Специфика проверки и оценивания задач ЕГЭ по математике с развернутым ответом. Вопросы теории равносильности при решении уравнений и неравенств

Ковалева Галина Ивановна,
доктор пед.наук, директор центра математического образования
ВГАПО

Волгоград
2019

Структура КИМов ЕГЭ по математике. Профильный уровень

* Всего 19 заданий: из них 12 не требуют развернутого ответа, 7 заданий с развернутым ответом.
* По сравнению с прошлым годом не изменились критерии оценивания заданий с развернутым ответом.
* Сохранилось разделение заданий с развернутым ответом по пунктам а), б) ….

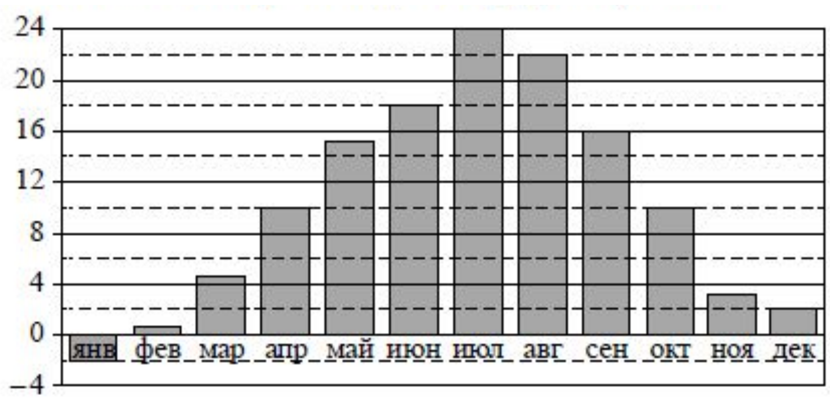
Тестовая часть

1. Таксист за месяц проехал 11 000 км. Цена бензина 35 рублей за литр. Средний расход бензина на 100 км составляет 7 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

86%

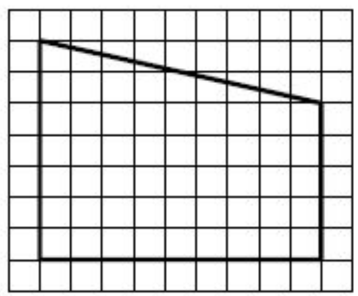
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в первой половине 1988 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.

93%



Тестовая часть

3. На клетчатой бумаге с размером клетки изображена трапеция. Найдите её площадь.



89%

4. В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 4 из Аргентины, 7 из Бразилии, 5 из Парагвая и 4 из Уругвая. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Бразилии.

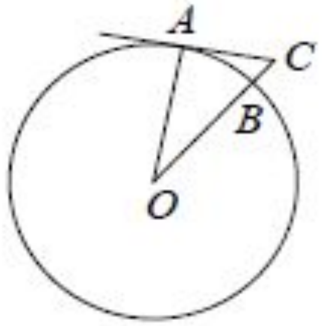
89%

5. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+3}=3$

82%

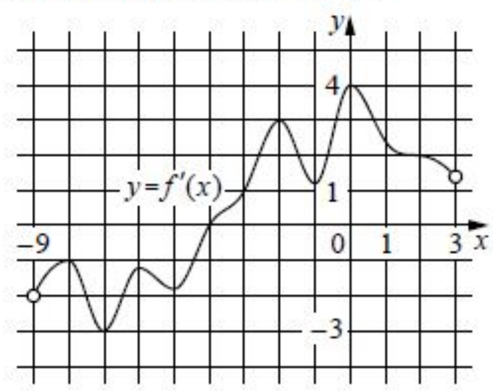
6. Угол ACO равен 62°. Его сторона CA касается окружности с центром в точке O. Отрезок CO пересекает окружность в точке B (см. рис.). Найдите градусную меру дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.

67%



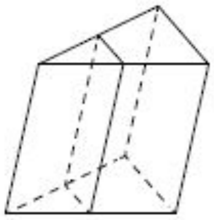
Тестовая часть

7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале (− 9; 3). В какой точке отрезка [− 7; − 5] функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



33%

8. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен 15.



42%

Тестовая часть

9. Найдите значение выражения $\left(2^{16}\right)^5 : 2^{74}$ 90%

10. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, ***где H — высота столба воды в метрах,*** $H_0 = 8$ ***м — начальный уровень воды,*** $a = \frac{1}{72}$ ***м/мин² и*** $b = -\frac{2}{3}$ ***м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. Сколько минут вода будет вытекать из бака?*** 59%

11. Заказ на изготовление 323 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 2 детали больше второго? 51%

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 12x - \ln(12x) + 4$ ***на отрезке*** $\left[\frac{1}{24}; \frac{5}{24}\right]$. 33%

Процент невыполнения заданий с развернутым ответом в 2018 году

Всего 6644 участников ЕГЭ профильного уровня.

13	14	15	16	17	18	18
77,45	91,42	93,38	98,27	98,20	99,11	97,20

всего выполнили человек

440

120

59

Динамика результатов ЕГЭ по математике профильного уровня

	Волгоградская область		
	2016 г.	2017 г.	2018 г.
Не преодолели минимального балла	1101	1526	975
Средний тестовый балл	43,49	41,56	43,85
Получили от 81 до 100 баллов	112	112	50
Получили 100 баллов	2	1	0

13. Решение уравнений с выбором ответов

Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

а) $1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$,

$2\sin^2 x - \sin x = 0$,

$\sin x(2\sin x - 1) = 0$,

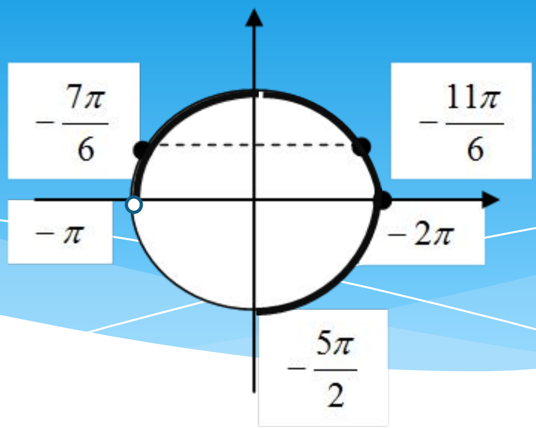
$\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$,

$x = \pi n$, $n \in Z$ или $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Получаем числа:

-2π ; $-\dfrac{11\pi}{6}$; $-\dfrac{7\pi}{6}$.



