3. Модели оптимизации производства и потребления

3.1 Аналитическое решение задачи оптимизации производства

Оптимизация производства при отсутствии ограничений

Рассмотрим аналитическое решение задачи оптимизации производства, полагая, что производственный процесс характеризуется нелинейной *производственной функцией* $Y(K, L)$, которая описывает зависимость объема выпуска Y от двух переменных - объема вложенного капитала (K) и вложенного труда (L).

Это может быть, например, неоклассическая производственная функция вида

$$Y(K, L)=AK^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta}$$

(мультипликативная функция).

Задача лица, принимающего решения, состоит в том, чтобы определить значения K и L, максимизирующие прибыль производителя.

Будем считать, что производственная система функционирует в условиях совершенной конкуренции.

Это означает, что цены на товары – факторы производства определяются рыночными условиями и не могут изменяться производителем.

Другими словами цены труда, капитальных ресурсов и продукции являются экзогенными переменными в условии рассматриваемой задачи.

Назовем затратами производства стоимость набора факторов производства. Для определения затрат необходимо знать стоимость единицы труда r и стоимость единицы капитальных ресурсов w.

Стоимость C набора факторов производства, состоящего из K единиц капитала и L единиц труда, находится по формуле

$$C = r \cdot K + w \cdot L.$$

Пусть цена единицы продукта равна p. Доходом или выручкой производителя за некоторый период времени назовем стоимость произведенного продукта $R = p \cdot Y(K, L)$.

Прибыль производителя П равна разности между его доходом *R* и затратами *C*

$$\Pi = R - C = p \cdot Y(K, L) - r \cdot K - w \cdot L.$$

Нахождение оптимального производственного процесса возможно только при выборе критерия оптимальности или цели производственной системы.

В неоклассической экономике полагается, что цель производителя заключается в максимизации прибыли путем наилучшего выбора набора используемых факторов производства.

Чтобы определить, при каких условиях прибыль П является максимальной, найдем экстремум этой функции. Необходимое условие экстремума:

$$\partial Y/\partial K = r$$

$$\partial Y/\partial L = w$$

Данное выражение определяет *оптимальное решение задачи производителя*. Поскольку в левых частях уравнений стоят *предельная фондоотдача* и *предельная производительность*, экономически полученный результат можно интерпретировать так: производитель достигает максимальной прибыли, когда значение *предельного продукта* (увеличения выпуска при увеличении фактора производства на единицу) равно цене на ресурс.

Пример. Пусть некая фирма имеет производственную функцию

$$R(K, L) = pY(K, L) = 100K^{1/2}L^{1/3}.$$

Средняя заработная плата составляет $w = 10^3$ ден. ед. в мес. и период амортизации основных производственных фондов $n = 12$ мес. Требуется рассчитать оптимальный размер производственных фондов и оптимальную численность работников. Затем нужно определить, сколько составит прибыль фирмы при переходе к оптимальным затратам факторов производства

Решение. Цена труда известна, а цена капитала равна 1/12 ден. ед. в месяц – среднемесячные амортизационные отчисления на содержание одной единицы капитала. Продифференцировав Y по капиталу и труду, получаем систему уравнений

$$50K^{-1/2}L^{1/3} = 1/12$$

$$100/3K^{1/2}L^{-2/3} = 10^3,$$

откуда K=144 000 000, L=8000, Y= 24 000 000, П=4 млн. ден.ед.

Если на поведение производителя влияют некие дополнительные внешние факторы, рассмотренную модель всегда можно усложнить, включив в нее описание этого влияния. В качестве примера рассмотрим, как влияет на поведение производителя государственное налогообложение.

Пример. Ответьте, что сильнее влияет на поведение производителя – налог на прибыль или акцизный налог? Оба налога характеризуются ставкой t, для которой выполняется условие $0 < t < 1$.

Решение. Рассмотрим для начала налог на прибыль. Для его расчета прибыли необходимо использовать выражение

$$\Pi' = (1\text{-}t)\,\Pi$$

Условие максимума для Π' совпадает с условием для Π, а значит оптимальные значения K, L и Y останутся прежними.

При введении акцизного налога

$$\Pi' = (1-t)R - C = (1-t)pY(K, L) - rK - wL.$$

Условия экстремума:

$$(1-t)\partial Y/\partial K = r$$

$$(1-t)\partial Y/\partial L = w$$

С учетом того, что у большинства производственных функций первые производные являются положительными убывающими функциями (увеличиваются при уменьшении значения аргумента), можно утверждать, что положение экстремума для прибыли окажется смещенным в сторону меньших затрат труда и капитала.

Оптимизация производства при наличии бюджетного ограничения (метод Лагранжа)

Производитель может столкнуться с ситуацией, когда обеспечить набор факторов производства, соответствующий точке максимума П невозможно, например, в силу того, что ресурсы, доступные для использования в производственном процессе, ограничены, либо в силу особенностей самого производственного процесса (в силу вида производственной функции). В этом случае необходимо осуществить поиск *оптимального решения задачи производителя при наличии ограничений*.

Возможны две постановки задачи оптимизации производственного процесса с ограничениями:

1) максимизация выпуска продукции при заданном уровне затрат;
2) минимизация затрат производства при заданном уровне выпуска продукции.

Обе эти задачи относятся к классу *оптимизационных задач нелинейного программирования*. Ограничения по уровню затрат (или по объему выпуска) определяют область допустимых планов W на которой оптимизируется выбранная целевая функция (выпуск или затраты).

Указанные задачи оптимизации называются *двойственными*, так как при одинаковых условиях дают одно и то же оптимальное решение.

Будем предполагать, что в долгосрочном периоде производитель способен изменять как величину затрачиваемого капитала, так и количество используемого труда.

Поскольку объем производства определяется производственной функцией $Y(K, L)$, которая предполагается известной, то максимальный объем производства при наличии ресурсного ограничения $C = r \cdot K + w \cdot L$ может быть достигнут только за счет оптимального выбора величин K и L.

Бюджетной линией или изокостой назовем множество наборов факторов *(K, L)*, имеющих одинаковую фиксированную *стоимость C*.

Изокоста допускает простую графическую интерпретацию. Если разрешить уравнение $C = r \cdot K + w \cdot L$ относительно объема капитальных затрат K, то мы получим уравнение изокосты

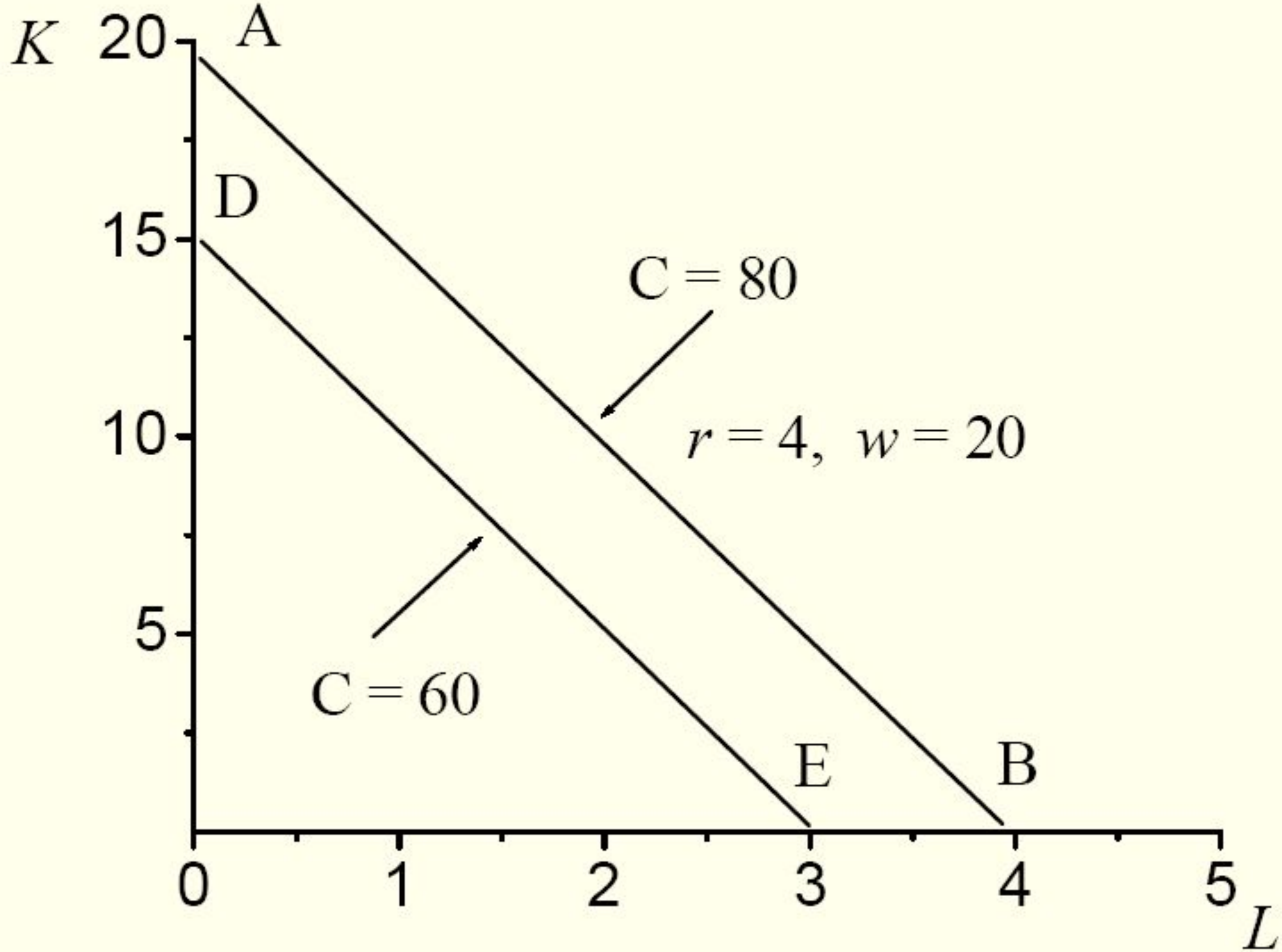
$$K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r} L,$$

