Пособие для подготовки к ЕГЭ 2012 год

ПОДГОТОВКА к ЕГЭ

задача B13

Разработано учащимися 11 «А» класса МБОУ СОШ №15 г. Королёва Рафаелян Розой, Апраксиной Анной под руководством Моисеевой В.И.

1. Движение навстречу.

Если расстояние между двумя телами равно s, а их скорости v_1 и v_2 , то время t, через которое они встретятся, находится по формуле

$$t=s/(v_1+v_2)$$

1. **Расстояние между городами А и В равно 435 км. Из города А в город В со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах**.

Решение. Через час после выезда первого автомобиля расстояние между автомобилями стало равно

$$435-6\ 0 = 375\ (\text{км}),$$

поэтому автомобили встретятся через время

$$t=375/(60+65)=3(\text{ч}).$$

Таким образом, до момента встречи первый автомобиль будет находиться в пути 4 часа проедет $60 \cdot 4 = 240$ (км).

***Ответ.* 240.**

2. Движение вдогонку.

Если расстояние между двумя телами равно s, они движутся по прямой в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно $(v_1 > v_2)$ так, что первое тело следует за вторым, то время t, через которое первое тело догонит второе, находится по формуле

$$t=s/(v_1-v_2)$$

2. Два пешехода отправляются в одном направлении одновременно из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

Решение. Время t в часах, за которое расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам, т.е. 0,3 км, находим по формуле

$$t=0{,}3/1{,}5=0.2(ч).$$

Следовательно, это время составляет 12 минут.

***Ответ*. 12.**

3 . Движение по окружности (замкнутой трассе)

Рассмотрим движение двух точек по окружности длины s в одном направлении при одновременном старте со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$) и ответим на вопрос: через какое время первая точка будет опережать вторую ровно на один круг? Считая, что вторая точка покоится, а первая приближается к ней со скоростью $v_1 - v_2$, получим, что условие задачи будет выполнено, когда первая точка поравняется в первый раз со второй. При этом первая точка пройдет расстояние, равное длине одного круга, и искомая формула ничем не отличается от формулы, полученной для задачи на движение вдогонку:

$$t=s/(v_1 - v_2)$$

Итак, если две точки одновременно начинают движение по окружности в одну сторону со скоростями v1 и v2 соответственно ($v_1 > v_2$ соответственно) , то первая точка приближается ко второй со скоростью $V_1 - V_2$ и в момент, когда первая точка в первый раз догоняет вторую, она проходит расстояние на один круг больше.

3. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть скорость второго автомобиля x км/ч. Поскольку 40 минут составляют 2/3 часа и это — то время, за которое первый автомобиль будет опережать второй на один круг, составим по условию задачи уравнение

$$14/(80-x)=2/3,$$

откуда $160 - 2x = 42$, т. е. $x = 59$.

Ответ. **59.**

4 . Движение по воде

В задачах на движение по воде скорость течения считается неизменной. При движении по течению скорость течения прибавляется к скорости плывущего тела, при движении против течения — вычитается из скорости тела. Скорость плота считается равной скорости течения.

4. **Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?**

Решение. Пусть искомая величина равна 2х. Составим по условию задачи уравнение

$$(x/28)+(x/22)+5=30$$

откуда

$$(x/28)+(x/22)=25,$$

$$(11x+14x)/(28*11)=25,$$

$$25x/308=25,\ x=308.$$

Значит, искомое расстояние равно 616 км.

Ответ:**616.**

5 . Средняя скорость

Напомним, что средняя скорость вычисляется по формуле

$$v = s/t$$

где S – путь, пройденный телом, а t – время, за которое это путь пройден. Если путь состоит из нескольких участков, то следует вычислить всю длину пути и всё время движения . Например, если путь состоял из двух участков протяженностью s_1 и s_2, скорости на которых были равны соответственно v_1 и v_2, то

$S = s_1 + s_2$, $t = t_1 + t_2$, где $t_1 = s_1/v_1$, $t_2 = s_2/v_2$

5. Первую треть трассы велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а вторую треть – со скоростью 16 км/ч, а последнюю треть – 24 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Обозначим длину всей трассы за время $t_1 = s/12$, вторую треть – за время $t_2 = s/16$, последнюю треть – за время $t_3 = s/24$. Значит, время потраченное им на весь путь, равно

$$t_1 + t_2 + t_3,$$

т. е. $s/12 + s/16 + s/24 = 9s/48.$

Поэтому искомая средняя скорость находится по формуле: $v = 3s : (9s/48) = 3s \cdot (48/9s) = 16$ (км/ч).