Ответ:

а) $x=\pi n,\ n\in Z$; $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

б) -2π ; $-\dfrac{11\pi}{6}$; $-\dfrac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ получен ответ неверный из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта *а)* и пункта *б)*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Комментарии к критериям

Любые ошибки, допущенные в тригонометрических формулах, в нахождении значений тригонометрических функций не относятся к вычислительным.

0 баллов!

$\sin x = 0$ $x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Изменение в критериях

Было:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* **или в пункте *б*** ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Стало:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ОСТОРОЖНО – ОДЗ!

$$tgx \cdot \cos 5x + \sin 5x = \sin 6x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos 5x + \sin 5x = \sin 6x$$

$$\sin x \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos x = \sin 6x \cdot \cos x$$

$$\sin 6x = \sin 6x \cdot \cos x$$

$$\sin 6x \cdot (1 - \cos x) = 0$$

$$\sin 6x = 0 \qquad\qquad 1 - \cos x = 0$$

$$6x = \pi k, k \in Z \qquad\qquad \cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi k}{6}, k \in Z \qquad\qquad x = 2\pi n, n \in Z$$

Оценка эксперта – 0 баллов.

ОСТОРОЖНО – ОДЗ!

$$\frac{2\cos^2 x - \cos x - 1}{tgx} = 0$$

$$ОДЗ: \cos x \neq 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 1 \qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 2\pi k, k \in Z \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Оценка эксперта – 0 баллов.

ОСТОРОЖНО – ОДЗ!

$$4\log_4^2(\sin^3 x) + 8\log_2(\sin x) = 1$$

$$ОДЗ: \sin x > 0$$

$$x \in (0; \pi)$$

$$\log_2^2(\sin^3 x) + 8\log_2(\sin x) = 1$$

$$9\log_2^2(\sin x) + 8\log_2(\sin x) = 1$$

$$\log_2(\sin x) = t \ , \quad 9t^2 + 8t - 1 = 0$$

$$\log_2(\sin x) = -1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

не удов

$$\log_2(\sin x) = \frac{1}{9}$$

$$\sin x = \sqrt[2]{9}$$

усл. $|\sin x| \le 1$

Оценка эксперта – 0 баллов.

РАВНОСИЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

$$\log_{\sin x}(8\sin^2 x + 3\sin x - 3) = 1$$

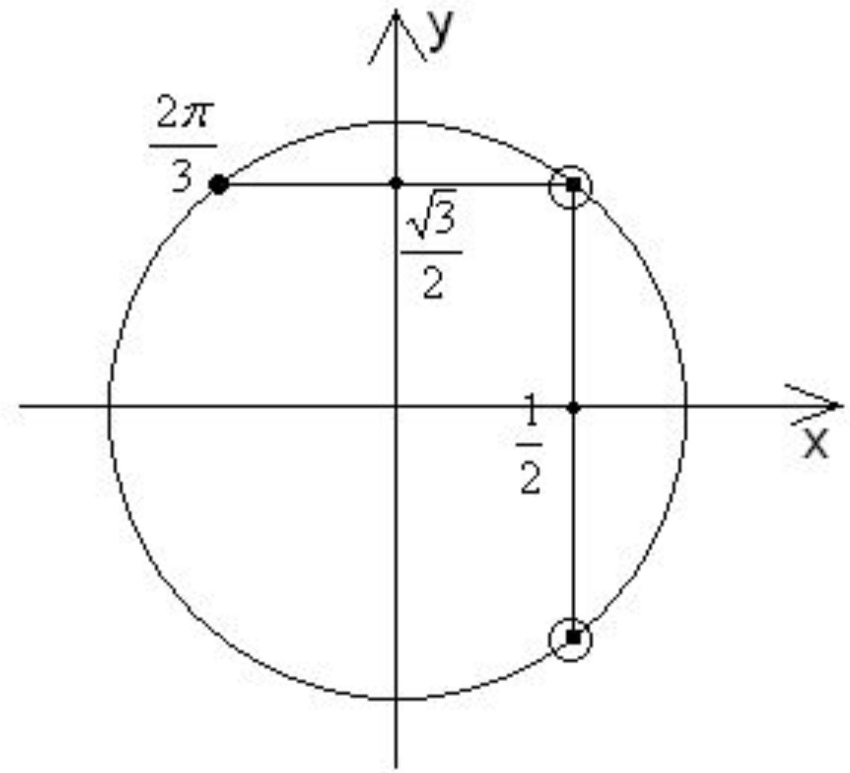
$$\begin{cases} 8\sin^2 x + 3\sin x - 3 = \sin x \\ \sin x > 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$$

$$8\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \sin x = -\frac{3}{4}$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \qquad \text{не удов. усл. } \sin x > 0$$

ВНИМАНИЕ –
ОТБОР КОРНЕЙ ПО ОДЗ



$$\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{2\cos x-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\sin x-\sqrt{3}=0, \\ 2\cos x-1\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$$

Методические рекомендации по организации итогового повторения тригонометрических уравнений

* Запись решений простейших тригонометрических уравнений
* Методы (приемы) решений тригонометрических уравнений
* Приемы отбора корней уравнения из промежутка: основной – с использованием тригонометрической окружности

Внимание – простые уравнения!

$$\log_7(x+2)=\log_7 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=x^2, \\ x+2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

0 баллов!

$\log_7(x+2)=\log_7 x^2$ $x+2=x^2$ $Ответ: -1; 2.$	$\log_7(x+2)=\log_7 x^2$ $ОДЗ: x^2>0 \Rightarrow x>0.$ $x+2=x^2$ $Ответ: -1; 2.$
$\log_7(x+2)=\log_7 x^2$ $ОДЗ: x^2>0.$ $x+2=x^2$ $Ответ: -1; 2.$	$\log_7(x+2)=\log_7 x^2$ $ОДЗ: \begin{cases} x+2>0, \\ x^2>0; \end{cases} \Leftrightarrow x>-2.$ $x+2=x^2$ $Ответ: -1; 2.$

Какое решение правильное?

$$\lg x(x+9) + \lg\frac{x+9}{x} = 0$$

$$\lg\left(x(x+9)\cdot\frac{x+9}{x}\right) = 0$$

$$\lg(x+9)^2 = \lg 1$$

$$(x+9)^2 = 1$$

Ответ: -10, -8.

$$\lg x(x+9) = -\lg\frac{x+9}{x}$$

$$\lg x(x+9) = \lg\frac{x}{x+9}$$

$$x(x+9) = \frac{x}{x+9}$$

Ответ: -10, -8, 0.

$$\lg x + \lg(x+9) + \lg(x+9) - \lg x = 0$$

$$2\lg(x+9) = 0$$

Ответ: -8.

