

**ЛЕКЦІЯ 14. ПРИНЦИПИ  
ПОБУДОВИ  
ЕКОНОМЕТРИЧНИХ  
МОДЕЛЕЙ. ПАРНА ЛІНІЙНА  
РЕГРЕСІЯ**

# План

*14.1 Основні задачі економетрії.*

*14.2 Парна лінійна регресія. Метод найменших квадратів.*

*14.3 Випадкові збудники в рівнянні лінійної регресії.*

*14.4 Умови Гауса-Маркова.*

*Гомоскедастичні та гетероскедастичні моделі (самостійна робота).*

*14.5 Специфікація моделі (самостійна робота).*

# *Парна лінійна регресія. Метод найменших квадратів*

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (14.1)$$

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \varepsilon_2,$$

.....

(14.2)

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i,$$

.....

$$y_n = \beta_0 + \beta_1 x_n + \varepsilon_n,$$

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon} \quad (14.3)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \boxtimes \\ \boxtimes \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \boxtimes \\ \boxtimes \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = \beta_0^* + \beta_1^* x_2 + \varepsilon_2,$$

.....

$$y_i = \beta_0^* + \beta_1^* x_i + \varepsilon_i,$$


(14.4)

.....

$$y_n = \beta_0^* + \beta_1^* x_n + \varepsilon_n,$$

$$y = X\beta^* + \varepsilon \quad (14.5)$$

$$\mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \boxtimes \\ \boxtimes \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \boxtimes \\ \boxtimes \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$


$$y = \beta_0 + \beta_1 x + e \quad (14.6)$$

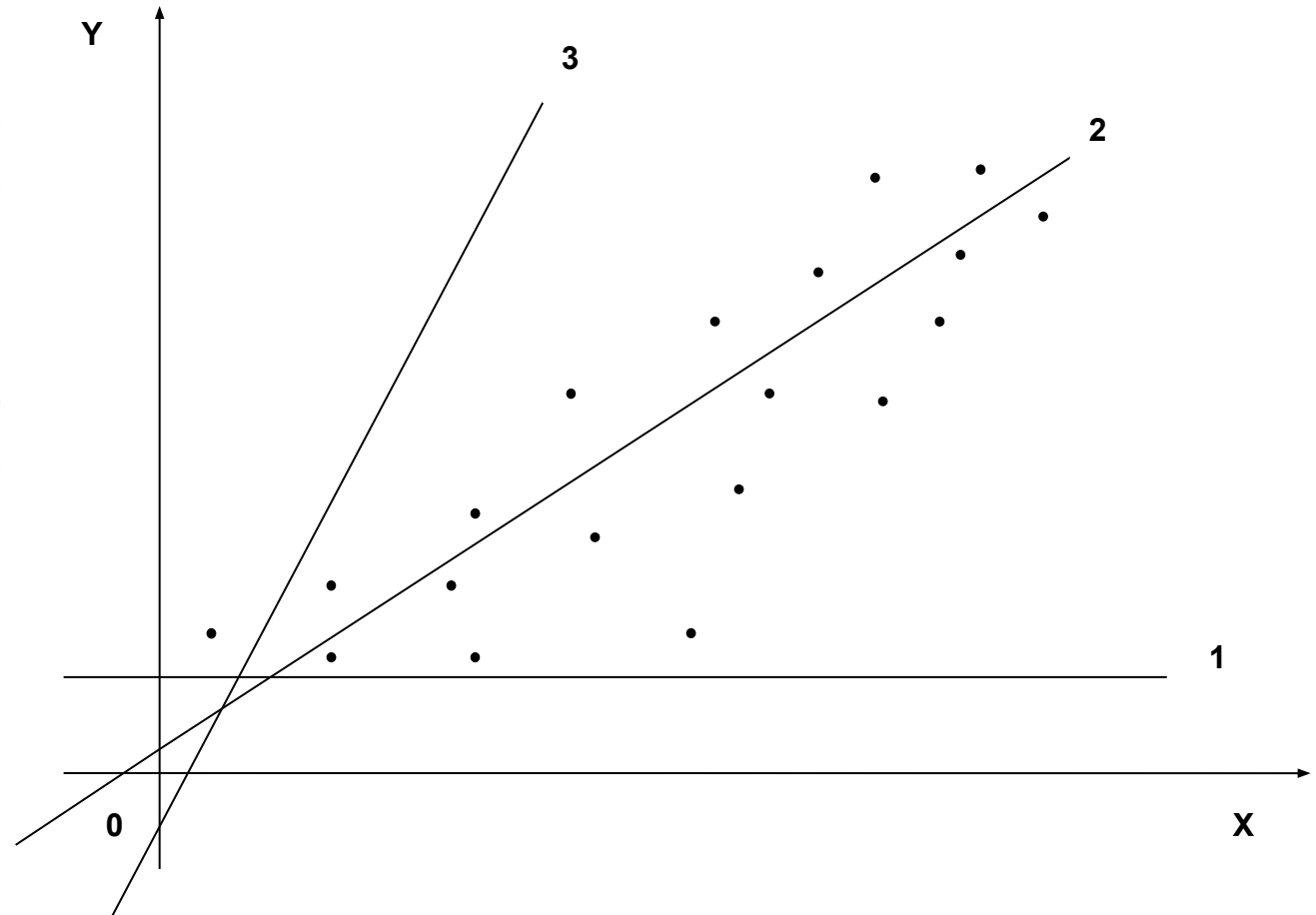
$$y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