которое в координатных осях *K, L* является уравнением прямой линии, отсекая на осях отрезки C/r и C/w, соответственно.

На следующем слайде изображены две линии бюджетного ограничения для значений

$$C = 80 \text{ и } C = 60.$$

Стоимость ресурсов производства для обеих кривых одинакова и равна: r = 4 (стоимость капитальных ресурсов в условных единицах) и w=20 – стоимость трудовых ресурсов (в условных единицах).


K
20
15
10
5
A
D
C = 80
r = 4, w = 20
C = 60
E
B
0
1
2
3
4
5
L

С математической точки зрения задача о стационарном равновесии производителя в долгосрочном периоде требует нахождения набора факторов $K > 0$, $L > 0$, который, с одной стороны, лежит на изокосте $C = r \cdot K + w \cdot L$, а с другой реализует максимум производственной функции $Y(K, L)$:

$$\begin{cases} Y(K, L) \to \max; \\ r \cdot K + w \cdot L = C; \\ K > 0,\ L > 0. \end{cases}$$

Для решения такого рода задач в математике используется метод неопределенных множителей Лагранжа.

Сущность его состоит в том, что этот метод позволяет свести задачу на условный экстремум функции *Y (K, L)* к задаче на безусловный экстремум функции

$$\mathbf{L}(K,L,\lambda)=Y(K,L)+\lambda\cdot(C-r\cdot K-w\cdot L),$$

содержащей дополнительную переменную λ.

Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю частных производных от лагранжиана по независимым переменным :

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial K} - \lambda \cdot r = 0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial L} = \frac{\partial Y}{\partial L} - \lambda \cdot w = 0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda} = C - r \cdot K - w \cdot L = 0.$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными K, L, λ всегда можно найти оптимальный набор факторов производства K, L, который обеспечивает максимальный выпуск продукции.

Дадим экономическую интерпретацию метода неопределенных множителей Лагранжа. Последнее из уравнений просто обеспечивает выполнение бюджетного ограничения и поэтому эффективный набор факторов принадлежит изокосте.

Экономический смысл первых двух уравнений легко получить, если вспомнить определение предельного продукта труда $\mathrm{M}\,Y_L = dY/dL$ и предельного продукта капитала $\mathrm{M}\,Y_K = dY/dK$. Используя понятия предельного продукта, первые два уравнения запишем в виде системы равенств

$$\frac{\mathrm{M}Y_L}{w} = \frac{\mathrm{M}Y_K}{r} = \lambda.$$

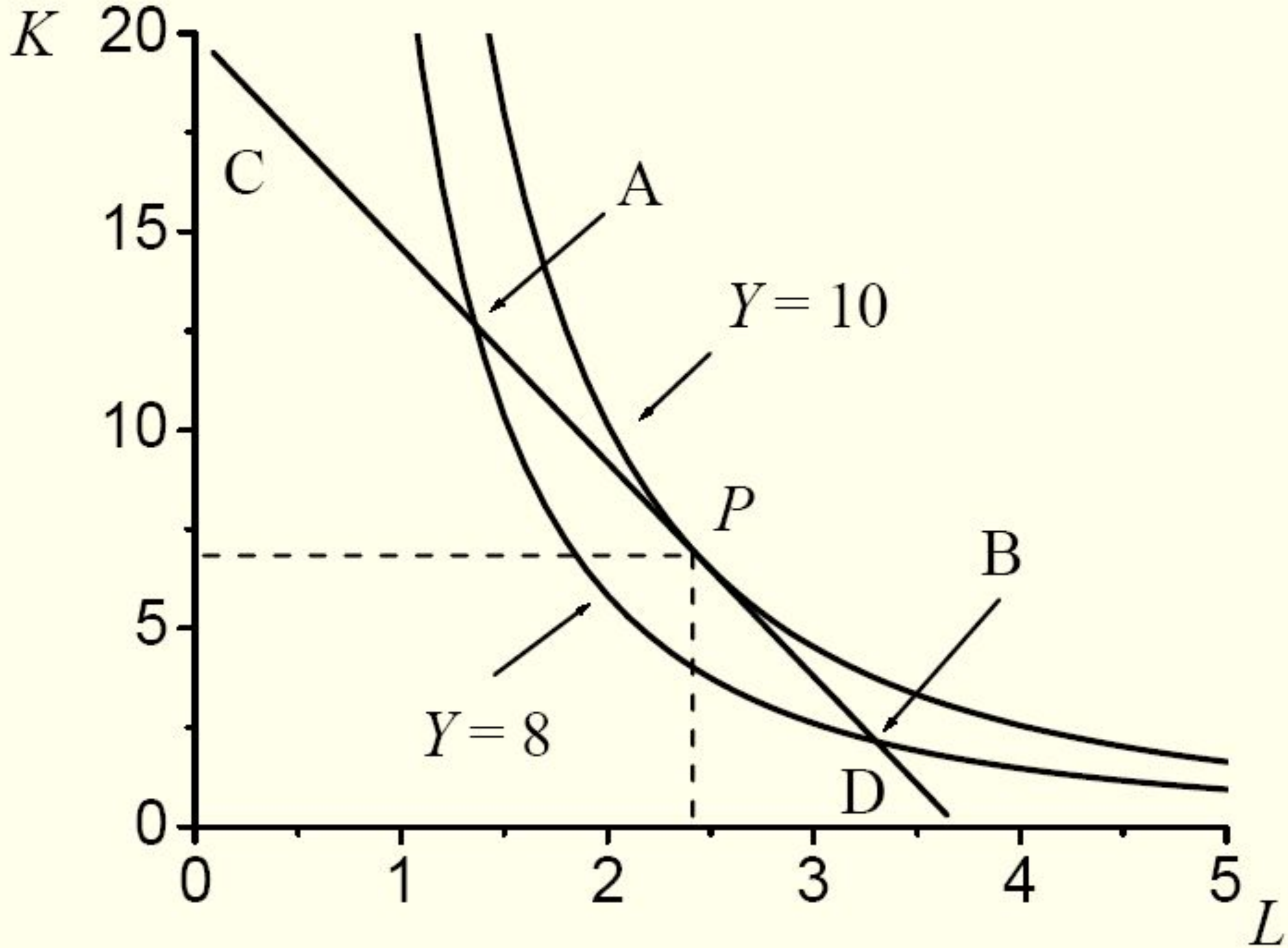
Таким образом, для оптимального набора факторов справедливо равенство отношений предельного продукта фактора к цене фактора.

Отношение предельного продукта фактора к цене единицы фактора (r , например) показывает, какое количество дополнительной продукции будет произведено в случае вложения дополнительной платежной единицы при покупке фактора.

Смысл дополнительной переменной (неопределенного множителя Лагранжа) состоит в том, что он показывает, на сколько единиц продукции увеличится объем производства при вложении дополнительной платежной единицы на приобретение любого из факторов производства.

