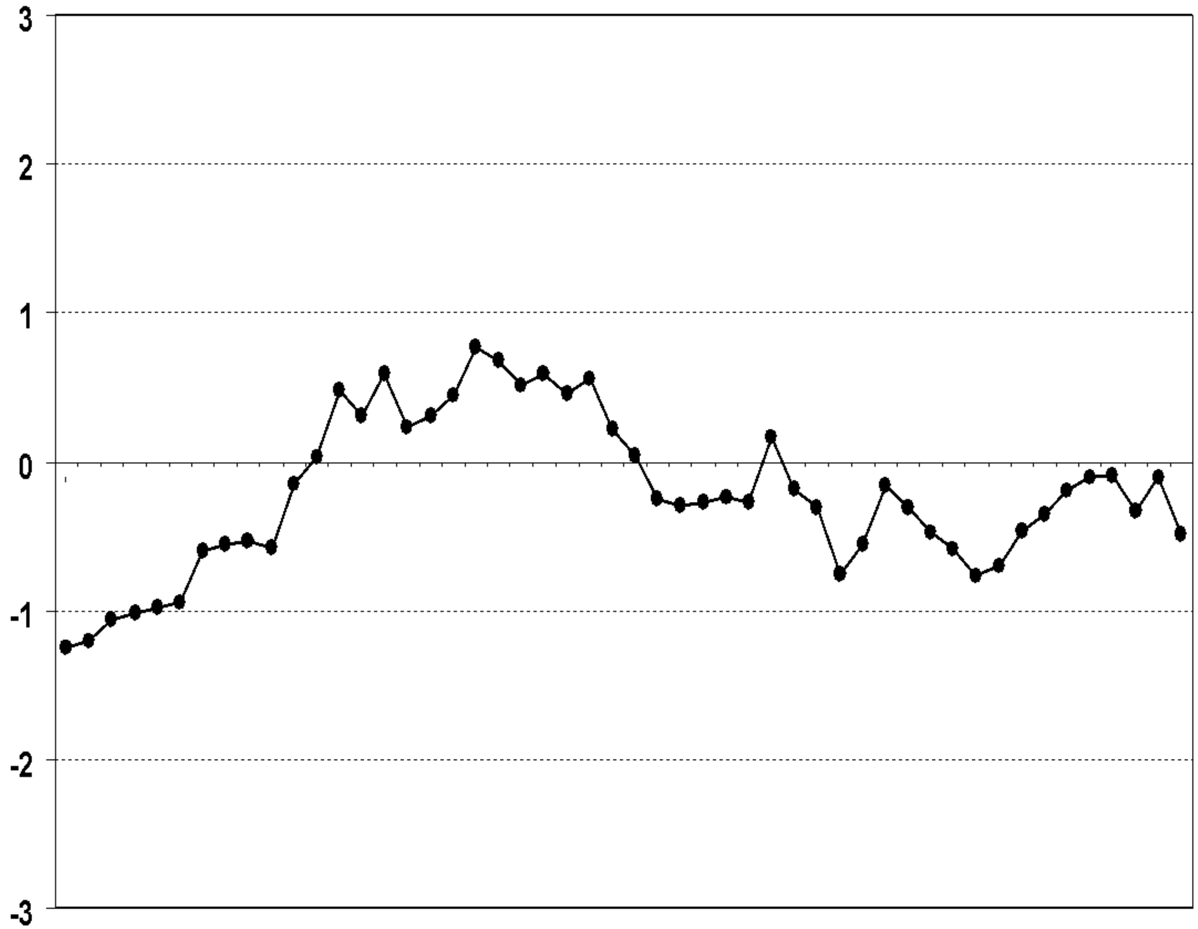
$$u_t = 0.7u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



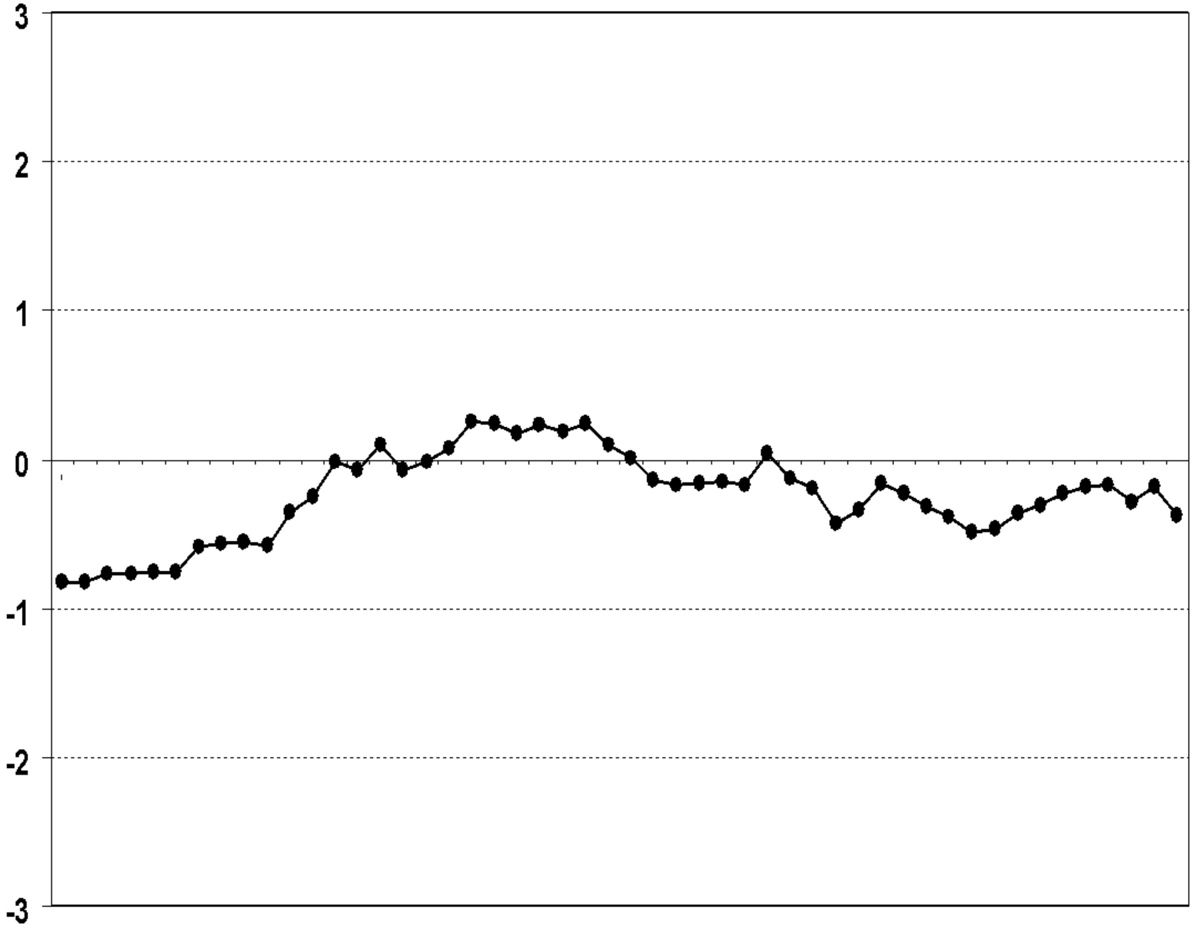
$$u_t = 0.8u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