15. Решение неравенства

$$9\log_{12}\left(x^2-3x-4\right)\le 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$$

$$\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ \log_{12}\left(x^2-3x-4\right)^9-\log_{12}\dfrac{(x+1)^9}{x-4}\le 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-4)>0, \\ \log_{12}\dfrac{(x+1)^9(x-4)^{10}}{(x+1)^9}\le 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-4)>0, \\ \log_{12}(x-4)^{10}\le 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-4)>0, \\ 10\log_{12}|x-4|\le 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-4)>0, \\ |x-4|\le 12. \end{cases}$$

Ответ: $[-8;-1)\cup(4;16]$.

$$9\log_{12}\left(x^2-3x-4\right)\le 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$$

$$\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ 9\log_{12}(x+1)+9\log_{12}(x-4)\le 10+9\log_{12}(x+1)-\log_{12}(x-4); \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-4)>0, \\ 10\log_{12}(x-4)\le 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-4)>0, \\ x-4\le 12. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(4;16]$.

Главные вопросы:

- Можно ли выполнить преобразование?
- При каких условиях?

15. Решение неравенства

$$2\log_5\left(x\sqrt{2}\right)-\log_5\left(\frac{x}{1-x}\right)\le\log_5\left(8x^2+\frac{1}{x}-5\right)$$

Зачем?

$$ОДЗ:\begin{cases} x\sqrt{2}>0; \\ \dfrac{x}{1-x}>0; \\ 8x^2+\dfrac{1}{x}-5>0. \end{cases}$$

$$2\log_7\left(x\sqrt{2}\right)-\log_7\left(\frac{x}{1-x}\right)\le\log_7\left(8x^2+\frac{1}{x}-5\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\log_7\left(2x(1-x)\right)\le\log_7\left(8x^2+\dfrac{1}{x}-5\right); \\ 0<x<1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x(1-x)\le 8x^2+\dfrac{1}{x}-5; \\ 0<x<1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10x^3-2x^2-5x+1\ge 0; \\ 0<x<1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(5x-1)\left(2x^2-1\right)\ge 0; \\ 0<x<1.\end{cases}$$

$$Ответ:\left(0;\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right).$$

Поговорим про ОДЗ!

Уравнением с одним неизвестным называется равенство

$$f_1(x) = f_2(x)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ функции, рассматриваемые в общей части их областей определения.

$$\sqrt{x+2} = x-4$$

В структуру этого уравнения входят функция арифметического квадратного корня (левая часть) и линейная функция (правая часть). Так как линейная функция определена для любых *x*, а арифметический квадратный корень существует при неотрицательных значениях подкоренного выражения, то ОДЗ данного уравнения: $x+2 \geq 0$

$$x+2 = (x-4)^2$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x = 2, x = 7$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ

$$\begin{cases} x-4 \geq 0, \\ (x-4)^2 = x+2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 7. \end{array} \right. \end{cases}$$

$Ответ: 7.$

Поговорим про ОДЗ!

Пример «типичного» решения

$$\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$$

$$ОДЗ:\begin{cases}3x-5\ge 0,\\4-x\ge 0.\end{cases}$$

$$(\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x})^2=1^2$$

$$\sqrt{-3x^2+17x-20}=x-1$$

$$4x^2-19x+21=0$$

$$x=3, x=1,75$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ

$$Ответ:3;1,75.$$

Пример правильного решения

$$\begin{cases}3x-5\ge 0;\\4-x\ge 0;\\3x-5>4-x;\\\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}\right)^2=1^2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x\ge 0;\\3x-5>4-x;\\\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}\right)^2=1^2;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\le 4,\\x>2,25,\\x-1\ge 0,\\\left(\sqrt{-3x^2+17x-20}\right)^2=(x-1)^2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 4,\\x>2,25,\\4x^2-19x+21=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\le 4;\\x>2,25;\\\left[\begin{array}{l}x_1=3;\\x_2=1,75,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

$$Ответ:3.$$

Равносильные переходы

$$\log_3\left(x^2-x\right)=\log_3\left(3x+2\right)$$

$$\begin{cases}x^2-x=3x+2,\\3x+2>0.\end{cases}$$

Одно из выражений больше нуля

$$\log_3\left(x^2-x\right)\ge\log_3\left(3x+2\right)$$

$$\begin{cases}x^2-x\ge 3x+2,\\3x+2>0.\end{cases}$$

Меньшее из выражений больше нуля

$$\log_3\left(x^2-x\right)\le\log_3\left(3x+2\right)$$

$$\begin{cases}x^2-x\le 3x+2,\\x^2-x>0.\end{cases}$$

Меньшее из выражений больше нуля

$$\log_{0,3}\left(x^2-x\right)\ge\log_{0,3}\left(3x+2\right)$$

$$\begin{cases}x^2-x\le 3x+2,\\x^2-x>0.\end{cases}$$

Меньшее из выражений больше нуля

Равносильные переходы

$$\log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3)$$

$$\begin{cases} x>0, \\ x+8>0, \\ \log_3 \dfrac{x}{x+8} = \log_3 \dfrac{1}{\quad+3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \dfrac{x}{x+8} = \dfrac{1}{\quad+3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

$$\log_4 \frac{3-x}{x-7} + \log_{0,25}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{4}}(x-7)^2$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{x-7}{3-x} + \log_{\frac{1}{4}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{4}}(x-7)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-7}{3-x} > 0, \\ x-3>0, \\ \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{(x-7)\cdot(\quad-3)}{3-x} \geq \log_{\frac{1}{4}}(x-7)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7<0, \\ x-3>0, \\ \log_{\frac{1}{4}}(7-x) \geq \log_{\frac{1}{4}}(\quad-7)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-7<0, \\ x-3>0, \\ 7-x \leq (\quad-7)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x<7, \\ (x-7)(x-6) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3;6].$$

Ответ: $(3;6]$.

Какое решение правильное?

$$\log_3\left(x^2 - \quad -2\right) \le 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - \quad -2 > 0; \\ \dfrac{x+1}{x-2} > 0. \end{cases}$

$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

$\log_3(x-2) + \log_3(x+1) \le 1 + \log_3(x+1) - \log_3(x-2)$

$2\log_3(x-2) \le 1$

$\log_3(x-2) \le \frac{1}{2}$

$x - 2 \le \sqrt{3}$

$x \le 2 + \sqrt{3}$

С учетом ОДЗ имеем: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(2; 2+\sqrt{3}\right]$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - \quad -2 > 0; \\ \dfrac{x+1}{x-2} > 0. \end{cases}$

$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

$\log_3 \frac{(x-2)^2(x+1)}{x+1} \le 1$

$\frac{(x-2)^2(x+1)}{x+1} \le 3$

$(x-2)^2 \le 3$

$x \in \left[2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right]$

С учетом ОДЗ имеем:

$x \in \left(2; 2+\sqrt{3}\right]$

Как лучше оформить правильное решение?