Из рисунка хорошо видно, при неизменной стоимости ресурсов производства линии бюджетных ограничений, соответствующие разным значениям C, образуют семейство параллельных линий.

Геометрическая интерпретация оптимального набора факторов производства.



Пример 3.1

Объем производства определяется производственной функцией $Y = 5 \cdot K^{0,25} \cdot L^{0,75}$, стоимость единицы капитальных и трудовых ресурсов одинаковы и равны $r = w = 10$, (все величины измеряются в условных единицах). Производство имеет ресурсное ограничение C= 80. Требуется определить, каким должно быть распределение ресурсов, обеспечивающее максимальный выпуск продукции?

Решение

Для решения задачи будем использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Учитывая данные задачи, составим систему уравнений для определения оптимального распределения ресурсов

$$\frac{5}{4} \cdot K^{-0,75} \cdot L^{0,75} = 10 \cdot \lambda;$$

$$\frac{15}{4} \cdot K^{0,25} \cdot L^{-0,25} = 10 \cdot \lambda;$$

$$10 \cdot K + 10 \cdot L - 80 = 0.$$

Поскольку правые части дух первых уравнений системы равны, можно приравнять и их левые части

$$\frac{5}{4}\cdot K^{-0,75}\cdot L^{0,75}=\frac{15}{4}\cdot K^{0,25}\cdot L^{-0,25}.$$

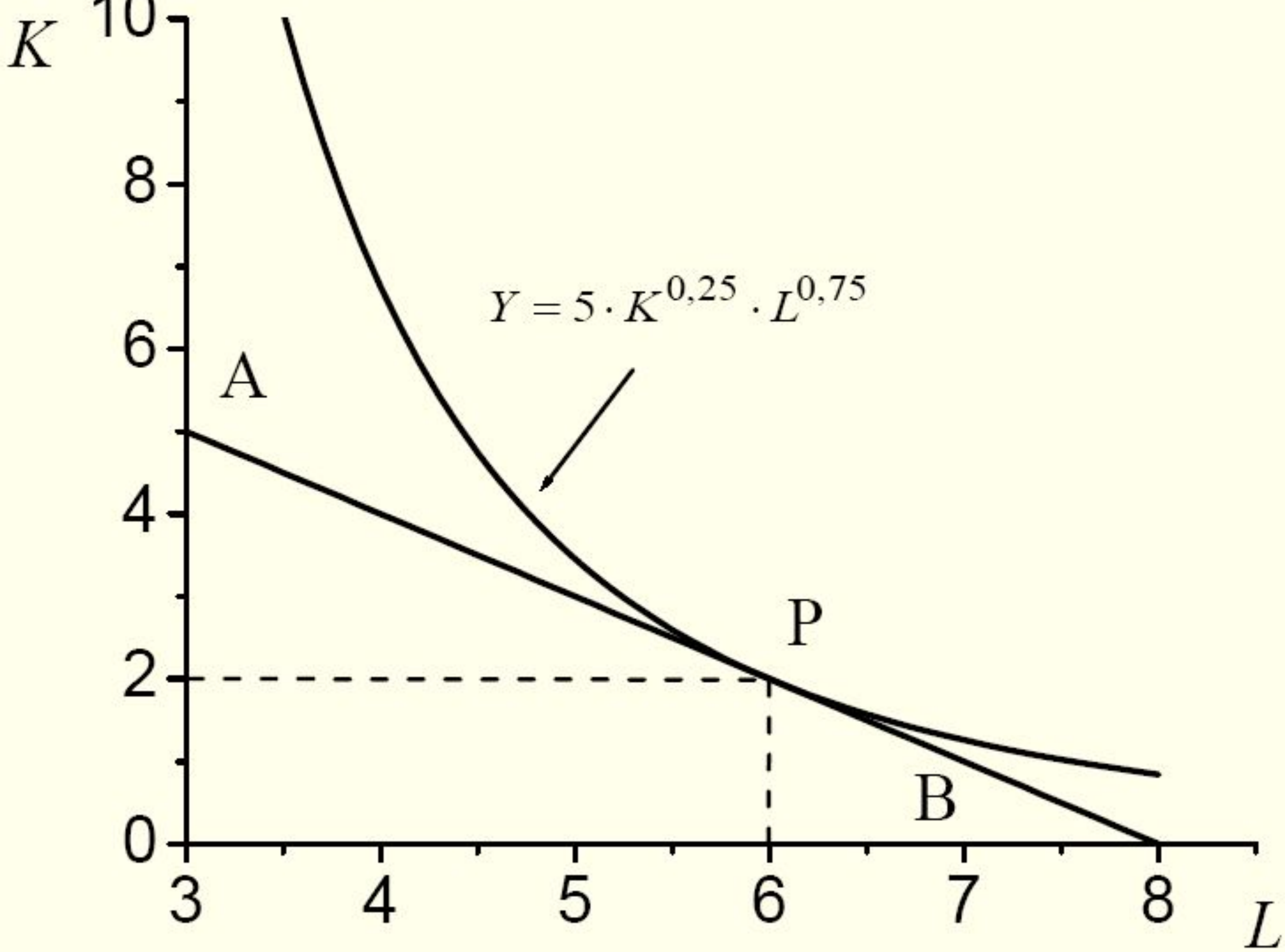
Для дальнейшего упрощения этого уравнения левую и правую части его следует разделить на 5/4 и умножить на произведение $K^{-0,25}\cdot L^{0,25}$

В итоге получаем простое равенство $L = 3\cdot K$. Подставляя этот результат в последнее уравнение системы, находим $K = 2$, $L = 6$.

Множитель Лагранжа можно найти либо из первого, либо из второго уравнения системы . В итоге имеем, λ = 0,285. Смысл этой величины состоит в том, что если выбран оптимальный набор ресурсов производства, то вложение единицы платежных средств в покупку капитальных ресурсов и покупку трудовых ресурсов дает одинаковый прирост производства равный 0,285 единиц.

В принципе, используя метод неопределенных множителей Лагранжа, можно решить любую задачу нелинейного программирования.

Графическое решение задачи



Как уже указывалось, возможна альтернативная постановка задачи, когда требуется при заданном объеме производства минимизировать затраты производителя. Математическая постановка такой задачи может выглядеть следующим образом:

$$r \cdot K + w \cdot L \to \min;$$

$$Y(K, L) = Y_0;$$

$$K > 0, \quad L > 0.$$

Задача минимизации затрат при заданном объеме производства и задача максимизации выпуска при заданном объеме затрат являются двойственными и приводят к одному и тому же оптимальному решению.

Рассмотрим решение задачи минимизации затрат методом неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию Лагранжа