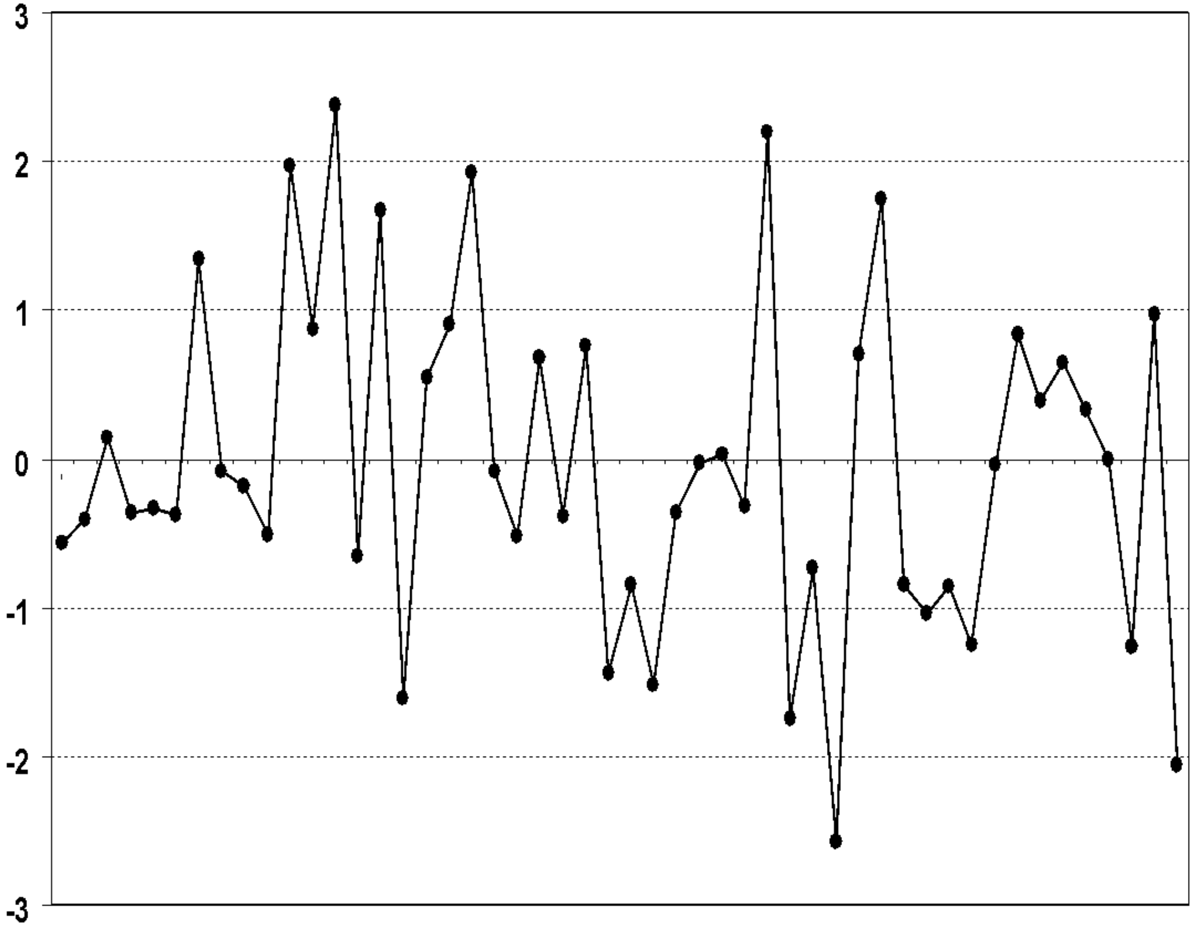
$$u_t = 0.9u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