6. Движение протяженных тел

В задачах на движение протяженных тел требуется, как правило, определить длину одного из них. Наиболее типичная ситуация: определение длины поезда, проезжающего мимо столба или протяженной платформы. В первом случае поезд проходит мимо столба расстояние, равное длине поезда, во втором случае – расстояние , равное сумме длин поезда и платформы.

6. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров , второй – длиной 80 метров . Сначала второй сухогруз отстает о т первого и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго сухогруза составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние о т кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго ?

Решение. Будем считать, что первый сухогруз неподвижен, а второй приближается к нему со скоростью x (м/мин) , равной разности скоростей второго и первого сухогрузов. Тогда за 12 мину т второй сухогруз проходит расстояние

$$l=400+80+120+600=1200(м).$$

Поэтому

$$x=1200/12=100(м/мин),$$

7. Задачи на работу

Ключевой в задачах на работ у является следующая задача : первый мастер может выполнить некоторую работ у за а часов , а второй мастер — за b часов . За какое время выполнят работ у об а мастера, работая вдвоем? Поскольку объем работы не задан, его можно принять равным единице . Тогда первый мастер за один час выполнит часть работы, равную1 /a, второй — 1/b, а оба мастера — часть работы, равную 1/a+ 1/b Значит, всю работ у они выполнят за время

$$t=1/(1/a+1/b)$$

7. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того , как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работ у над заказом они довели до конца уже вместе . Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение. За 3 часа первый рабочий сделал 3/15 всей работы . Оставшиеся12/15 работы рабочие делали уже вместе и потратили на это

$$(12/15)/(2/15)=6(ч).$$

Значит, время, затраченное на выполнение всего заказа, составляет 9 часов.

***Ответ.* 9.**

8. Задачи на бассейны и трубы

Как уже отмечалось, задачи на бассейны и трубы аналогичны задачам на совместную работу. Модельная ситуация остается той же, только мастерам будут соответствовать насосы разной производительности, а работа будет заключаться в наполнении бассейна или иного резервуара.

8. Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше , чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объемом 360 литров она заполняет на 10 минут медленнее, чем вторая труба?

Решение. Пусть первая труба пропускает x литров воды в минуту, $x > 0$. Тогда вторая труба пропускает $x + 6$ литров воды в минуту. Составим по условию задачи уравнение

$$360/x=(360/x+6)+10$$

откуда, сократив на 10, получим

$$36/x=(36/x+6)+1$$

и, следовательно,

$$(36/x)-(36/x+6)=1$$

Приведем дроби в левой части к общему знаменателю:

$$(36(x+6)-36x)/x(x+6)=1 \quad \text{откуда}$$

$$x(x+6)=36\cdot 6 \quad \text{и} \quad x2+6x-216=0$$

Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -18 и 12, из которых только последнее удовлетворяет условию $x > 0$.

***Ответ.* 12.**

9. Задачи на проценты и доли

При решении задач на проценты важно четко понимать, что процент – это просто сотая часть числа. Поэтому, решая даже кажущиеся очень простыми задачи на проценты, следует немножко подумать и посчитать, прежде чем радостно вписывать в бланк неправильный ответ. Разумеется, это относится и к любым другим задачам.

Отметим ещё следующее. Последовательное увеличение величины на некоторое число процентов, а затем уменьшение результата на то же число процентов не приводит к начальной величине: ведь второе действие мы совершаем уже с другой величиной. То же самое можно сказать и об обратной последовательности действий. Любопытно, что в любом случае получим в итоге величину, меньшую начальной. Например, увеличив а на 10%, получим 1,1а. Уменьшив полученную величину на 10%, получим

$$1.1a*0.9=0.99a$$

- полученная величина меньше начальной на 1%. При этом порядок действий не играет роли: если сначала уменьшить а на 10%, а затем результат увеличить на 10%, получим те же самые

$$0.99a=0.9a*1.1.$$

В общем случае, при увеличении величины а на k % получим величину

$$a_1 = a\ (1 + k/100).$$

Если же теперь уменьшить a_1 на k %, получим величину

$$a_1 \ =a_2\ (1-(k/100))=a\ (1+(k/100))(1-(k/100)$$

т.е.

$$a_2=a(1-(k/100)2)<a.$$

Задачи на проценты и доли (продолжение)

9. Пять рубашек дешевле куртки на 25%. На сколько процентов семь рубашек дороже куртки?

Решение. Обозначим через P стоимость одной рубашки, через K – стоимость куртки. Из условия задачи следует, что 5P = 0,75K, откуда P = 0,15K, и, следовательно, 7P = 1,05K. Значит, семь рубашек дороже куртки на 5%.