$$\mathbf{L}(K,L,\lambda') = r\cdot K + w\cdot L + \lambda'\cdot(Y_0 - Y(K,L))$$

и запишем необходимые условия экстремума этой функции

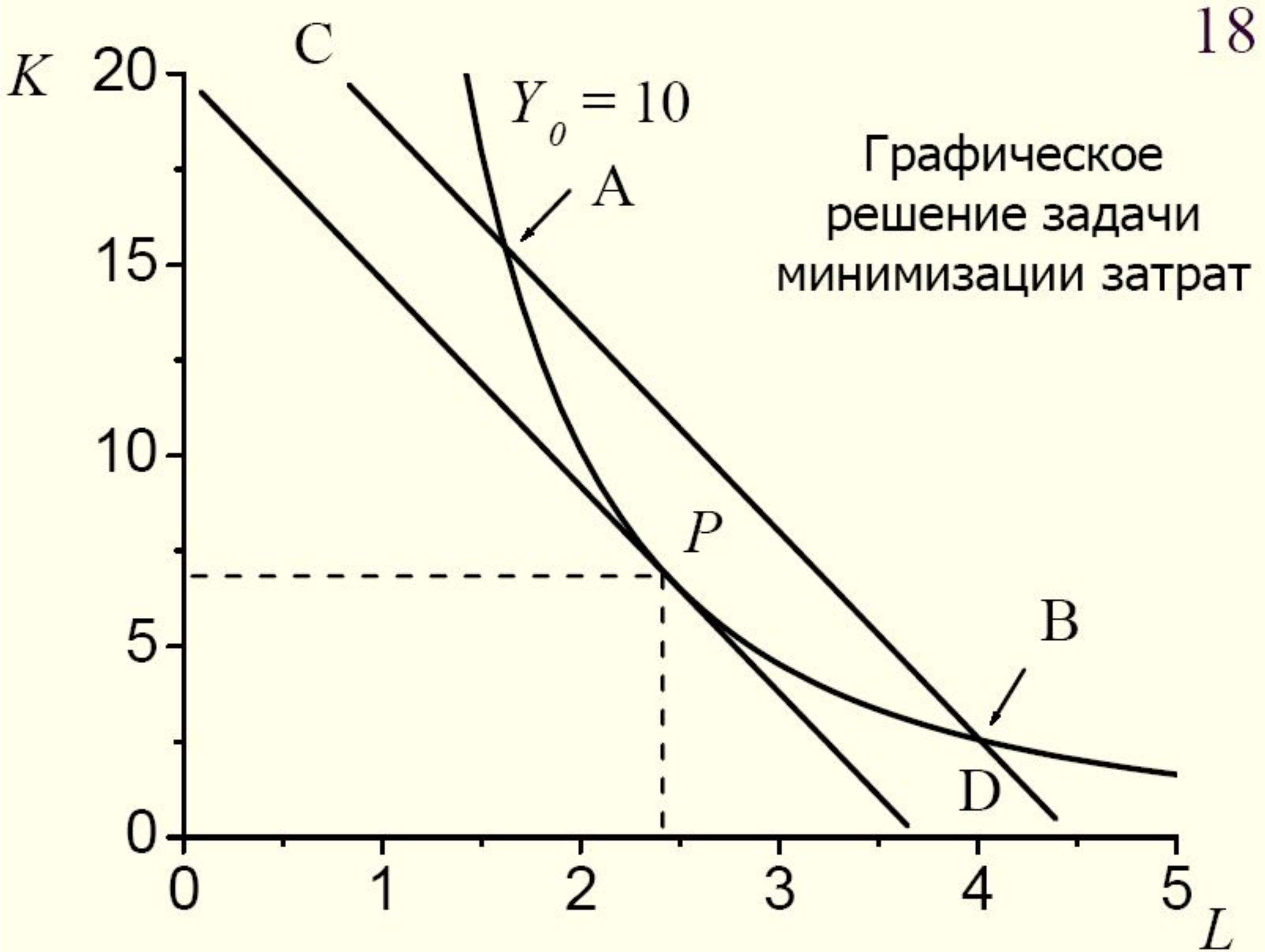
$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial K} = r - \lambda' \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} = 0;$$
$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial L} = w - \lambda' \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} = 0;$$
$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda'} = Y_0 - Y(K, L) = 0.$$

Решение этой системы уравнений при заданных значениях r, w, Y_0 дает оптимальное распределение факторов производства, обеспечивающих заданный объем при минимизации полной стоимости затрат.

Графическое решение задачи минимизации затрат аналогично графическому методу решения задачи максимизации выпуска.

Единственное отличие состоит в том, в этом случае фиксируется кривая изокванты с заданным объемом производства (линия изокванты, задающая объем производства Y_0 =22,795).

Графическое решение задачи приведено на следующем слайде.


K
20
15
10
5
0
C
$Y_0 = 10$
A
P
B
D
0
1
2
3
4
5
L
Графическое
решение задачи
минимизации затрат

Таким образом, мы показали, что графическое решение двойственных задач оптимизации приводит к одинаковому оптимальному решению. Особенности графического решения двойственных задач представлены в таблице

Тип задачи	Изокванта	Изокоста
Максимизация продукта	Смещается вправо	Фиксирована
Минимизация стоимости	Фиксирована	Смещается влево

3.2 Теория личного потребления и задачи оптимизации.

Определение оптимального набора потребительских товаров

Одним из основных элементов экономической теории является *домохозяйство* (потребитель) - группа индивидуумов, распределяющих свой доход на покупку товаров и услуг. Проблема *рационального ведения хозяйства* для потребителя состоит в том, чтобы правильно определить, приобретение какого количества товаров и услуг будет оптимальным при заданном уровне дохода.

Для определения того, какие из товаров и в каком количестве предпочтительнее для потребителя, вводится *функция полезности* – функция, которая ставит в соответствие набору товаров в количестве x_1, $x_2 \dots x_n$ (*вектору пространства товаров*) численную оценку его полезности $U(x_1, x_2 \dots x_n)$.

Предполагается, что между товарами существуют отношения предпочтения. Два набора товаров могут быть либо равноценны, либо один из них будет превосходить другой. Такие отношения определены на всем пространстве товаров (нет такой области, где бы два набора товаров нельзя было сравнить). Кроме того, эти отношения транзитивны (если первый набор товаров лучше второго, а второй лучше третьего, то первый лучше третьего).

Функция полезности, позволяющая сравнивать товары между собой, обладает следующими свойствами:

1. Если один набор товаров предпочтительнее второго (***x*** ≥ ***y***), то значение функции полезности для него будет больше (*U*(***x***)≥*U*(***y***))

2. При увеличении количества любого из товаров, полезность всего набора возрастает. Иначе говоря, первые производные функции полезности (предельные полезности каждого товара) всегда положительны

$$\mathbf{MU}_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial U}{\partial x_j}(\mathbf{x}) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Рост полезности замедляется с ростом количества товара (*первый закон Госсена*).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) < 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

Примеры функций полезности, удовлетворяющих перечисленным требованиям, приведены ниже.

- *мультипликативная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0, \; \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n < 1$;

- *логарифмическая*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \log_d x_i,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0, \; d > 1$;

- *квадратичная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

где матрица $\mathbf{B} = (b_{ij})$ должна быть отрицательно определенной;

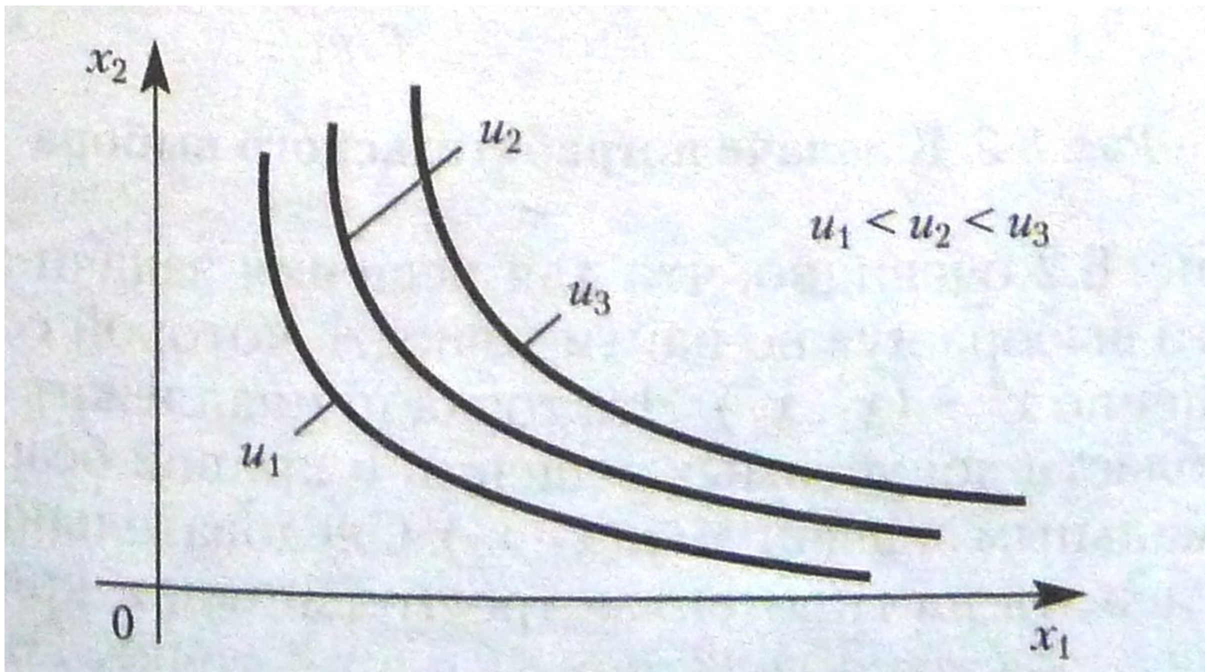
- *пропорциональная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\left\{\frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \ldots, \frac{x_n}{k_n}\right\},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n > 0$ и др.

Линии уровня функции полезности (линии, вдоль которых $U(\boldsymbol{x})$=const), называются кривыми безразличия.

На рисунке показаны несколько кривых, соответствующих различным значениям функции полезности.



В общем случае множество наборов товаров с одинаковой полезностью образует поверхность безразличия.