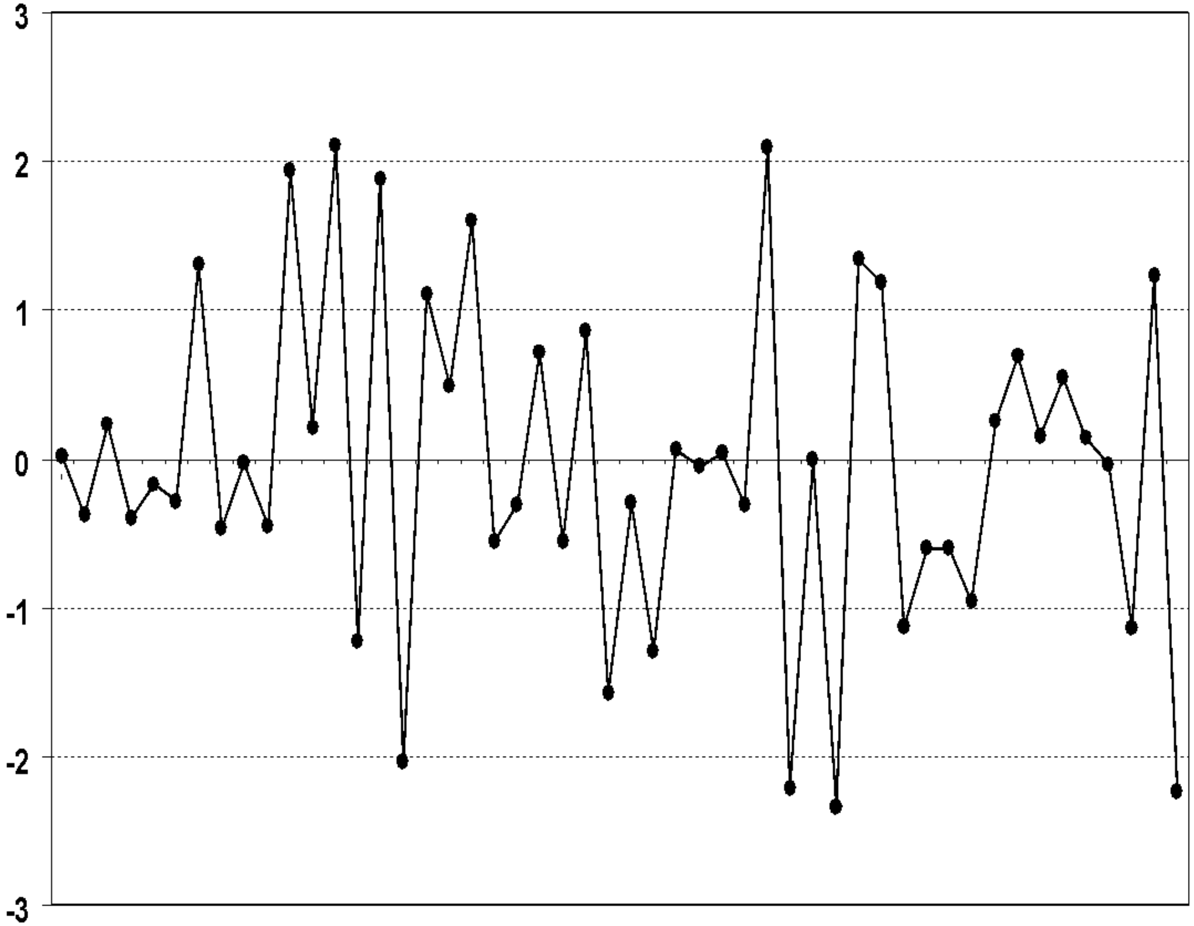
$$u_t = 0.95u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



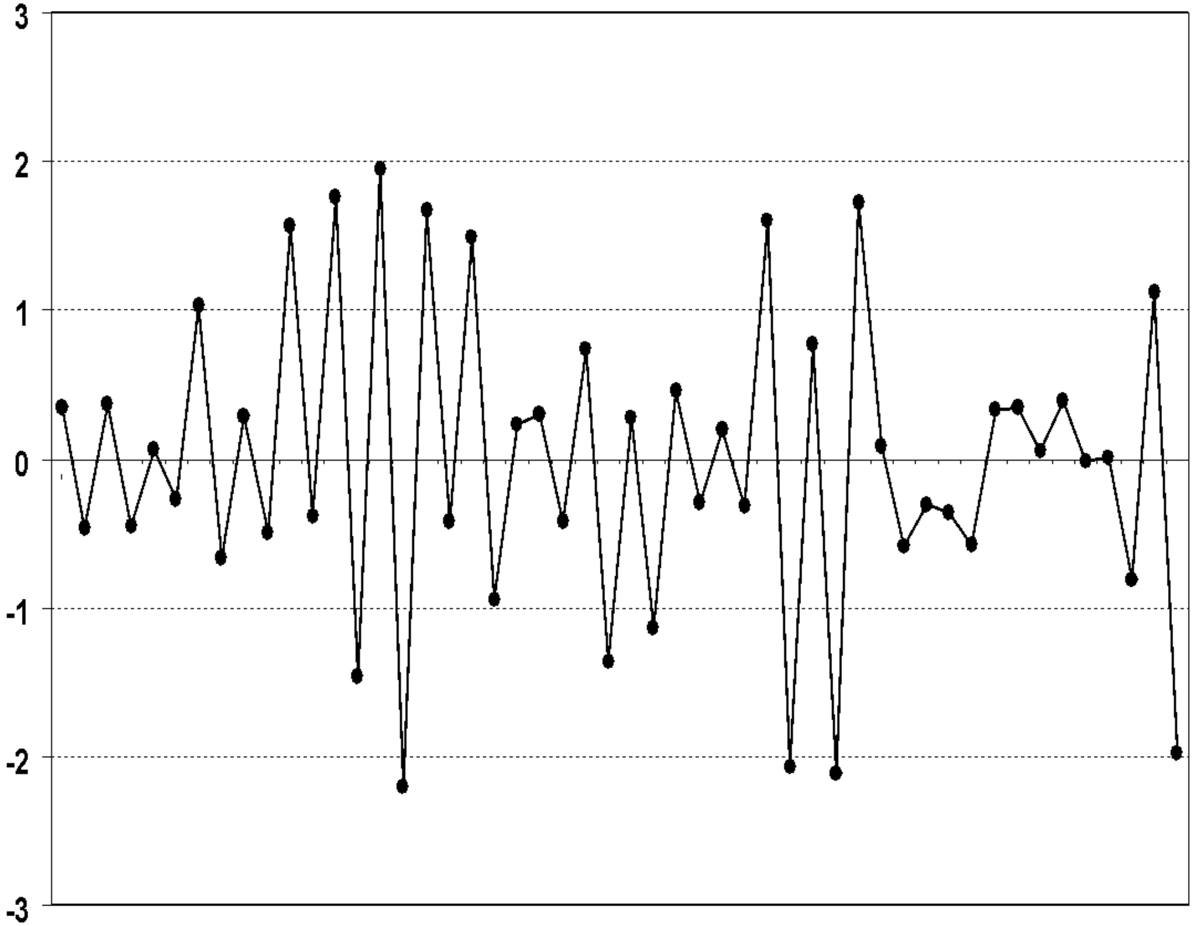
$$u_t = 0.0u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



