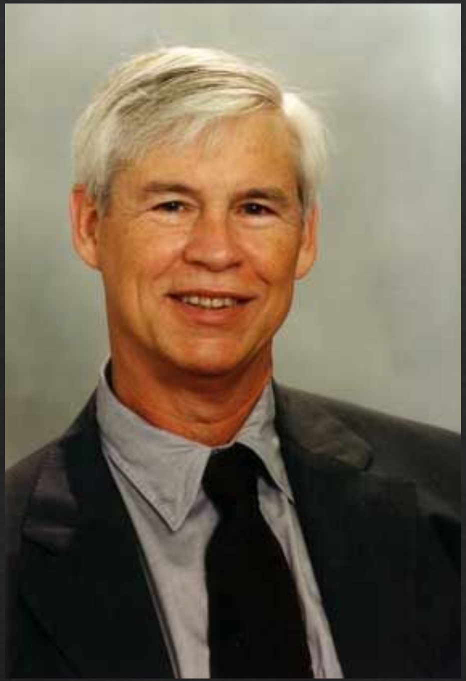
ARCH – модель та її практичне застосування в економіці

Зміст

Історія виникнення ARCH – моделі



- ARCH – модель була розроблена американським економістом Робертом Енґлом у 1932 році.
- Енґл запропонував використовувати у моделі умовну дисперсію, яка залежить від часу.
- У 1986 році датський економіст Тім Боллерслев створив узагальнений тип цієї моделі – GARCH - модель

Загальне поняття моделі

Авторегресивна умовно гетероскедастична модель (англ. Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model, ARCH) – це модель, яка використовується у випадках коли є підстави вважати, що на кожному відрізку часу, дисперсія часового ряду залежить від різних параметрів і не є константою.

ARCH як модель часового ряду

ARCH – це модель часового ряду, у враховуються зміни дисперсій і коваріацій, тобто вона є моделлю волотильності.

ARCH моделює волотильність у вигляді суми константної базової волотильності і лінійної функції абсолютних значень кількох останніх змін факторів

Особливості побудови ARCH – моделі

- Нехай, залишки часового ряду можна представити у вигляді:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \gamma + \lambda y_{t-1}^2$$
$$\varepsilon_t \sim N(0; 1)$$

Представлена модель має назву ***ARCH(1) – процес***.

ARCH(1) - процес характеризується інерційністю умовної дисперсії (кластерізацією волотильності).

- ARCH(1) – процес не автокорельован:

$$M(x_n; x_{n-j}) = M\left(M(x_n x_{n-j} | x_{n-1} x_{n-2} \ldots)\right) = M\left(x_{n-j} M(x_n | x_{n-1} x_{n-2})\right) = 0$$

Оскільки, процес має постійне (нульове) математичне сподівання і не підпорядковується явищу автокореляції, він є слабо стаціонарним у випадку, коли у нього є постійна дисперсія.

Еквівалентний запис ARCH(1) - процесу

$$\boxed{y_t^2 = \sigma_t^2 + (y_t^2 - \sigma_t^2) = \gamma + \lambda y_{t-1}^2 + \eta_t}$$

де $\eta_t = \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1)$

Якщо $M(\eta_t) = 0$ і процес $\{\eta_t\}$ не автокорельован, тоді квадрати ARCH(1) – процесу підпорядковуються ***процесу авторегресії p – го порядку AR(p)***.

Властивості ARCH(1) - процесу

- Знайдемо основні моменти для ARCH(1) – процесу:

1. $M(y_t) = M(\sigma_t \varepsilon_t) = M(\sigma_t)M(\varepsilon_t) = 0.$

2. $M(y_t^2) = M(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2) = M(\sigma_t^2)M(\varepsilon_t^2) = M(\sigma_t^2) = M(\gamma +$

$+ \lambda y_{t-1}^2)$, тоді $M(y_t^2) = \gamma + \lambda M(y_{t-1}^2)$

- Якщо $0 \leq \lambda < 1$, тоді буде існувати стаціонарний режим (при $n \to \infty$):

$$\lim_{n\to\infty} M(y_n^2) = \lim_{n\to\infty} M(y_{n-1}^2) = M(\mathrm{y}^2)$$