Пример оформления

17. Решите неравенство $\log_2 \frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x} \geq 0$.

Решение

$$\log_2 8 - \log_2 x - \frac{10}{\log_2 16 + \log_2 x} \geq 0,$$

$$3 - \log_2 x - \frac{10}{4 + \log_2 x} \geq 0.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $3 - t - \frac{10}{4+t} \geq 0$.

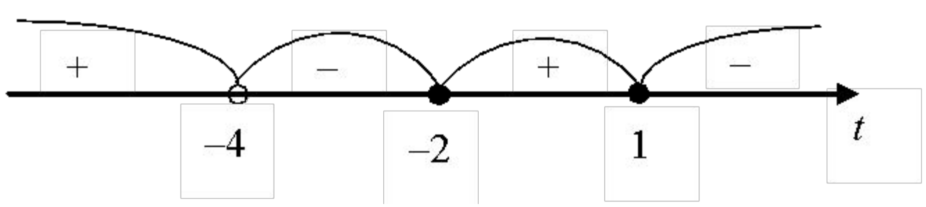
$$\frac{12 + 3t - 4t - t^2 - 10}{4+t} \geq 0, \quad \frac{-t^2 - t + 2}{4+t} \geq 0.$$

Рассмотрим $f(t) = \frac{-t^2 - t + 2}{4+t}$. Найдем t, для которых $f(t) \geq 0$.

1) $D(f)$: $t \neq -4$.

2) $f(t) = 0$, если $-t^2 - t + 2 = 0$, т.е. $t = -2$, $t = 1$.

3) Промежутки знакопостоянства функции:



$t < -4$, $-2 \le t \le 1$.

$\log_2 x < -4$, следовательно, $\begin{cases} x > 0, \\ x < \dfrac{1}{16}. \end{cases}$

$-2 \le \log_2 x \le 1$, следовательно, $\dfrac{1}{4} \le t \le 2$.

Ответ. $x \in \left(0; \dfrac{1}{16}\right) \cup \left[\dfrac{1}{4}; 2\right]$.

Содержание критерия, задание 17	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением точек $x = ...$, $x = ...$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

$$\log_2 \frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x} \geq 0$$

$$f(x) = \log_2 \frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x}$$

$$1)\ D(f):\ \begin{cases} \frac{8}{x} > 0 \\ 16x > 0 \\ \log_2 16x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = 0, \text{ если } \log_2 \frac{8}{x} = \frac{10}{\log_2 16x}$$

$$3 - \log_2 x = \frac{10}{\log_2 16x}$$

$$\log_2 x = t,\ 3 - t = \frac{10}{4+t}$$

$$(3-t)(4+t) = 10$$

$$-t^2 - t + 12 = 10$$

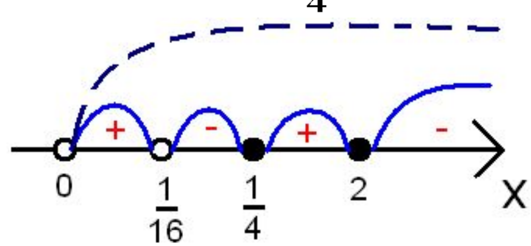
$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t = -2, \quad t = 1$$

$$\log_2 x = -2, \quad \log_2 x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}, \quad x = 2$$

3)



$$\text{Ответ}: x \in \left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; 2\right]$$

Пример оценивания решения неравенства

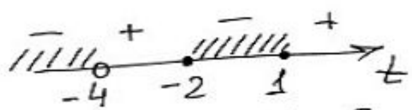
$$\log_2 8 - \underbrace{\log_2 x}_{t} - \frac{10}{\log_2 16 + \log_2 x} \geqslant 0$$

$$3 - t - \frac{10}{4+t} \geqslant 0$$

$$\frac{2 - t - t^2}{4+t} \geqslant 0 \qquad t_1 = 1 \qquad t_2 = -2$$

$$\frac{-(t-1)(t+2)}{4+t} \geqslant 0$$

$$\frac{(t-1)(t+2)}{4+t} \leqslant 0$$



$$t \in (-\infty; -4) \cup [-2; 1]$$

$$\log_2 x < -4 \quad \text{или} \quad -2 \leqslant \log_2 x \leqslant 1$$

$$\log_2 x < \log_2 \frac{1}{16} \qquad \log_2 \frac{1}{4} \leqslant \log_2 x \leqslant \log_2 2$$

$$x < \frac{1}{16} \qquad \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 2$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; 2\right]$

Оценка эксперта – 0 баллов.

0 баллов!

Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(4x^2\right)+35}{\log_2^2 x-36}\geq -1$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right);\ \dfrac{1}{2};\ (64;+\infty)$.

$\dfrac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x-36}\geq -1$

ОДЗ: $\begin{cases}4x^2>0\\ x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2>0\\ x>0\end{cases}$

$\dfrac{\log_2 4+\log_2 x^2+35}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)}+1\geq 0$

$\dfrac{2+2\log_2|x|+35+\log_2^2 x-36}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)}\geq 0$

Т.к. по ОДЗ $x>0$, то

$\dfrac{\log_2^2 x+2\log_2 x+1}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)}\geq 0$

Пусть $\log_2 x=t$, тогда

$\dfrac{t^2+2t+1}{(t-6)(t+6)}\geq 0$

$\dfrac{(t+1)^2}{(t-6)(t+6)}\geq 0$

$+\quad -6\quad -\quad -1\quad -\quad 6\quad +$

$\left[\begin{array}{l} t<-6,\\ t>6,\\ t=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x<-6,\\ \log_2 x>6,\\ \log_2 x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\frac{1}{64},\\ x>64,\\ x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

~~Ответ:~~

$0\quad \frac{1}{64}\quad \frac{1}{2}\quad 64$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(64;+\infty)$

Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(4x^2\right)+35}{\log_2^2 x-36}\geq -1$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right);\ \dfrac{1}{2};\ (64;+\infty)$.