Пусть I – доход потребителя, $p=(p_1 p_2 \ldots p_n)$ - цены на рассматриваемые товары. В этом случае задача оптимизации потребительского выбора состоит в выборе набора товаров, максимизирующего функцию полезности при наличии бюджетного ограничения:

$$U(\boldsymbol{x}) \rightarrow \max$$

$$\boldsymbol{px}=I$$

Решение задачи может быть проведено методом Лагранжа. Для поиска условного экстремума необходимо найти экстремум функции $L(\mathbf{x}, \lambda)=U(\boldsymbol{x})- \lambda(I- \boldsymbol{px})$

Из равенства 0 частных производных получаем условие максимума:

$$1/p_i MU_i(\boldsymbol{x}^*)= \lambda$$

Таким образом, оптимальным является решение, при котором увеличение полезности на одну вложенную денежную единицу (множитель Лагранжа) одинаково для всех товаров. Полученный результат можно также интерпретировать как *второй закон Госсена* – взаимозаменяемыми (1:1) являются товары, цена которых одинакова.

Задача оптимизации функции полезности при фиксированном бюджетном ограничении

$$U(\boldsymbol{x}) \to \max$$

$$\boldsymbol{px} \leq I$$

называется **задачей потребителя**. Согласно существующей теореме ее решение лежит на границе бюджетного множества $\boldsymbol{px}=I$ и является единственным при условии, что функция полезности строго выпукла вверх (график функции лежит выше отрезка прямой, соединяющей две ее любые точки).

Рассмотрим примеры, связанные с решением задачи потребителя.

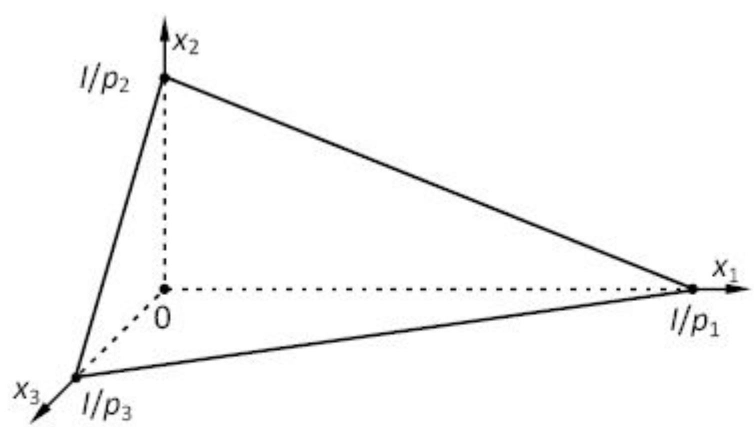
Пример 1:

В пространстве трех товаров известен вектор цен $\mathbf{p} = (2 \quad 5 \quad 6)$, богатство потребителя $I = 30$ ден. ед. Требуется описать бюджетное множество с помощью системы неравенств и изобразить его графически.

бюджетное множество

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leqslant 30,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \right\}$$

представляет собой трехгранную пирамиду, одна вершина которой находится в начале координат, а три другие — соответственно в точках $I/p_1 = 30/2 = 15$, $I/p_2 = 30/5 = 6$ и $I/p_3 = 30/6 = 5$ на осях Ox_1, Ox_2, и Ox_3



Пример 2:

В условиях примера 1 известна также функция полезности потребителя $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$. Требуется определить функцию спроса и рассчитать ее конкретное значение при заданном богатстве I и векторе цен $\mathbf{p}$.

Решение. Предельные полезности товаров в данном примере равны

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_2 x_2}}{2\sqrt{x_1}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{x_1 x_3}}{2\sqrt{x_2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2\sqrt{x_3}}.$$

В оптимальном решении задачи потребителя $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3 \neq 0,$ так как $u(x_1, x_2, 0) = u(x_1, 0, x_3) = u(0, x_2, x_3) = 0$. Поэтому условия для определения функции спроса принимают вид

Пример 2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\sqrt{x_1 x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\sqrt{x_1 x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4\lambda^2 p_2 p_3, \\ x_3 = 4\lambda^2 p_1 p_2, \\ x_2 = 4\lambda^2 p_1 p_3, \\ 12\lambda^2 p_1 p_2 p_3 = I \end{cases}$$

функция спроса данного потребителя

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \begin{pmatrix} I/(3p_1) \\ I/(3p_2) \\ I/(3p_3) \end{pmatrix},$$

предельная полезность денег

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12 p_1 p_2 p_3}}.$$

Пример 2:

При данном векторе цен $\mathbf{p} = (2 \quad 5 \quad 6)$ и богатстве $I = 30$ получаем:

$$x_1^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_1} = \frac{30}{3 \cdot 2} = 5, \quad x_2^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_2} = \frac{30}{3 \cdot 5} = 2,$$

$$x_3^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_3} = \frac{30}{3 \cdot 6} = \frac{5}{3}, \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12 p_1 p_2 p_3}} = \sqrt{\frac{30}{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Пример графического решения задачи оптимизации потребительского выбора на примере двух товаров представлено на рисунке ниже:

Бюджетная линия $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$
Наклон $= -p_1/p_2$

Зависимости оптимальных объемов товаров от цен и дохода

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{p}, I)$$

называют *функциями спроса потребителя*. Их важным свойством является линейная однородность относительно всех цен и дохода.

$$\boldsymbol{x}^*(\alpha\boldsymbol{p}, \alpha I)\ {}^*\!=\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{p}, I)$$

Выбрав какой-то из товаров в качестве *единицы счета* (например, $\alpha=1/p_1$) можно построить зависимость функций спроса от относительных цен и *реального дохода*

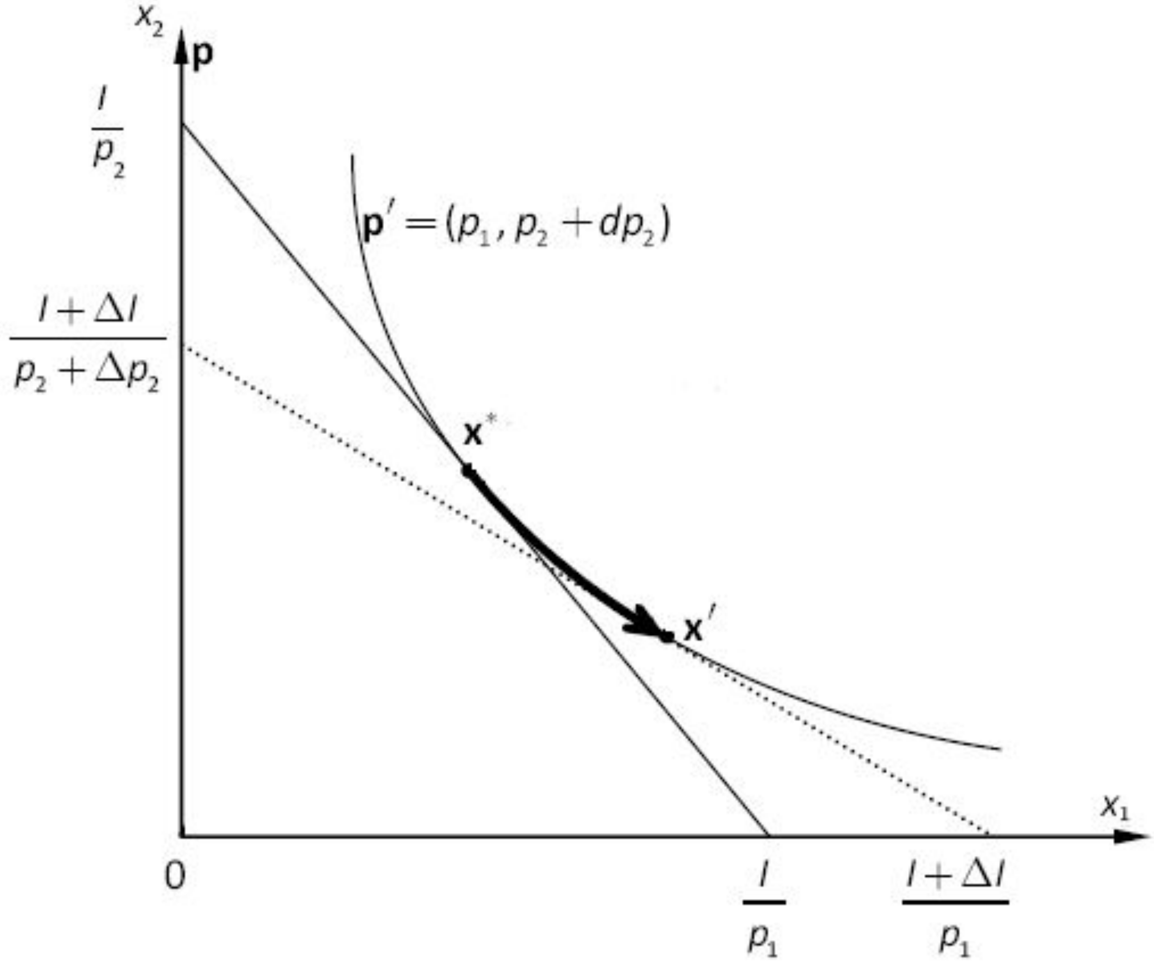
$$x_j^* = x_j^*\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \ldots, \frac{p_n}{p_1}, \frac{I}{p_1}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Сравнительная статика потребления.