# ПРИКЛАД : залежність між обсягами виданих банком кредитів та витратами на рекламу

I	$y_i$	$x_i$
1	25	5
2	30	6
3	35	9
4	45	12
5	65	18

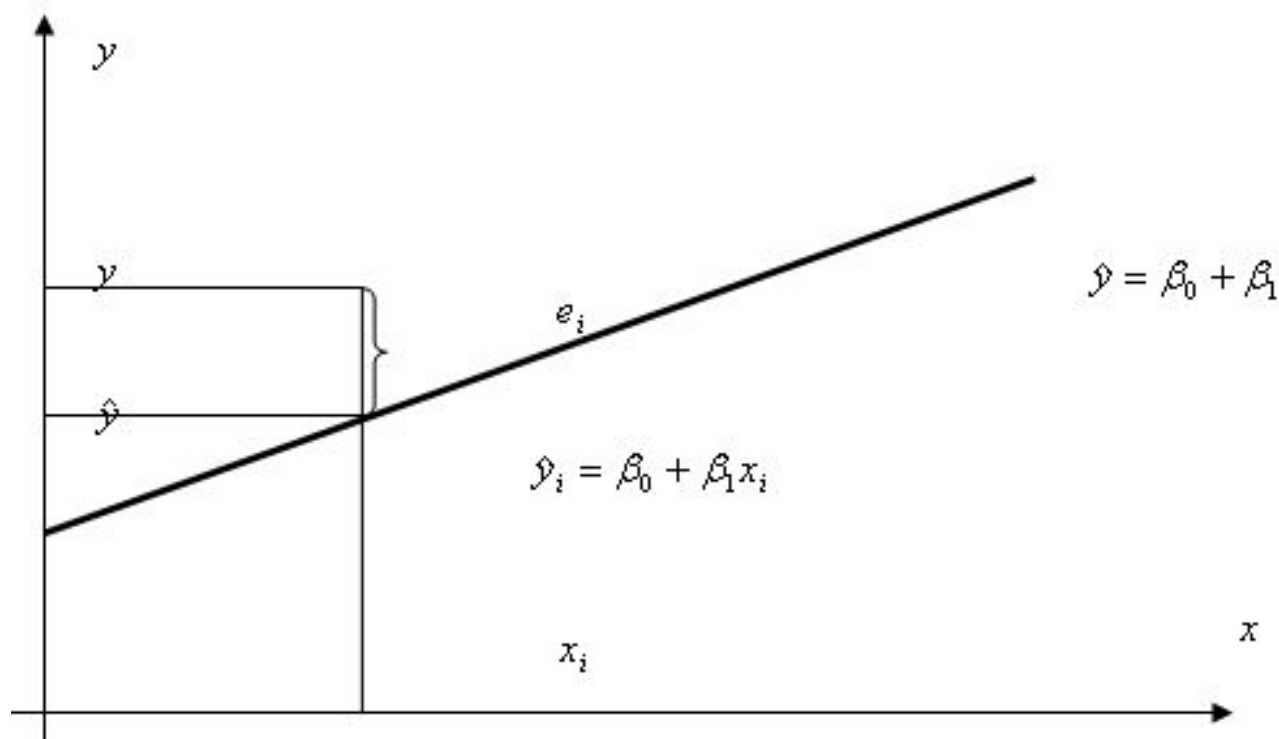




$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i, i = \overline{1, n} \quad (14.7)$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = f(\beta_0, \beta_1) \rightarrow \min \quad (14.8)$$

Відхилення теоретичних значень від фактичних



$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^n e_i^2)}{\partial\beta_0} = \frac{\partial f(\beta_0, \beta_1)}{\partial\beta_0} = 0;$$

(14.9)

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2)}{\partial\beta_1} = \frac{\partial f(\beta_0, \beta_1)}{\partial\beta_1} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sum_{i=1}^n e_i^2)}{\partial\beta_0} = -2\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \\ \frac{\partial(\sum_{i=1}^n e_i^2)}{\partial\beta_1} = -2\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \end{array} \right.$$


(14.10)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i; \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i = \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases} \quad (14.11)$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (14.12)$$

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2} \quad (14.13)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$


$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$


$$\text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\frac{\partial \left( \sum_{i=1}^n e_i^2 \right)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left[ (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \right] = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \quad (14.14)$$

$$y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i = e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n e_i \quad (14.15)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \beta_0 - \beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \quad (14.16)$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$


$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x \quad (14.17)$$

$$y = \hat{y} + e = \beta_0 + \beta_1 x + e \quad (14.18)$$

# ПРИКЛАД ілюстрації побудови рівняння регресії

Таблиця 14.1- Дослідження ефективності витрат на рекламу

I	$y_i$	$x_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1	25	5	25	125
2	30	6	36	180
3	35	9	81	315
4	45	12	144	540
5	65	18	324	1170
Сума	200	50	610	2330
Середнє значення	40	10	122	466



$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{50}{5} = 10;$$


$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{200}{5} = 40;$$

$$\text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{610}{5};$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = \frac{2330}{5} - 400 = 66;$$

$$\beta_1 = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} = \frac{66}{22} = 3; \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x} = 40 - 3 \times 10 = 10$$

$$\hat{y} = 3x + 10$$


$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

$$Y = \beta_0 X^{\beta_1}$$