NIS

$\dfrac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x-36}\geq -1$

ОДЗ! $\begin{cases}4x^2>0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow x\in(0;+\infty)$

$\dfrac{\log_2 4+\log_2 x^2+35+\log_2^2 x-36}{\log_2^2 x-36}\geq 0$

$\dfrac{\log_2^2 x+2\log_2 x+1}{\log_2^2 x-36}\geq 0$ $\quad \log_2 x=t$

$\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-36}\geq 0$ $\quad t\neq\pm 6$

$t^2+2t+1=0$

$t=-1$

$+\quad -6\quad -\quad -1\quad -\quad 6\quad +$

$t\in(-\infty;-6)\cup\{-1\}\cup(6;+\infty)$

$\left[\begin{array}{l}\log_2 x<-6\\ \log_2 x=-1\\ \log_2 x>6\end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l}0<x<\frac{1}{64}\\ x=\frac{1}{2}\\ x>64\end{array}\right.$ – с уч. ОДЗ $x\in(0;+\infty)$

Ответ: $\cancel{x\in\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(64;+\infty\right)}$

$x\in\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(64;+\infty)$

Пример неправильного решения неравенства

$$\log_2^2(8+2x-x^2)+9\log_{0,5}(8+2x-x^2)+18>0$$

$$\log_2^2(8+2x-x^2)-9\underbrace{\log_2(8+2x-x^2)}_{t}+18>0$$

$$t^2-9t+18>0$$

$$t^2-9t+18=0$$

$t=3$

$$\log_2(8+2x-x^2)=3$$

$$8+2x-x^2=8$$

$$2x-x^2=0$$

$x=0 \quad x=2$

$t=6$

$$\log_2(8+2x-x^2)=6$$

$$8+2x-x^2=64$$

$$x^2-2x+56=0$$

$D<0 \quad \varnothing$

Ответ. $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Пример неправильного решения

№17

$$\frac{3}{6^x-6}=\frac{4}{6^x-5}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases}6^x-5\neq 0\\ 6^x-6\neq 0\end{cases}\quad \begin{cases}6^x\neq 5\\ 6^x\neq 6\end{cases}\quad \begin{cases}x\neq \log_6 5\\ x\neq 1\end{cases}$$

Решим ур-е!

$$\frac{3}{6^x-6}=\frac{4}{6^x-5}$$

$$4(6^x-6)=3(6^x-5)$$

$$4\cdot 6^x-24=3\cdot 6^x-15$$

$$4\cdot 6^x-3\cdot 6^x=-15+24$$

$$6^x=9$$

$$\log_6 6^x=\log_6 9$$

$$x=\log_6 9$$

Проверка:

~~Отв~~ $\cancel{x\neq}$ $x=7$ 1.

$$\cancel{\frac{3}{\frac{1}{6}-6}=\frac{4}{\frac{1}{6}-6}}$$

Ответ: $(-\infty,\log_6 5)\cup(1,\log_6 9]$.

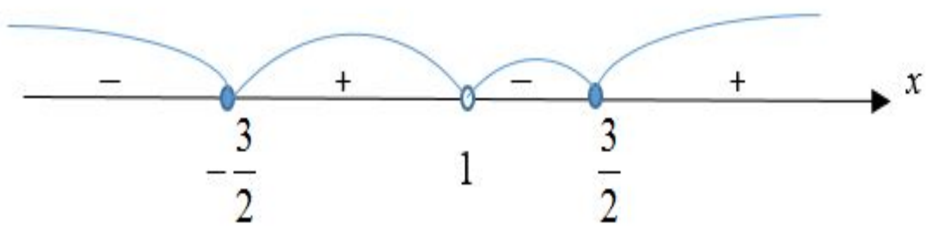
Метод интервалов – полюбить!

$$\frac{4^{x^2+x-4}-0,5^{2x^2-2x-1}}{0,2\cdot 5^x-1}\le 0$$

$1)\,0,2\cdot 5^x-1\ne 0,\ x\ne 1.$

$2)\,4^{x^2+x-4}-0,5^{2x^2-2x-1}=0,\ x=\pm\dfrac{3}{2}.$

3)



$$\textit{Ответ}:\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left(1;\frac{3}{2}\right].$$

Методические рекомендации по организации повторения

* Вспомнить алгоритмы решений неравенств, эвристические предписания (квадратное неравенство – парабола; дробно-рациональное неравенство – метод интервалов; логарифмическое неравенство – система: первая строчка – ОДЗ, вторая – монотонность; и т.д.)
* При решении неравенства методом интервалов четко выделить функцию, о которой идет речь.
* Решать одно неравенство разными методами.
* Показать оформление решения неравенства разными методами в сравнении.
* Научить проверять граничные точки – подстановкой.

17. «Экономическая» задача

.Содержание критерия, задание 19	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Аннуитетные платежи

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 65 500 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Задача 8 класса

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x — **целое** число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Решение.
В конце первого года вклад составит 11 млн рублей, а в конце второго — 12,1 млн рублей. В начале третьего года вклад (в млн рублей) составит $12{,}1+x$, а в конце — $13{,}31+1{,}1x$. В начале четвёртого года вклад составит $13{,}31+2{,}1x$, а в конце — $14{,}641+2{,}31x$.
По условию, нужно найти наименьшее целое x, для которого выполнено неравенство

$$(14{,}641+2{,}31x)-10-2x>7;\ x>7\frac{189}{310}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 8.
Ответ: 8.

Обратная задача

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Решение.

Пусть первоначальный вклад равен S (млн рублей). Тогда в конце первого года вклад составит $1{,}1S$, а в конце второго — $1{,}21S$. В начале третьего года вклад составит $1{,}21S+3$, а в конце — $1{,}331S+3{,}3$. В начале четвёртого года вклад составит $1{,}331S+6{,}3$, а в конце — $1{,}4641S+6{,}93$.

По условию, нужно найти наибольшее целое S, для которого выполнено неравенство

$$1{,}4641S+6{,}93<25;\ S<12\frac{5008}{14641}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 12. Значит, размер первоначального вклада составляет 12 млн рублей.

Ответ: 12 млн рублей.