Метод сравнительной статики заключается в изучении чувствительности решения задачи рационального ведения хозяйства от изменения параметров путем сравнения решений статических задач с различными значениями параметров.

Рассмотрим случай, когда возрастает цена на один из товаров, а доход компенсируется таким образом, чтобы полезность осталась неизменной. При таких изменениях оптимальное решение смещается вдоль кривой безразличия так, чтобы соответствовать новому бюджетному ограничению

Ниже приведен рисунок, иллюстрирующий это изменение.



Изменение спроса с компенсацией дохода

Изменение спроса на i товар при изменении цены j-го товара на единицу и сопутствующем изменении дохода I обозначается как

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j}.$$

где

$$\lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j} = \lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{x_i' - x_i^*}{\Delta p_j} =$$

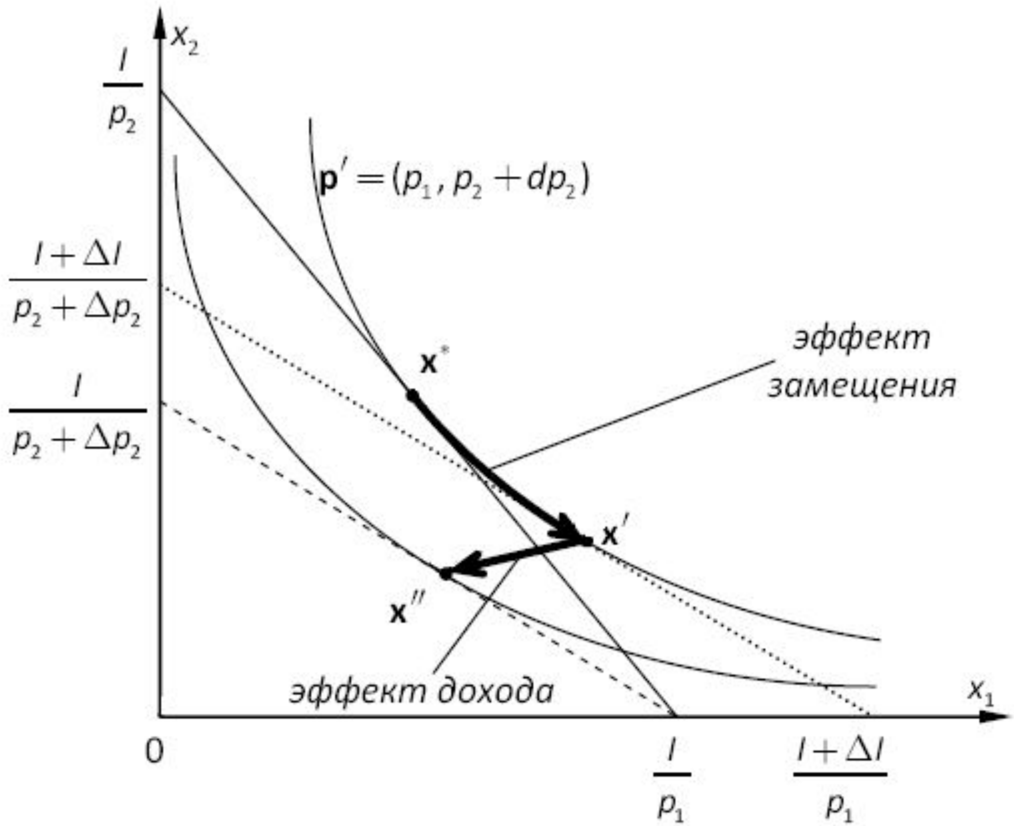
$$= \lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{x_i^*(p_1, p_2, \ldots, p_j + \Delta p_j, \ldots, p_n, I + \Delta I) - x_i^*(p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots, p_n, I)}{\Delta p_j}$$

Уравнение Слуцкого (полученное Е.Е. Слуцким в 1915 году) позволяет рассчитать изменение функций потребительского спроса в условиях, когда компенсационного изменения дохода не происходит:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_j^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Первое слагаемое в правой части отражает *эффект замещения* (возможность замещения одних товаров другими при сохранении дохода), а второе слагаемое – *эффект дохода*, связанный с изменением потребительской ценности единицы богатства

Оба эффекта показаны на рисунке:



Эффект дохода и эффект замещения

Можно доказать, что то *компенсированное* возрастание цены товара всегда приводит к уменьшению спроса на товар:

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} < 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Результирующее изменение спроса зависит от знака второго слагаемого

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right) = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} - \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial I}\right) x_j^*$$

В зависимости от знаков производных в правой и левой частях все товары можно разделить на следующие группы:

$$\left\{\begin{matrix} \textit{нормальные} \\ \textit{товары} \\ \textit{Гиффина} \end{matrix}\right\}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} \left\{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right\} 0,$$

$$\left\{\begin{matrix} \textit{ценные} \\ \textit{малоценные} \end{matrix}\right\}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial x_j^*}{\partial I} \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} 0.$$

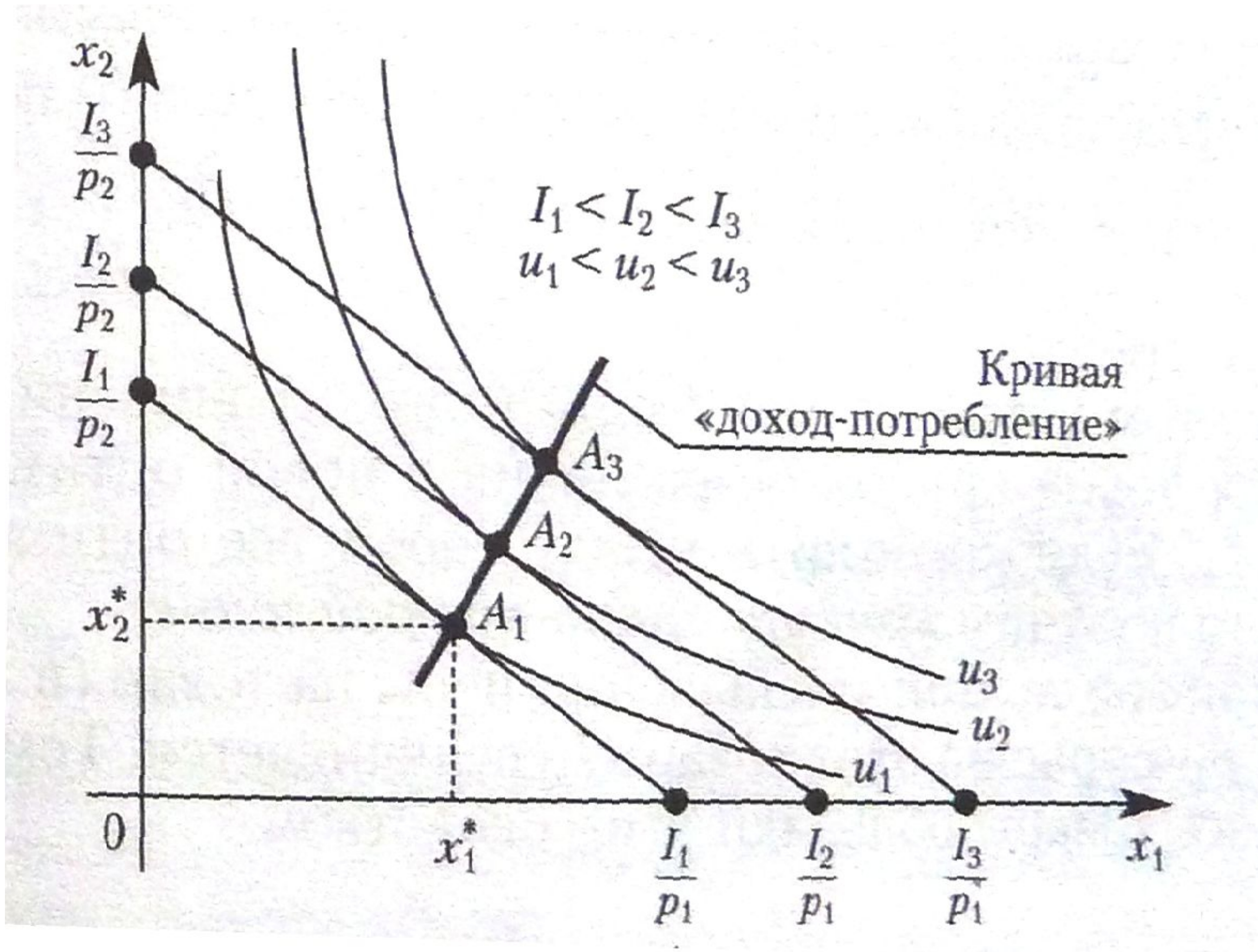
Поскольку

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} \leqslant 0, \quad \text{если} \quad \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial I}\right) x_j^* < \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} < 0.$$