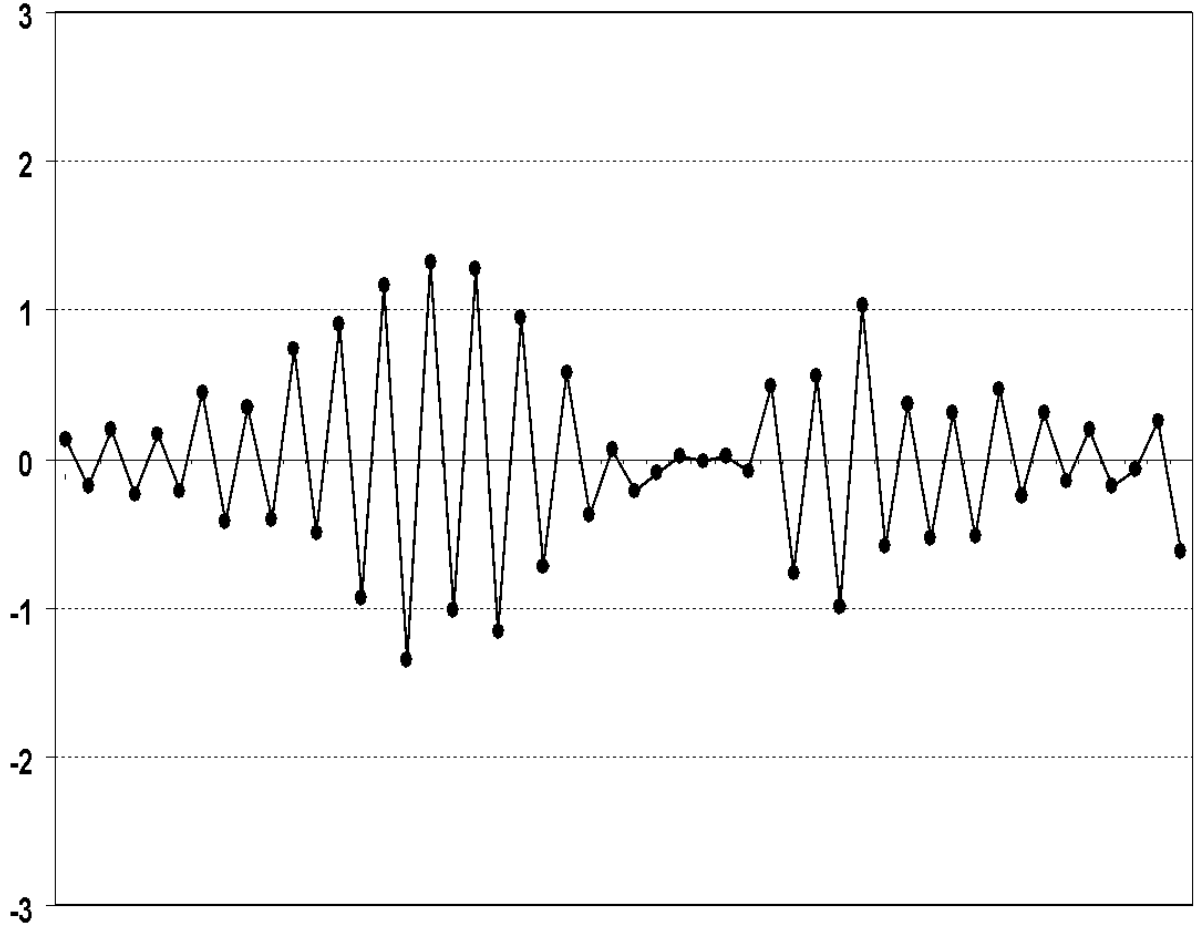
$$u_t = -0.3u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



$$u_t = -0.6u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Пример влияния автокорреляции на случайную выборку



$$u_t = -0.9u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Автокорреляция первого порядка

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + \delta_i\ ,$$

ρ - коэффициент автокорреляции первого порядка ($/\rho/ \leq 1$).

δ_i - случайные величины, удовлетворяющие условиям $M[\delta_i] = 0,\ M[\delta_i, \delta_j] = \begin{cases} \sigma_\delta^2, \ npu \ \ i = j; \\ 0, \ \ npu \ \ i \neq j \end{cases}$

.