Дифференцированный платеж

№1. Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате **сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину**. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

№1. Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

Пусть $\boldsymbol{S}$ – сумма кредита; $\boldsymbol{p}$ – месячная процентная ставка; $\boldsymbol{x} = 1 + 0{,}01p$.

$$S : 6 = \frac{1}{6}S$$

Месяц	Долг после начисления %	Платеж	Долг после платежа
1-й			
2-й			
3-й			
4-й			
5-й			
6-й			

Месяц	Долг после начисления %	Платеж	Долг после платежа
1-й	Sx	$Sx-\frac{5}{6}S$	$\frac{5}{6}S$
2-й	$\frac{5}{6}Sx$	$\frac{5}{6}Sx-\frac{4}{6}S$	$\frac{4}{6}S$
3-й	$\frac{4}{6}Sx$	$\frac{4}{6}Sx-\frac{3}{6}S$	$\frac{3}{6}S$
4-й	$\frac{3}{6}Sx$	$\frac{3}{6}Sx-\frac{2}{6}S$	$\frac{2}{6}S$
5-й	$\frac{2}{6}Sx$	$\frac{2}{6}Sx-\frac{1}{6}S$	$\frac{1}{6}S$
6-й	$\frac{1}{6}Sx$	$\frac{1}{6}Sx$	0

Дифференцированный платеж с «подвохом»

<u>№4.</u> 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условие его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15-го числа 16-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;

— к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1608 тысяч рублей?

Месяц	Долг после начисления %, тыс.руб.	Платеж, тыс.руб.	Долг после платежа, тыс.руб.
1-й	Sx	$Sx-\left(\frac{15}{16}S+25\right)$	$\frac{15}{16}S+25$
2-й	$\frac{15}{16}Sx+25x$	$\left(\frac{15}{16}Sx+25x\right)-\left(\frac{14}{16}S+2\cdot 25\right)$	$\frac{14}{16}S+2\cdot 25$
…	**…**	**…**	**…**
15-й	$\frac{2}{16}Sx+14\cdot 25x$	$\left(\frac{2}{16}Sx+14\cdot 25x\right)-\left(\frac{1}{16}S+15\cdot 25\right)$	$\frac{1}{16}S+15\cdot 25$
16-й	$\frac{1}{16}Sx+15\cdot 25x$	$\left(\frac{1}{16}Sx+15\cdot 25x\right)-16\cdot 25$	400
17-й	$400x$	$16\cdot 25x$	0

$$\frac{S-400}{16}=\frac{1}{16}S-25$$

Месяц	Долг после начисления %, тыс.руб.	Платеж, тыс.руб.	Долг после платежа, тыс.руб.
1-й	Sx	$Sx-\left(\frac{15}{16}S+25\right)$	$\frac{15}{16}S+25$
2-й	$\frac{15}{16}Sx+25x$	$\left(\frac{15}{16}Sx+25x\right)-\left(\frac{14}{16}S+2\cdot 25\right)$	$\frac{14}{16}S+2\cdot 25$
…	…	…	…
15-й	$\frac{2}{16}Sx+14\cdot 25x$	$\left(\frac{2}{16}Sx+14\cdot 25x\right)-\left(\frac{1}{16}S+15\cdot 25\right)$	$\frac{1}{16}S+15\cdot 25$
16-й	$\frac{1}{16}Sx+15\cdot 25x$	$\left(\frac{1}{16}Sx+15\cdot 25x\right)-16\cdot 25$	400
17-й	$400x$	$16\cdot 25x$	0

Арифметическая прогрессия

Общая сумма выплат:

$$\frac{\left(Sx-\left(\frac{15}{16}S+25\right)\right)+\left(\left(\frac{1}{16}Sx+15\cdot 25x\right)-16\cdot 25\right)}{2}\cdot 16+16\cdot 25x=$$

$$=\frac{S}{2}(17\cdot 1{,}03-15)+25\cdot 17\cdot 8\cdot(1{,}03-1)=S\cdot 2{,}51+102$$

Имеем уравнение:

$$S\cdot 2{,}51+102=1608$$

$$S=1200\text{ тыс. руб.}=1{,}2\text{ млн. руб.}$$

Ответ: 1,2 млн.руб.

Долг – в таблице

Задача 3.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. Пусть 15-го числа текущего месяца долг равен x, а 15-го числа предыдущего месяца долг равен y. Тогда в конце предыдущего месяца долг равен $1{,}05y$ и поэтому выплата в первой половине текущего месяца равна $1{,}05y - x$.

Значит, в процентах от суммы кредита выплаты в феврале составили $1{,}05 \cdot 100 - 90 = 15$ %, в марте составили $1{,}05 \cdot 90 - 80 = 14{,}5$ %, в апреле – 14%, в мае – 13,5%, в июне - 13%, а в июле $1{,}05 \cdot 50 = 52{,}5$ %. Следовательно, общая сумма выплат составила $28 + 28 + 14 + 52{,}5 = 122{,}5$%.

Ответ: 22,5

Математическая модель – квадратичная функция

Строительство нового завода стоит 100 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+x+7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-\left(0{,}5x^2+x+7\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

Решение.

Прибыль фирмы (в млн рублей) за один год выражается как

$$px-\left(0{,}5x^2+x+7\right)=-0{,}5x^2+(p-1)x-7.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-1$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-1)^2}{2}-7$. Строительство завода окупится не более чем за 4 года, если

$$\frac{(p-1)^2}{2}-7\geq\frac{100}{4};\ (p-1)^2\geq 64;\ (p-9)(p+7)\geq 0,$$

то есть при $p\geq 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p=9$.

Ответ: $p=9$.

Математическая модель – квадратичная функция

Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн. рублей в год. Если продукцию продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px-(0,5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки завода цена продукции p=10 тыс. руб. за единицу, каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. руб. за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

Решение.

Прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год выражается как $px-(0,5x^2+2x+6)=-0,5x^2+(p-2)x-6$.

Это выражение является квадратным трехчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-2$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-2)^2}{2}-6$. Таким образом, в первый год прибыль составит 26 млн рублей, во второй –34,5 млн рублей, в третий –44 млн рублей, в четвертый год –54,5 млн рублей. Поскольку 159=26+34,5+44+54,5, строительство полностью окупится за 4 года.

Ответ: 4.

Задачи на оптимизацию

Решение №2.2 (матем. анализ). Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 гб. из всей первичной информации. Тогда $x^2+y^2=3364$, а обработано будет $20x+21y$ гб. информации. Выразим y через x: $y=\sqrt{3364-x^2}$. Требуется найти наибольшее значение функции $f(x)=20x+21\sqrt{3364-x^2}$.

$$f'(x)=20-\frac{21x}{\sqrt{3364-x^2}},\quad f'(x)=0,\quad 400=\frac{441x^2}{3364-x^2},\quad x^2=\frac{400\cdot 3364}{841}=1600,\quad x=40$$

Поэтому $x=40$ единственная критическая точка и $y=\sqrt{3364-1600}=42$. Условия $25\le x\le 55$, $25\le y\le 55$ выполнены. Если $x<40$, то $x^2<1600$, $400>\dfrac{441x^2}{3364-x^2}$ и $f'(x)>0$. Если $x>40$, то $f'(x)<0$. Поэтому $x=40$ есть точка максимума. Значит, $f_{наиб}=f(40)=20\cdot 40+21\cdot 42=1682$.