Отже, використовуючи цю рівність отримаємо:

$$\boxed{M(y^2) = \frac{\gamma}{1-\lambda}}$$

3. $M(y_t^4) = M(\sigma_t^4 \varepsilon_t^4) = M(\sigma_t^4) M(\varepsilon_t^4) =$
$M(\varepsilon_t^4) M\left((\gamma + \lambda y_{t-1}^2)^2\right) = M(\varepsilon_t^4) M(\gamma^2 +$
$+ 2\lambda\gamma y_{t-1}^2 + \lambda^2 y_{t-1}^4)$

Оскільки, $\varepsilon_t \sim N(0; 1)$ тоді: $M(\varepsilon_t^4) = 3.$

$$M(y_t^4) = 3M(\gamma^2 + 2\lambda\gamma y_{t-1}^2 + \lambda^2 y_{t-1}^4)$$

Якщо $3\lambda^2 < 1$, тоді:

$$\lim_{n\to\infty} M(y_t^4) = M(x^4)$$

За допомогою останньої рівності отримаємо:

$$M(y^4) = 3\gamma^2 + 6\lambda\gamma y_{t-1}^2 + 3\lambda^2 y_{t-1}^4$$

$$M(y^4) = \frac{3\gamma^2 + 6\gamma\lambda\frac{\gamma}{1-\lambda}}{1-3\lambda^2} = \frac{3\gamma^2(1+\lambda)}{(1-\lambda)(1-3\lambda^2)}$$

Коефіцієнт ексцесу ARCH(1) – процесу дорівнює:

$$\boxed{Es = \frac{M(y_t^4)}{\left(M(y_t^2)\right)^2} - 3}$$

Якщо $n \to \infty$, тоді:

$$\boxed{Es = \frac{6\lambda^2}{1 - 3\lambda^2}}$$

При умові $3\lambda^2 \geq 1$, тоді $Es \to \infty$. (Ця властивість ARCH - процесів характерна для фінансових часових рядів)

- Тепер знайдемо кореляційну залежність між величинами y_t та y_{t+k}:

$$D(y_t^2) = M(y_t^4) - M\left((y_t^2)^2\right) = \frac{2}{1-3\lambda^2}\left(\frac{\gamma}{1-\lambda}\right)^2$$

$$M(y_t^2 y_{t-1}^2) = M(\varepsilon_t^2(\gamma + \lambda y_{t-1}^2) y_{t-1}^2) =$$
$$= M(\varepsilon_t^2)\left(\gamma M(y_{t-1}^2) + \lambda M(y_{t-1}^4)\right) = \frac{1+3\lambda}{1-3\lambda^2} * \frac{\gamma^2}{1-\lambda}$$

$$cov(y_t^2 y_{t-1}^2) = M(y_t^2 y_{t-1}^2) - M(y_t^2)M(y_{t-1}^2)$$

$$= \frac{2\lambda}{1-3\lambda^2} * \left(\frac{\gamma^2}{1-\lambda}\right)^2$$

$$\rho(y_t^2 y_{t-1}^2) = \frac{cov(y_t^2 y_{t-1}^2)}{\sqrt{D(y_t^2)D(y_t^2)}} = \lambda$$

- Якщо $k < n$, тоді:

$$M\left(y_t^2 y_{t-k}^2\right) = M(\varepsilon_t^2)M\left((\gamma + \lambda y_{t-1}^2)y_{t-k}^2\right) = \gamma M\left(y_{t-k}^2\right) + \lambda M(y_{t-1}^2 y_{t-k}^2)$$

Для величин $m_k = M(y_t^2 y_{t-k}^2)$, виконується наступне співвідношення:

$$m_k = \frac{\gamma^2}{1-\lambda} + \lambda m_{k-1}$$

◈Підставивши останнє співвідношення до розрахунку коваріації отримаємо:

$$cov\left(y_t^2 y_{t-k}^2\right) = \frac{\gamma^2}{1-\lambda} - \frac{\gamma^2}{(1-\lambda)^2} + \lambda m_k$$

$$= \frac{\gamma^2}{1-\lambda} - \frac{\gamma^2}{(1-\lambda)^2} + \lambda\left(m_{k-1} - \frac{\gamma^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{\gamma^2}{(1-\lambda)^2}\right)$$

$$= \lambda * cov\left(y_t^2 y_{t-k-1}^2\right) + \frac{\gamma^2}{1-\lambda} - \frac{\gamma^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{\gamma^2\lambda}{(1-\lambda)^2}$$

$$= \lambda * cov\left(y_t^2 y_{t-k+1}^2\right)$$

- При стаціонарному процесі коваріація дорівнює:

$$\boxed{\rho_k = \rho\left(y_t^2 y_{t-k}^2\right) = \lambda \rho_{k-1} = \lambda^k}$$