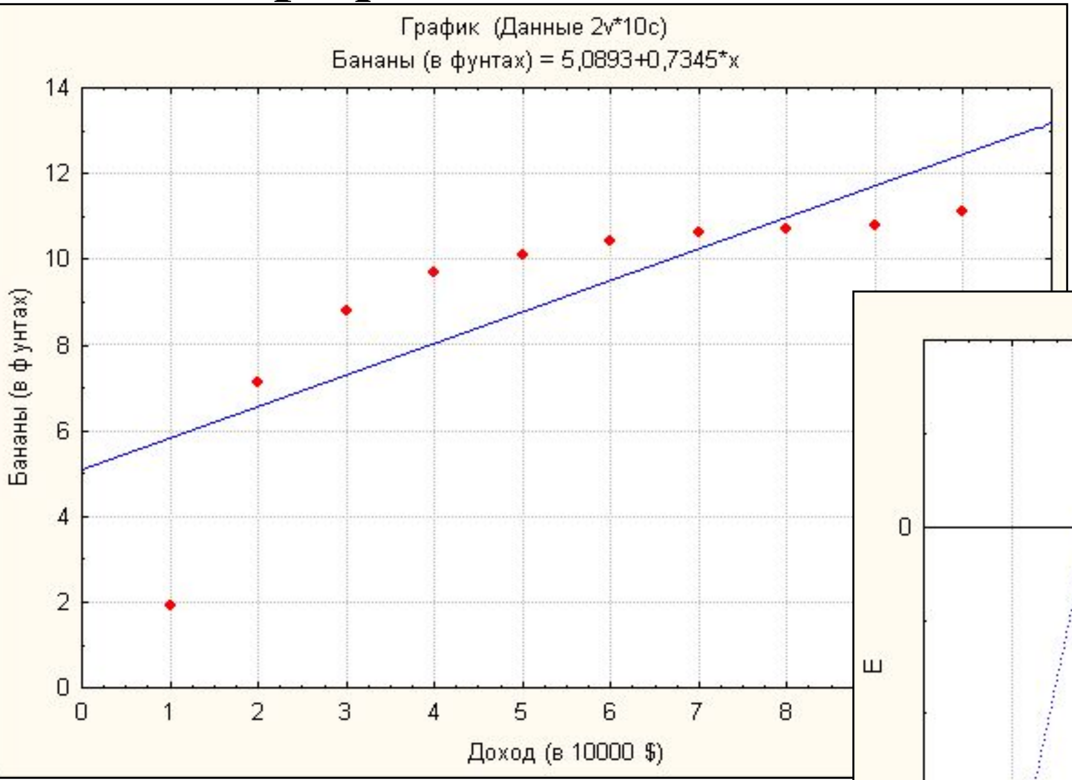
Автокорреляция первого порядка

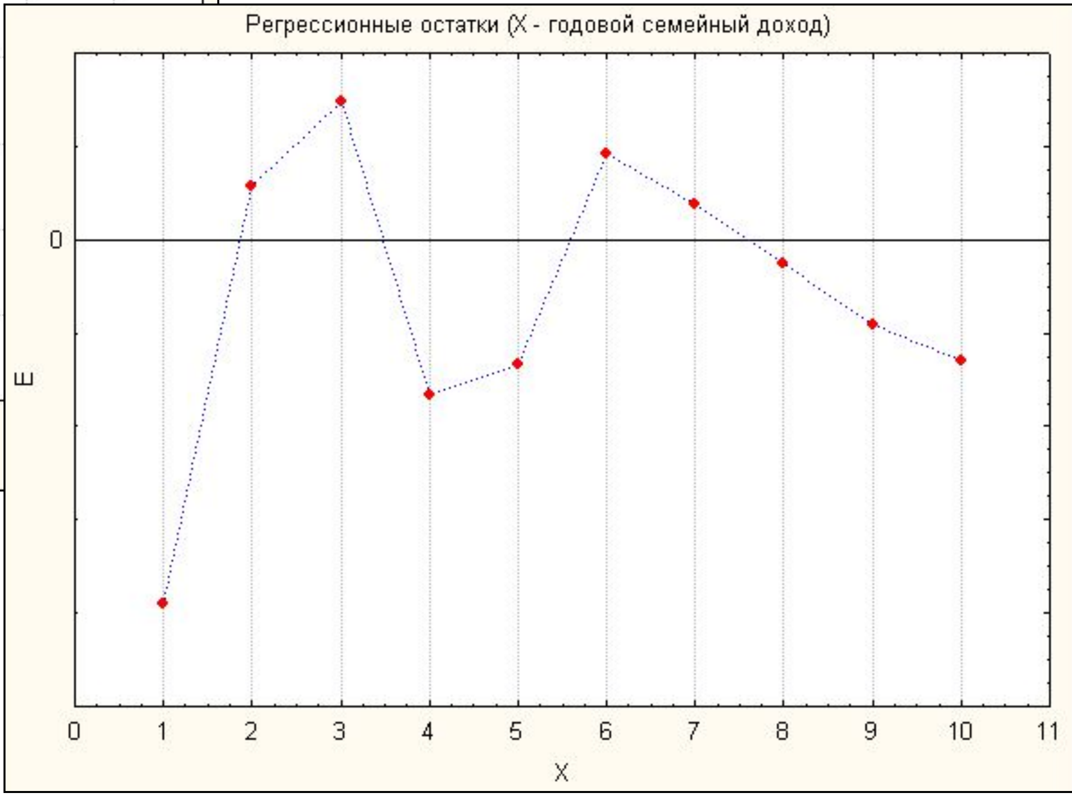
$$\Sigma_\varepsilon = \frac{\sigma_0^2}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_0^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1-\rho^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обнаружение автокорреляции

1. Графический анализ статистической информации





Обнаружение автокорреляции

2. Статистика Дарбина-Уотсона

H_0: $\rho = 0$ (нет явления автокорреляции)

H_1: $\rho \neq 0$ (есть явление автокорреляции)

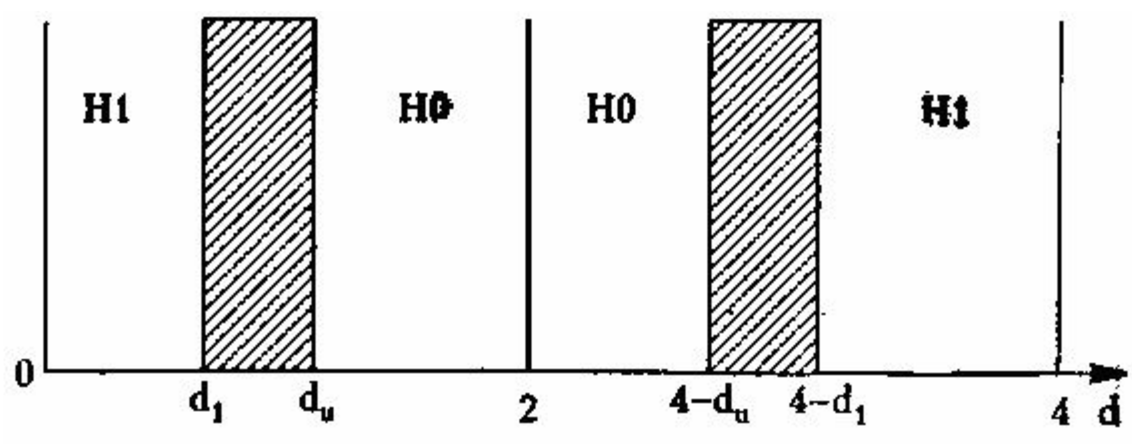
$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n-1} e_i^2}.$$

Так как

$$\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2 = \sum_{i=2}^{n}(e_i^2 - 2e_i e_{i-1} + e_{i-1}^2) = \sum_{i=2}^{n} e_i^2 - 2\sum_{i=2}^{n} e_i e_{i-1} + \sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2 \approx 2\sum_{i=2}^{n} e_i^2 - 2\sum_{i-2}^{n}$$

$$DW = \frac{2\left(\sum e_i^2 - \sum e_i e_{i-1}\right)}{\sum e_i^2} = 2\left(1 - r_{e_i e_{i-1}}\right)$$

1. $d_{в} < DW < 4 - d_{в}$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции принимается.
2. $d_{н} < DW < d_{в}$ или $4 - d_{в} < DW < 4 - d_{н}$, область неопределенности критерия (вопрос об отвержении или принятии гипотезы остается открытым).
3. $0 < DW < d_{н}$, то принимается альтернативная гипотеза о положительной автокорреляции.
4. $4 - d_{н} < DW < 4$, то принимается альтернативная гипотеза об отрицательной автокорреляции.



Пример исследования регрессионных остатков на автокорреляции

На основе наблюдений по десяти семьям требуется исследовать зависимость между ежегодным потреблением бананов и годовым семейным доходом.