Ответ: 1682.

14. Стереометрическая задача

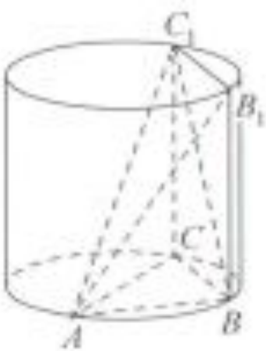
14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

Решение.

а) Рассмотрим плоскость, проходящую через ось цилиндра и прямую AC_1. Обозначим точку пересечения этой плоскости и окружности основания цилиндра, содержащей точку A, через C. Тогда CC_1 — образующая цилиндра. Отрезок AC пересекает ось цилиндра. Значит, он проходит через центр окружности основания цилиндра, то есть является её диаметром. Следовательно, угол ABC прямой.



Прямая CC_1 является образующей цилиндра, поэтому она перпендикулярна прямой AB. Таким образом, прямая AB перпендикулярна плоскости BCC_1, а значит, угол ABC_1 прямой.

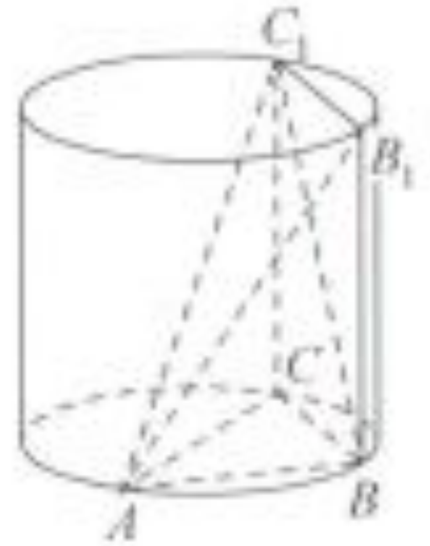
б) Поскольку прямые BB_1 и CC_1 параллельны, искомый угол равен углу AC_1C.

Треугольники ABC и ACC_1 являются прямоугольными, поэтому:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + B_1C_1^2} = 10;\ \operatorname{tg}\angle AC_1C = \frac{AC}{CC_1} = \frac{AC}{BB_1} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Учимся оформлять!



1) OO_1 – ось цилиндра. Так как $OO_1 \cap AC_1$, то AC – диаметр.

2) $\angle ABC = 90^\circ$ (по свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр).

3) $\left.\begin{matrix} AB \perp BC \\ AB \perp CC_1 \\ BC \cap CC_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow AB \perp (BCC_1).$

4) $\left.\begin{matrix} AB \perp (BCC_1) \\ BC_1 \in (BCC_1) \end{matrix}\right| \Rightarrow AB \perp BC_1 \Rightarrow \angle ABC_1 = 90^\circ.$

или

1) OO_1 – ось цилиндра. Так как $OO_1 \cap AC_1$, то AC – диаметр.

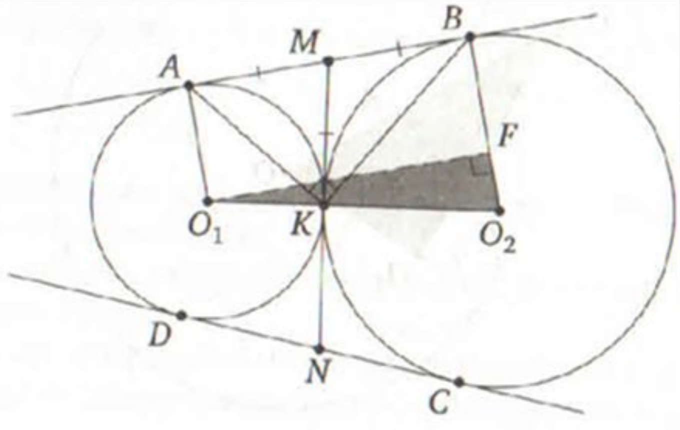
2) $\angle ABC = 90^\circ$ (по свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр).

3) $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ C_1B - \textit{наклонная} \\ BC - \textit{проекция} \end{matrix}\right| \Rightarrow C_1B \perp AB \Rightarrow \angle ABC_1 = 90^\circ.$

16. Планиметрическая задача

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ключевые задачи



1) $\angle AKB = 90^\circ$.

2) $AB = 2\sqrt{r \cdot R}$.

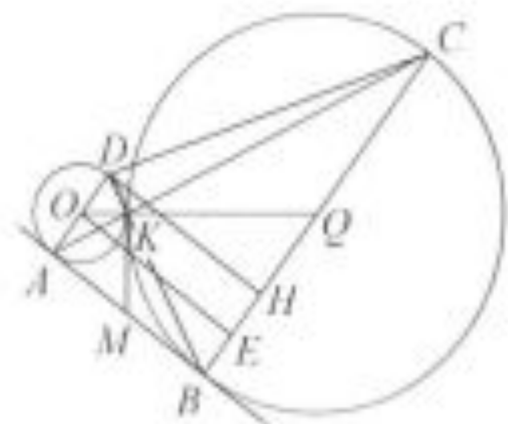
3) $MN = AB = 2\sqrt{r \cdot R}$.

4) ABCD – описанная трапеция, $h = \dfrac{4rR}{r+R}$.

Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй окружности в точке B. Луч BK пересекает первую окружность в точке D, луч AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — трапеция.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD, если радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.



18. Задачи с параметром

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

При $a \le 0$ система не имеет решений. При $a > 0$ исходная система равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = 12a - 28, \\ x^2 + y^2 = a; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{12a - 28}{a}, \\ x^2 + y^2 = a; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 = a + \frac{12a - 28}{a}, \\ 2y^2 = a - \frac{12a - 28}{a}. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда a удовлетворяет системе неравенств:

$$\begin{cases} a + \frac{12a - 28}{a} > 0, \\ a - \frac{12a - 28}{a} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a^2 + 12a - 28}{a} > 0, \\ \frac{a^2 - 12a + 28}{a} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(a + 14)(a - 2)}{a} > 0, \\ \frac{\left(a - 6 - 2\sqrt{2}\right)\left(a - 6 + 2\sqrt{2}\right)}{a} > 0, \end{cases}$$

откуда $2 < a < 6 - 2\sqrt{2}$ и $a > 6 + 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2 < a < 6 - 2\sqrt{2}$; $a > 6 + 2\sqrt{2}$.