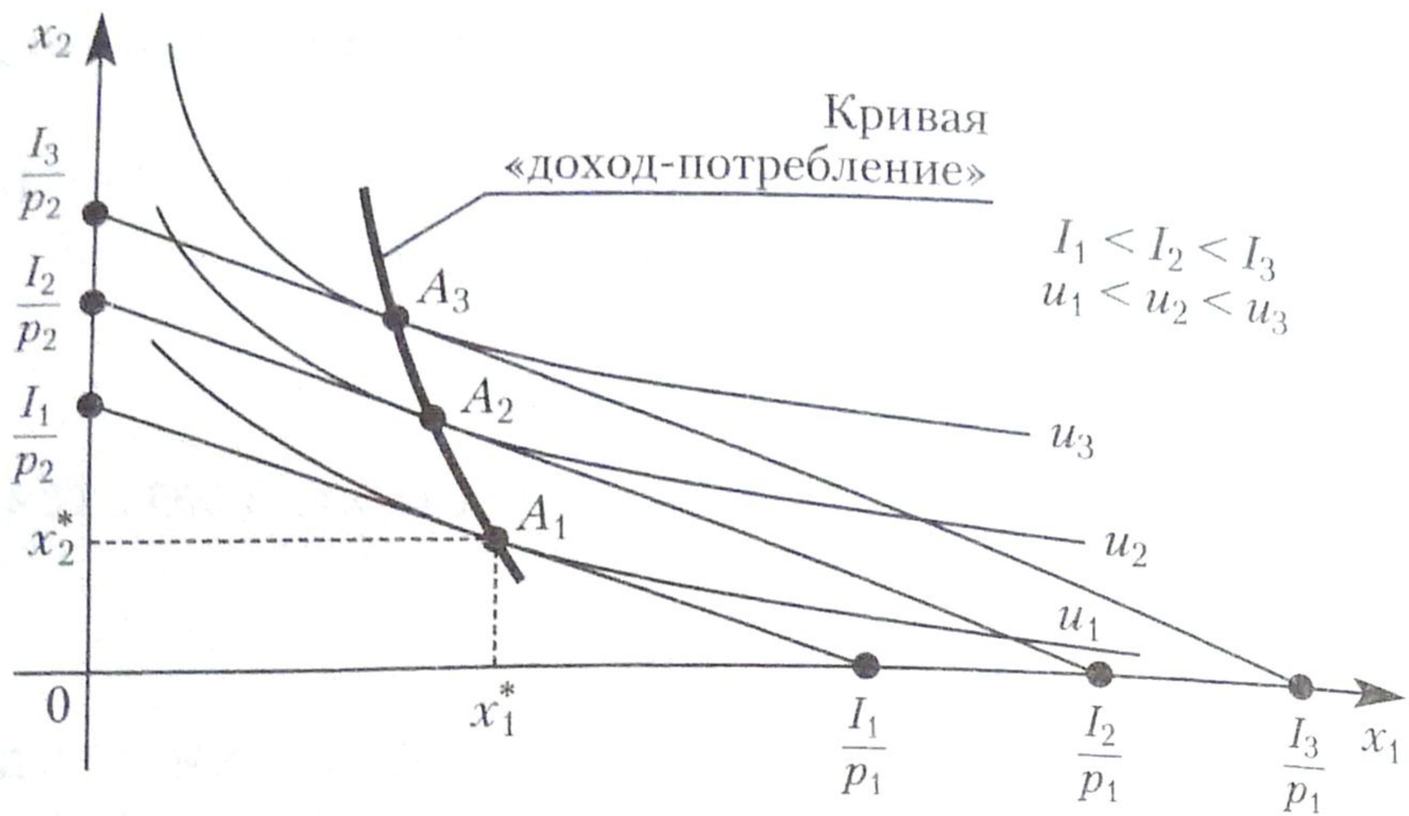
то товарами Гиффина могут быть только малоценные товары. Таким образом, все товары можно разделить на три основных категории:

Влияние изменения дохода / Влияние изменения частной цены	Ценные $\frac{\partial x_j^*}{\partial I} > 0$	Малоценные $\frac{\partial x_j^*}{\partial I} < 0$
Нормальные $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$	Пример: масло	Пример: маргарин
Товары Гиффина $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$		Пример: картофель в Ирландии в конце XIX века

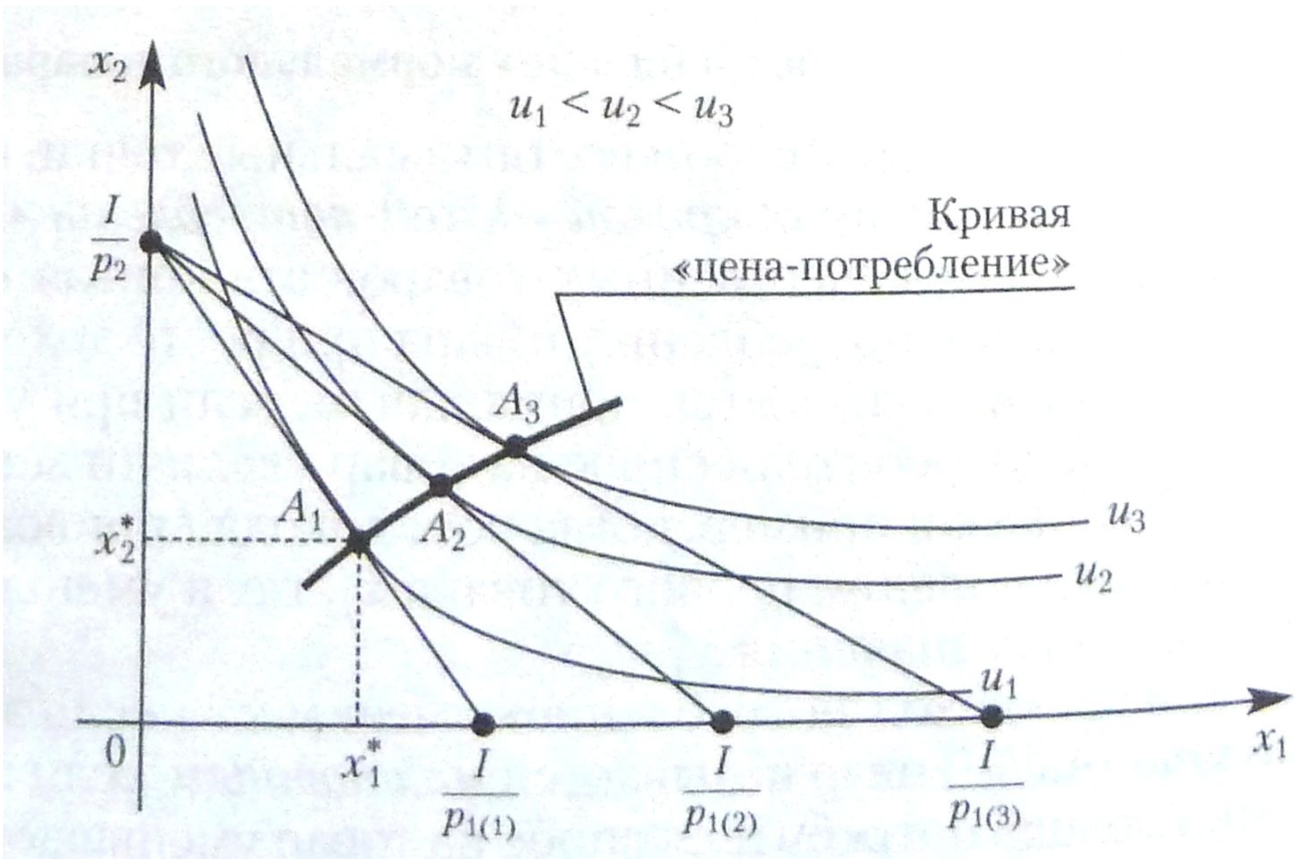
Потребление *нормальных ценных* товаров возрастает с повышением дохода:



Потребление *нормальных малоценных* товаров уменьшается при росте дохода.