***Ответ.* 5.**

10. Задачи на концентрацию, смеси, сплавы.

Задачи на концентрацию традиционно являются слабым звеном в подготовке школьников и абитуриентов, кажутся многим из них довольно сложными. В таких задачах речь обычно идет о растворах некоторого вещества в другом веществе и об изменении концентрации этого вещества после каких-либо манипуляций. При этом водные растворы, смеси или сплавы играют сходные роли и позволяют лишь несколько разнообразить сюжеты задач без изменения математического содержания. Ключевой при решении таких задач является идея отслеживания изменений, происходящих с «чистым» веществом (далее кавычки будем опускать). В качестве модельной задачи рассмотрим следующую.Смешали о литров n-процентного водного раствора некоторого вещества с b литрами m-процентного водного раствора этого же вещества. Требуется найти концентрацию получившейся смеси. Воспользуемся ключевой идеей: проследим за изменениями, происходящими с чистым веществом. В первом растворе его было

$$(a/100)\cdot n=an/100 \text{ (литров)}$$

во втором растворе —

$$(b/100)\cdot m=bm/100 \text{ (литров)}$$

Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно

$$an/100+bm/100 \text{ (литров)}$$

а всего этой смеси получится а + b литров. Теперь уже найти искомую концентрацию к не представляет труда:

$$k=((an/100+bm/100)/(a+b))*100=((an+bm)/(a+b))\%.$$

Заметим, что растворы в этой задаче можно было бы заменить двумя сплавами разной массы и с разным содержанием чистого вещества (например, одного из двух металлов). Решение при этом практически не изменится, поменяются лишь единицы измерения и названия веществ.

10. Виноград содержит 91 % влаги, а изюм — 7%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 21 килограмма изюма ?

Решение. Используем ключевую идею: будем следить за массой «чистого» , т.е . в данном случае «сухого » вещества в винограде и изюме . Пусть для получения 21 килограмма изюма требуется x кг винограда. Из условия следует, что масса «сухого » вещества в x кг винограда равна 0,09x кг. Поскольку эта масса равна массе «сухого» вещества в 21 килограмме изюма, т о по условию задачи можно составить уравнение

$$0{,}09\,x = 0{,}93\cdot 21,$$

откуда

$$9x = 93\cdot 21,$$

т.е . x = 217 кг.

***Ответ*. 217.**

11. Арифметическая прогрессия.

11. Том Сойер и Гекльберри Финн красят забор длиной 100 метров. Каждый следующий день они красят больше, чем в предыдущий, на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме они покрасили 20 метров забора. За сколько дней был покрашен весь забор?

Решение. Пусть ребята в первый день покрасили a_1 метров забора, во второй — a_2 метров и т.д. , в последний — a_n метров забора. Тогда

$$a_1+a_n = 20 \text{ (м)}$$

а за n дней было покрашено

$$S_n=((a_1+a_2)/2)\cdot n=10n$$

метров забора.

Поскольку всего было покрашено 100 метров забора, имеем: $10n = 100$, откуда $n = 10$.

Ответ:10

12. Геометрическая прогрессия .

12. У гражданина Петрова 1 августа 2000 года родился сын. По этому случаю он открыл в некотором банке вклад в 1000 рублей. Каждый следующий год 1 августа он пополнял вклад на 1000 рублей. По условиям договора банк ежегодно 31 июля начислял 20 % на сумму вклада. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и он открыл в другом банке ещё один вклад, уже в 2200 рублей, и каждый следующий год пополнял этот вклад на 2200 рублей, а банк ежегодно начислял 44 % на сумму вклада. Через сколько лет после рождения сына суммы на каждом из двух вкладов сравняются, если деньги из вкладов не изымаются?

Решение. Через n лет в первом портфеле будет сумма

$$1000+1000*1.2+\ldots+1000*1.2^{n}=1000*(1.2^{n+1}-1/1.2-1)=5000(1.2^{n+1}-1)(\text{руб.}).$$

В это же время во втором портфеле окажется

$$22200+2200*1.44+\ldots+200*1.44^{n-6}=2200*(1.44^{n-5}-1/1.44-1)=5000(1.44^{n-5}-1)$$

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000(1.2^{n+1}-1)=5000(1.44^{n-5}-1)$$

Отсюда

$$1.2^{n+1}=1.44^{n-5}\text{ , или } 1{,}2^{n+1}=1.2^{2(n-5)}$$

Значит,

$$n+1=2n-10$$

т.е . n = 11.

***Ответ*. 11.**