Результативный признак:

Y – Потребление бананов в год (в фунтах)

Факторный признак:

X – Семейный доход (в 10000 $)

Исходные данные

	1 Бананы (в фунтах)	2 Доход (в 10000 $)
1	1,93	1
2	7,13	2
3	8,78	3
4	9,69	4
5	10,09	5
6	10,42	6
7	10,62	7
8	10,71	8
9	10,79	9
10	11,13	10

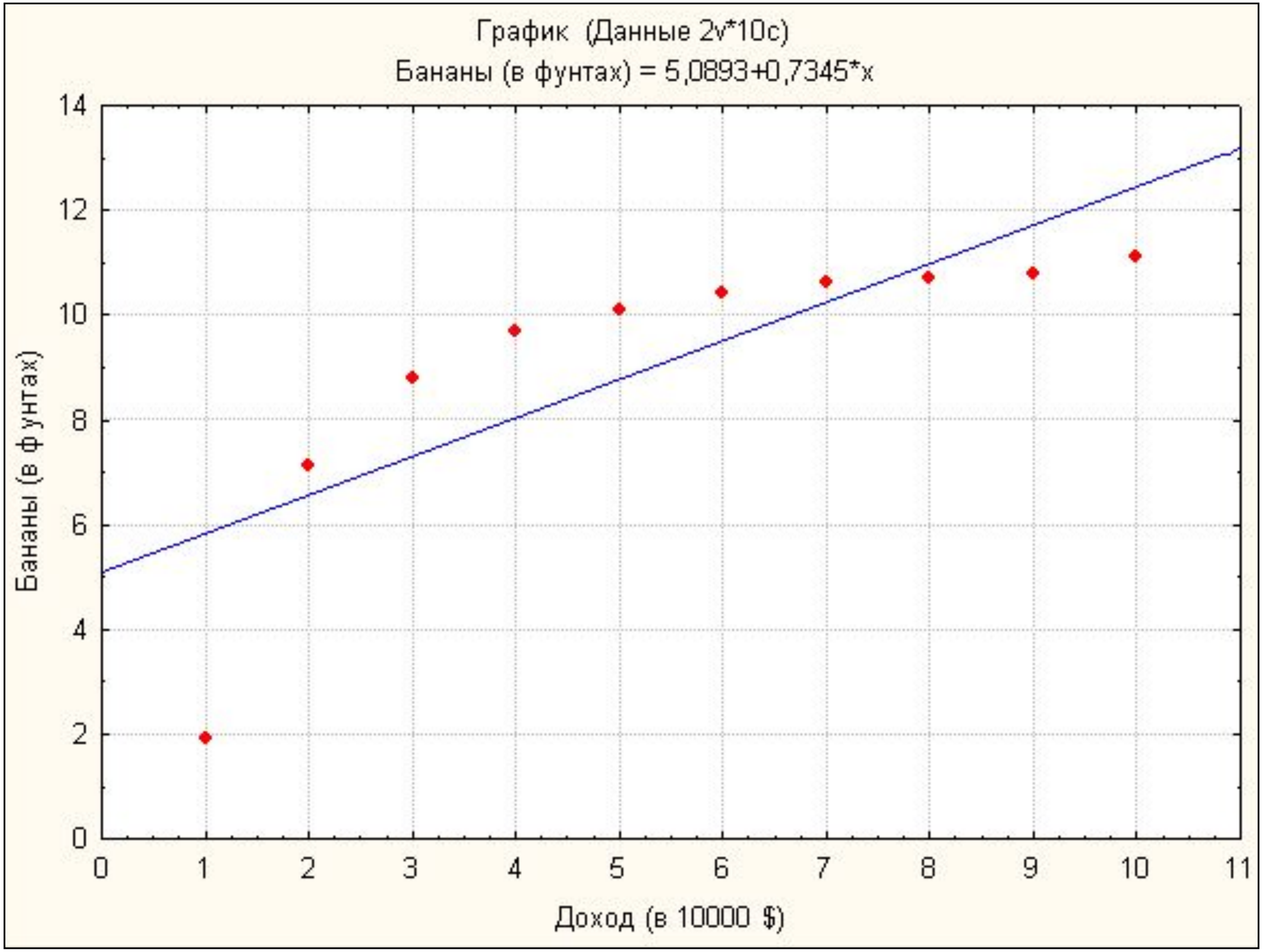
Оценка функции регрессии

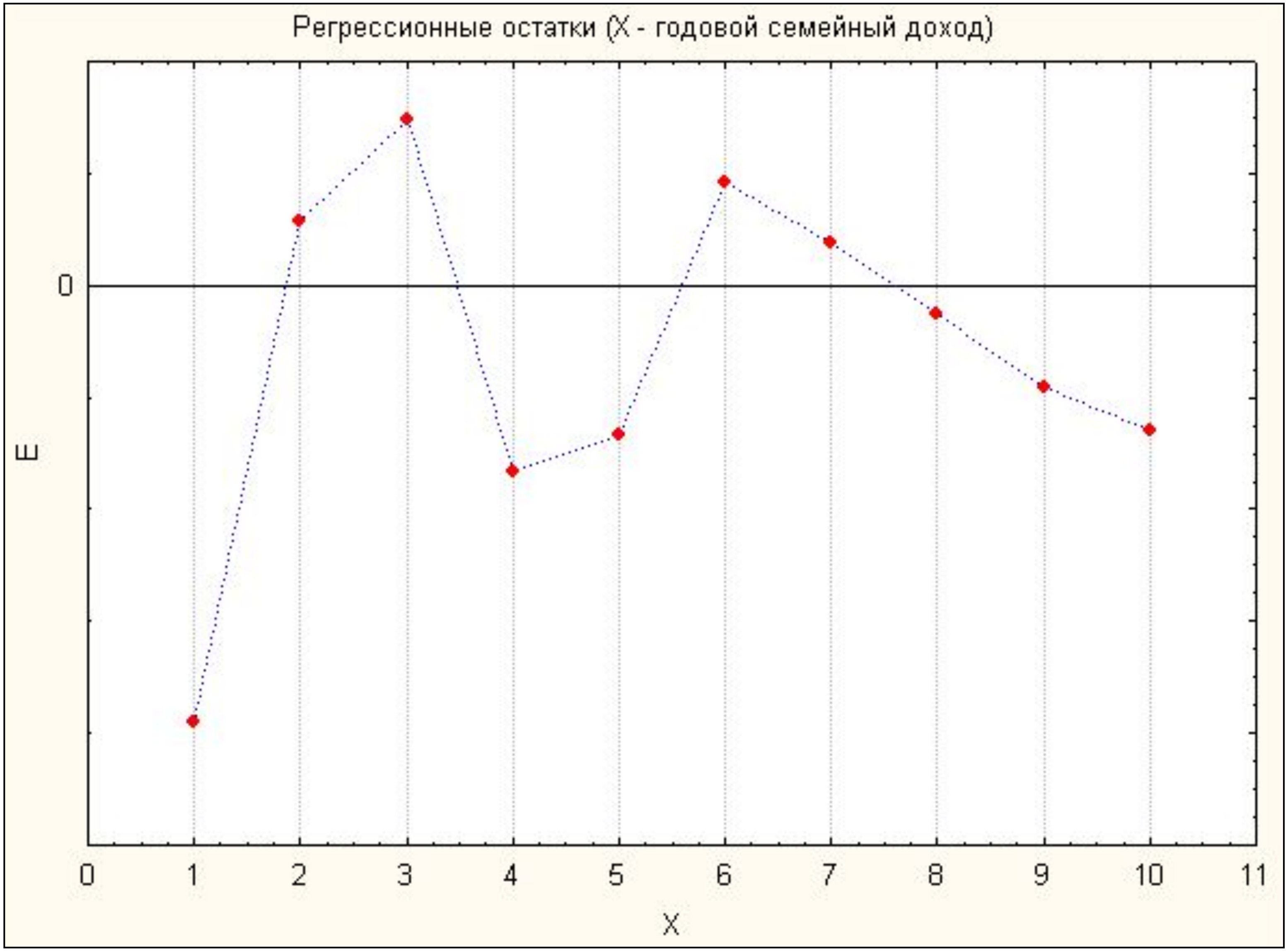
N=10	Regression Summary for Dependent Variable: Бананы (в фунт R= ,79547676 R?= ,63278328 Adjusted R?= ,58688119 F(1,8)=13,786 p<,00593 Std.Error of estimate: 1,7968					
	Beta	Std.Err. of Beta	B	Std.Err. of B	t(8)	p-level
Intercept			5,089333	1,227445	4,146283	0,003225
Доход (в 10000 $)	0,795477	0,214248	0,734485	0,197821	3,712883	0,005932