При снижении цены потребление нормальных товаров возрастает, а при росте - повышается.



В отличие от нормальных товаров, спрос на товары Гиффина возрастает с ростом цены. Примером такого товара является картофель в Ирландии в конце 19 века. Картофель являлся малоценным товаром, поэтому при повышении дохода его потребление сокращалось. Однако, при росте цены на картофель доходы населения падали, не позволяя покупать более дорогую еду, что приводило к росту потребления картофеля.

В зависимости от знака смешанных производных, товары можно разделить на *взаимозаменяемые* и *взаимодополняющие*.

Два товара j и l являются

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{взаимозаменяемыми} \\ \text{взаимодополняемыми} \end{array} \right\}, \quad \text{если} \quad \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l} \right)_{\text{comp}} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0.$$

Можно доказать, что каждому товару соответствует по крайней мере один, составляющий с ним взаимозаменяемую пару.

Из уравнения Слуцкого следует, что для нормальных ценных товаров некомпенсированный спрос на заменяющий товар всегда растет медленнее, чем компенсированный. На дополняющий товар, напротив, некомпенсированный спрос падает быстрее

Рассмотрим такие величины, как эластичность спроса по цене и доходу.

$$\left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{p_l}{x_j^*} & \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_l} \\ \dfrac{I}{x_j^*} & \dfrac{\partial x_j^*}{\partial I} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \text{эластичность} \\ \text{спроса на товар } j \\ \text{по отношению к} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} p_l \\ I \end{array} \right\}.$$

Напомним, что эластичность любой величины по какому-либо параметру равна ее относительному изменению при изменении параметра на 1 процент. Ранее мы доказывали формулу, согласно которой эластичность экономической величины можно вычислить как отношение ее предельной величины к средней величине.

Поскольку и спрос и доход и цены, входящие в уравнения неотрицательны, классификацию потребительских товаров легко провести в терминах эластичности.

Если смешанная эластичность (описывающая изменение спроса на один товар за счет изменения цены другого товара) отрицательна, то товары – *взаимодополняющие*, если положительна – *взаимозаменяемые*.

Товары Гиффина имеют положительную эластичность по своей цене и отрицательную – по доходу.

Нормальные товары всегда имеют отрицательную эластичность по своей цене и делятся на *ценные* (с положительной эластичностью по доходу) и *малоценные* (с отрицательной эластичностью).

Рассмотрим, как связаны между собой эластичность спроса по цене (зависимость спроса на товар от его цены) и доход продавца $П=px$.

$$\partial П/\partial p = x + p(\partial x/\partial p) = x(1 + p/x(\partial x/\partial p)) = x(1+\varepsilon_p(x)) = x(1-|\varepsilon_p(x)|)$$

Для нормальных товаров эластичность спроса по цене всегда отрицательна, поэтому в экономике часто под эластичностью спроса по цене понимают ее абсолютную величину, и когда говорят о высокой эластичности, имеют в виду большое значение модуля эластичности. Считается, что *спрос эластичный, если модуль эластичности по цене больше 1*. Иначе спрос называется *неэластичным*. При эластичности, равной 0, спрос называется *совершенно неэластичным*.

При эластичном спросе повышение цены приводит к уменьшению дохода продавца, наоборот, при неэластичном спросе доход продавца при повышении цены возрастает.
Эластичность спроса по цене тем выше, чем выше замещаемость товара и удельный вес расходов на данный товар в общем доходе потребителя.

Для спроса на товар j сумма эластичностей по цене равна эластичности по доходу.

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{p_l\,\partial x_j^*}{x_j^*\,\partial p_l}\right)+\left(\frac{I\,\partial x_j^*}{x_j^*\,\partial I}\right)=0,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Для функций спроса можно записать условие *агрегации Курно*

$$x_l^*=-\sum_{j=1}^{n}p_j\,\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l},\quad l=1,2,\ldots,n.$$

Модель рыночного равновесия

Рассмотрим рынок n товаров с k участниками. Пусть вектор

$$\mathbf{x}^j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix}$$

определяет начальные запасы товаров у j-го участника, а $u^j(\mathbf{x}) = u^j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция полезности j-го участника ($j = 1, 2, \ldots, k$).

Если на рынке будут установлены некоторые цены товаров: p_1, p_2, …, p_n, то начальное богатство каждого участника (до обмена) в денежном выражении определяется как

$$I_j = \mathbf{p}\mathbf{x}^j = \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

При этом суммарное предложение i-го товара на рынке будет равно суммарным запасам этого товара у всех участников:

$$Q_i^S = \sum_{j=1}^{k} x_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теперь можно для каждого участника поставить з а д а ч у п о т р е б и т е л я и определить ф у н к ц и и с п р о с а участников рынка:

$$\tilde{\mathbf{x}}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I_j) \\ \tilde{x}_2^j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I_j) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum\limits_{l=1}^n p_l x_l^j\right) \\ \tilde{x}_2^j\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum\limits_{l=1}^n p_l x_l^j\right) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum\limits_{l=1}^n p_l x_l^j\right) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, суммарный спрос всех участников на i-й товар будет равен

$$Q_i^D = \sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_i^j \left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Согласно **закону Вальраса** р ы н о ч н о е р а в н о в е с и е определяется равенством суммарного спроса и суммарного предложения по каждому товару:

$$Q_i^D = Q_i^S, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_i^j \left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j \right) = \sum_{j=1}^{k} x_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из приведенного уравнения можно найти равновесные цены и вычислить результирующий спрос на товары для всех участников.

Пример 3

Рассматривается рынок трех товаров. Требуется определить равновесное распределение товаров между четырьмя участниками рынка, если эти участники обладают одинаковыми функциями полезности $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$, а начальные запасы товаров у участников рынка составляют

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ x_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть цены товаров на рынке определяются вектором $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$, тогда начальное богатство первого участника составит

$$I_1 = \mathbf{px}^1 = p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 + p_3 x_3^1 = p_1 + 2p_2 + 3p_3 .$$

Аналогично определяется начальное богатство второго, третьего и четвертого участников рынка:

$$I_2 = \mathbf{px}^2 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3,\ \ I_3 = \mathbf{px}^3 = 3p_1 + 4p_2 + 5p_3,\ \ I_4 = \mathbf{px}^4 = p_1 + p_2 + 6p_3 .$$

функция спроса

$$\tilde{\mathbf{x}}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) = \begin{pmatrix} I_j/(3p_1) \\ I_j/(3p_2) \\ I_j/(3p_3) \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, 3, 4,$$

Суммарный спрос на первый товар составляет

$$Q_1^D = \frac{I_1}{3p_1} + \frac{I_2}{3p_1} + \frac{I_3}{3p_1} + \frac{I_4}{3p_1} =$$

$$= \frac{(p_1 + 2p_2 + 3p_3) + (2p_1 + 2p_2 + 2p_3) + (3p_1 + 4p_2 + 5p_3) + (p_1 + p_2 + 6p_3)}{3p_1} =$$

$$= \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1},$$

аналогично определяется суммарный спрос на второй и третий товары:

$$Q_2^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2}, \qquad Q_3^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3}.$$

Суммарное предложение первого товара равно

$$Q_1^S = x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 = 1 + 2 + 3 + 1 = 7,$$
$$Q_2^S = x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 = 2 + 2 + 4 + 1 = 9,$$
$$Q_3^S = x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 + x_3^4 = 3 + 2 + 5 + 6 = 16.$$

условие равенства суммарного спроса и суммарного предложения каждого товара:

$$\begin{cases} Q_1^D = Q_1^S, \\ Q_2^D = Q_2^S, \\ Q_3^D = Q_3^S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1} = 7, \\ \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2} = 9, \\ \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Полученная система уравнений позволяет определить равновесные цены и объемы потребления для каждого участника рыночных отношений