Оцінювання коефіцієнтів ARCH - моделі

При знаходженні коефіцієнтів ARCH - моделі за допомогою методу найменших квадратів (МНК) отримуються неефективні оцінки. Тому для визначення коефіцієнтів використовується метод максимальної правдоподібності (ММП).

Метод максимальної правдоподібності (ММП)

- Метод максимальної правдоподібності - метод оцінювання параметрів розподілу, заснований на максимізації функції правдоподібності (щільності ймовірності спостережень при значеннях, які складають вибірку).
- Оцінка максимальної правдоподібності дає унікальний і простий спосіб визначити рішення у разі нормального розподілу.

Оцінка параметрів моделі методом максимальної правдоподібності.

- 1. Щільність ймовірностей спостережень.

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right)}$$

2. Функція правдоподібності.

$$\boxed{L = \prod_{t=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right)}$$

3. Логарифмічна функція правдоподібності.

$$\boxed{\begin{aligned}\ln L = -\frac{t}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\ln\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\left(\frac{y_t}{2\sigma_t}\right)^2 = \\ = -\frac{t}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\left(t\left(\gamma + \lambda y_{t-1}^2 + \frac{y_t^2}{\gamma + \lambda y_{t-1}^2}\right)\right)\end{aligned}}$$

- Щоб знайти максимум функції правдоподібності, прирівнюємо до нуля частинні похідні по параметрам γ та λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = \dfrac{1}{2} * \displaystyle\sum_{t=1}^{N} \left(\dfrac{y_t^2}{(\gamma + \lambda y_{t-1}^2)^2} - \dfrac{1}{\gamma + \lambda y_{t-1}^2} \right) = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{2} * \displaystyle\sum_{t=1}^{N} \left(\dfrac{y_t^2 y_{t-1}^2}{(\gamma + \lambda y_{t-1}^2)^2} - \dfrac{y_{t-1}^2}{\gamma + \lambda y_{t-1}^2} \right) = 0 \end{cases}$$

Розв’язок системи рівнянь правдоподібності виконується за допомогою чисельних методів у спеціалізованих програмних оболонках.

Ідентифікація ARCH - процесу

- Для ідентифікації ARCH – процесу використовується статистика виду:

$$\boxed{\chi^2_{pr} = nR^2} \quad \boxed{\chi^2_{teor} = \chi^2(\alpha; k)}$$

де n – обсяг вибірки, R^2 - коефіцієнт детермінації моделі, α – рівень значущості, k – число лагових змінних в моделі.

Якщо $\chi^2_{teor} < \chi^2_{pr}$, тоді гіпотеза про відсутність ARCH – процесу не приймається.

Якщо $\chi^2_{teor} \geq \chi^2_{pr}$, тоді гіпотеза про відсутність ARCH – процесу приймається.

Практичне використання ARCH - моделі в економіці

ARCH – моделі використовуються для моделювання нестабільних ситуацій на фінансових ринках і високою мінливістю значень різних показників (курсів валют, акцій, біржових індексів і т.п.), тобто у таких ситуаціях коли має місце явище гетероскедастичності.

Висновки

ARCH – модель є важливою нелінійною моделлю часового ряду, на основі якої можна будувати нові моделі, які призначенні для аналізу відповідних часових рядів. Також, ця модель використовується для подальшого економічного прогнозування.

Список використаних джерел

1. Greene W.H. Econometric analysis.- N. Y.: Macmillan, 2012.
2. Maddala G.S. Introduction to Econometrics.- N. Y.: Macmillan, 2013.
3. Handbook of Econometrics Amsterdam: North Holland 2012.
4. Goldberger A. *A Course in Econometrics.* Cambridge, MA: Harvard University, Press, 2012.
5. Kennedy P. *A Guide to Econometrics,* third edition. M.I.T. Press: Cambridge, MA, 2013.
6. Damodar N. Gujarati, Basic Econometrics. McGrow - Hill, 2012.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!