$$\hat{y} = \underset{(1,23)}{5,089} + \underset{(0.198)}{0,734} \cdot x \qquad \hat{R}^2 = 0,637$$

$$F_{набл} = 13,786 \qquad F_{kp}(0,05;1;8) = 5,317$$

График разброса наблюдённых значений относительно линии регрессии




Регрессионные остатки (X - годовой семейный доход)
0
E
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
X

Вычисление статистики Дарбина-Уотсона

$$D = \frac{\sum_{i=2}^{N}\left(e_i - e_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}$$

	Durbin-Watson d	Serial Corr.
Estimate	0,866133	0,257442

$$D_{набл} = 0{,}866$$

$$D_L = 1{,}08$$

$$D_U = 1{,}36$$

Рекламная пауза

Контрольная работа

- У группы Р06-201 – 30 марта
- У группы Р06-203-204 – 25 марта
- У группы Р06-205 – 6 апреля
- У группы Р06-206 – 30 марта

Дополнительные тесты
Тест серий (Runs test [Geary test])

Серия – последовательность подряд идущих регрессионных остатков одного знака (даже единичной длины). Длина серии – количество элементов серии. Количество серий являтся случайной величиной со своим математическим ожиданием (средним числом серий) и дисперсией.

При **отрицательной автокорреляции** количество серий будет велико, а при **положительной** – слишком мало.

Тест серий

Определяем:

K - количество серий

N^{+} - количество неотрицательных остатков (суммарная длина положительных серий)

N^{-} - количество отрицательных остатков (суммарная длина отрицательных серий)

N - всего объем выборки, $N = N^{+} + N^{-}$

Выдвигаем нулевую гипотезу H_0 : нет автокорреляции первого порядка. H_1 : есть автокорреляция первого порядка.

Для проверки гипотезы используется статистика, которая в условиях справедливости H_0 имеет асимптотическое нормальное распределение:

$$= \frac{K - \dfrac{2 \cdot N^{+} \cdot N^{-} + N}{N}}{\sqrt{\dfrac{2 \cdot N^{+} \cdot N^{-} \cdot \left(2 \cdot N^{+} \cdot N^{-} - N\right)}{N^{2} \cdot (N-1)}}} \in N(0;1)$$

Для уровня значимости 0,05

Анализируем U

U<-1.96
положительная автокорреляция

-1.96<U<1.96
нет автокорреляции

U>1.96
отрицательная автокорреляция

Тест серий (пример реализации)

Microsoft Excel - practice 3 auto

	A	B	C	D	E
1	Year	M -объем импорта	VNP	d	e
2	1960	23,2	506	0	15,6642
3	1961	23,1	523,3	0	13,3891
4	1962	25,2	563,8	0	10,3972
5	1963	26,4	594,7	0	7,7123
6	1964	28,4	635,7	0	4,5575
7	1965	32	688,1	0	1,5694
8	1966	37,7	753	0	-0,8902
9	1967	40,6	796,3	0	-3,4342
10	1968	47,7	868,5	0	-5,4117
11	1969	52,9	935,5	0	-8,6353
12	1970	58,5	982,4	0	-8,9319
13	1971	64	1063,4	0	-13,6158
14	1972	75,9	1171,1	0	-15,2565
15	1973	94,4	1306,6	0	-13,7924
16	1974	131,9	1424,9	1	0,0000
17	1975	126,9	1528,1	0	-9,1408
18	1976	155,4	1702,2	0	-2,5298
19	1977	185,8	1899,5	0	3,0643
20	1978	217,5	2127,6	0	6,0861
21	1979	260,9	2368,5	0	19,1986
22					
23					
24			Всего	N	20,0000
25			число серий	K	5
26				N+	10
27				N-	10
28			mat o		11
29			disp		4,736842
30					
31			U		-2,75681

6

8

1

2

3

! Число серий K=5 значительно меньше среднего числа серий =11

$$\frac{2\cdot N^{+}\cdot N^{-}+N}{N}$$

$$\frac{2\cdot N^{+}\cdot N^{-}\cdot\left(2\cdot N^{+}\cdot N^{-}-N\right)}{N^{2}\cdot(N-1)}$$

U<-1.96 – положительная автокорреляция

Дополнительные тесты
Общий тест Бройша-Годфри

Этот тест следует использовать для определения максимального порядка лага в авторегрессионной схеме остатков.

Исходная модель имеет вид: $Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{i,j} + \varepsilon_i$

Относительно регрессионных остатков предполагается, что $\varepsilon_i = \rho_1 \varepsilon_{i-1} + \rho_2 \varepsilon_{i-2} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{i-p} + \delta_i$, $\delta_t \sim iid\ N(0;\sigma^2)$.

Нас будет интересовать проверка гипотезы об одновременном равенстве нулю всех $\rho_1, \ldots, \rho_P$ - тогда автокорреляция отсутствует

Общий тест Бройша-Годфри

Шаг 1 Находим МНК-оценки исходной модели, оценки регрессионных остатков и Qost1

Шаг 2 Оцениваем регрессию

$$e_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot X_{i,j} + \sum_{l=1}^{p} \beta_l \cdot e_{i,l} + \delta_i, \quad \delta_t \sim iid\ N(0;\sigma^2)$$

Находим оценку R^2 и Qost2

Тест множителей Лагранжа (LM-тест)

Делаем выводы

Шаг 3а Используем статистику

$$F = \frac{Qost1 - Qost2 \big/ p}{Qost2 \big/ n-(k+1)-p} \qquad p \cdot F \sim \chi^2_p$$

Шаг 3б Используем статистику

$$(n-p) \cdot \hat{R}^2 \sim \chi^2_p$$

Методы устранения автокорреляции

Процедура Кохрейна-Оркатта

1. МНК оцениваются коэффициенты $\bar{b}^{(1)}$ регрессионной модели $Y = X\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}$;
2. Рассчитываются регрессионные остатки первой итерации: $e_i^{(1)} = y_i - \hat{y}_i^{(1)}$, где

$$\hat{y}_i^{(1)} = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} x_{i1} + \ldots + b_k^{(1)} x_{ik};$$

Методы устранения автокорреляции

Процедура Кохрейна-Оркатта

3. Первое приближение $r^{(1)}$ оценки неизвестного параметра ρ определяется с помощью МНК-оценки коэффициента регрессии ρ в модели $e_i^{(1)} = \rho e_{i-1}^{(1)} + \delta_i^{(1)}$

$$\hat{\rho}^{(1)} = \left(\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_{n-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_{n-1} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_{n-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=2}^{n} e_i \cdot e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} e_i^2}$$

Методы устранения автокорреляции

Процедура Кохрейна-Оркатта

4. Вычисляются ОМНК-оценки $\bar{b}_{ОМНК}(r^{(1)}) = \bar{b}^{(2)}$

$\bar{b}_{ОМНК} = (X^T \Sigma_0^{-1} X)^{-1} (X^T \Sigma_0^{-1} Y)$, с матрицей

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Σ_0

в которой вместо ρ подставлены $r^{(1)}$

Методы устранения автокорреляции

Процедура Кохрейна-Оркатта

5. Рассчитываются регрессионные остатки второй итерации: $e_i^{(2)} = y_i - \hat{y}_i^{(2)}$, где $\hat{y}_i^{(2)} = b_0^{(2)} + b_1^{(2)} x_{i1} + \ldots + b_k^{(2)} x_{ik}$ и т.д.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность (пока r не стабилизируются), а именно пока разность между предыдущей и последующей оценками параметра ρ не станет меньше любого наперед заданного числа.

Методы устранения автокорреляции

Процедура Кохрейна-Оркатта

1) находим оценку модели регрессии: $\hat{Y} = X\hat{\beta}_{мнк}$;

2) используя построенную оценку модели регрессии, находим оценку вектора регрессионных остатков:

$$e \equiv \hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}_{мнк}$$

3) находим оценку неизвестного параметра ρ из оценки модели с автокоррелированными остатками:

$$e_i = \rho e_{i-1} + \delta_i, \quad i = 2,3,\ldots n$$

$$\hat{\rho}^{(1)} = \left(\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_{n-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_{n-1} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_{n-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=2}^{n} e_i \cdot e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} e_i^2}$$

4) Определяем $\hat{\Sigma}^{(1)}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}^{(1)} & \hat{\rho}^{(1)2} & \ldots & \hat{\rho}^{(1)n-1} \\ \hat{\rho}^{(1)} & 1 & \hat{\rho}^{(1)} & \ldots & \hat{\rho}^{(1)n-2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \hat{\rho}^{(1)n-1} & \hat{\rho}^{(1)n-2} & & \ldots & 1 \end{pmatrix}$

5) Находим оценку $\hat{\beta}_{омнк} = \left(X^T(\hat{\Sigma}_0^{(1)})^{-1}X\right)^{-1}X^T(\hat{\Sigma}_0^{(1)})^{-1}Y$.

Используя вектор $\hat{\beta}_{омнк}$, находим оценку $e^{(1)} = Y - \hat{Y}^{(1)} = Y - X\hat{\beta}_{омнк}$

Далее рассчитывается второе приближение и т.д., пока два соседних приближения ρ не совпадут с определенной степенью точности.

Точечный прогноз для условного среднего и индивидуального значений результативного признака

$$\hat{y}_{n+1} = \overline{X}_{n+1}^{T} \hat{b}_{омнк} + \hat{\rho} e_n$$

- При работе с пространственной статистической информацией, наличие автокоррелированных регрессионных остатков, как правило, обусловлено неправильной спецификацией модели.
- Поэтому в некоторых практических задачах методом устранения автокорреляции является изменение спецификации (вида функции) регрессионной модели

Изменение спецификации модели как метод устранения автокорреляции

Построим функцию регрессии в следующей форме

$$\tilde{y} = b_0 + \frac{b_1}{x}$$

N=10	Regression Summary for Dependent Variable: Бананы (в фунта R= ,99943601 R?= ,99887233 Adjusted R?= ,99873138 F(1,8)=7086,3 p<,00000 Std.Error of estimate: ,09957					
	Beta	Std.Err. of Beta	B	Std.Err. of B	t(8)	p-level
Intercept			12,0805	0,047124	256,3530	0,000000
Доход (в 10000 $)	-0,999436	0,011873	-10,0768	0,119705	-84,1801	0,000000

$$\hat{y} = \underset{(0,05)}{12,08} - \underset{(0.12)}{10,08} \cdot z \qquad \hat{R}^2 = 0,998$$

$$z_i = \frac{1}{x_i}$$