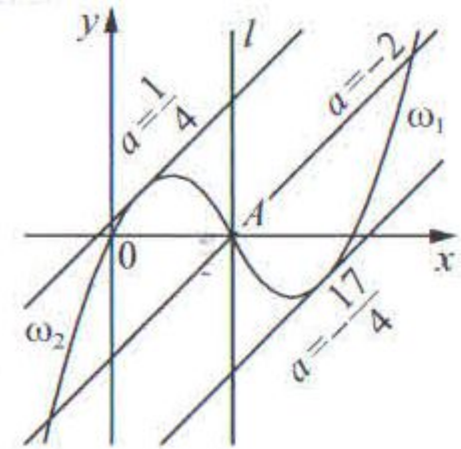
Учить методам

Графический метод

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-2)(y+2x-4)=|x-2|^3,\\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения. Ответ: $-\frac{17}{4}<a<-2;\ -2<a<\frac{1}{4}$.



Метод областей

Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}|x|+|a|\le 4,\\ x^2+8x<16a+48\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1;0]$.

Инвариантность

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-|x+a+3|=|x-a-3|-(a+3)^2$$

имеет единственный корень.

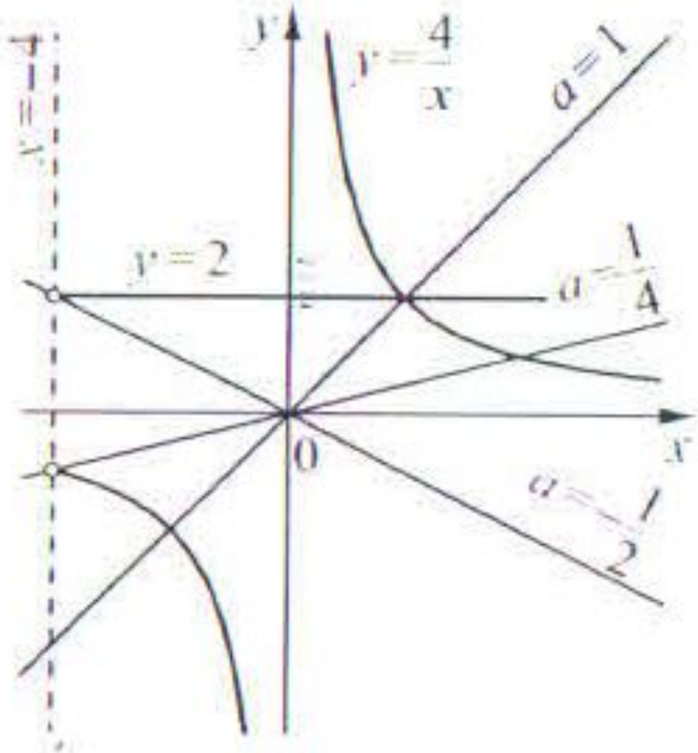
Графический метод

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{x+4}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $0 < a \le \frac{1}{4}$; $a = 1$.



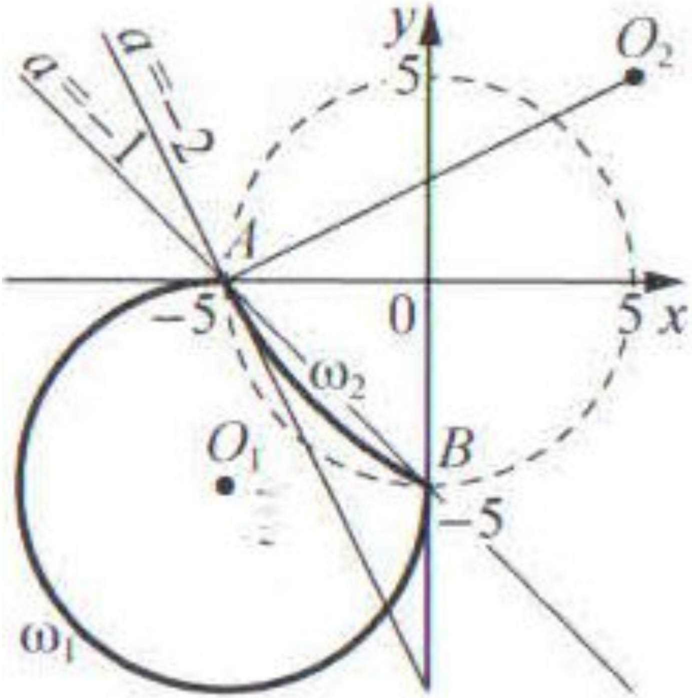
Графический метод

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|x^2+y^2-25\right|+10x+10y+50=0, \\ y=a(x+5) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Ответ: $-2<a<-1$.

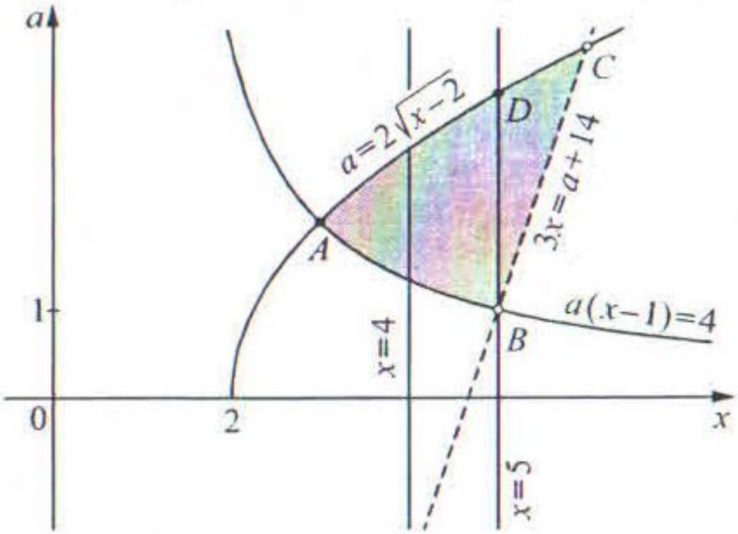


Метод областей

Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a(x-1) \geq 4, \\ 2\sqrt{x-2} \geq a, \\ 3x < a+14 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$



Прямая $x=5$ проходит через точку $B(5;1)$ и пересекает ветвь параболы $2\sqrt{x-2}=a$ в точке $D(5;2\sqrt{3})$. Прямая $x=4$ пересекает гиперболу $a(x-1)=4$ и ветвь параболы $2\sqrt{x-2}=a$ в точках, ординаты которых принадлежат интервалу $(1;2\sqrt{3})$. Следовательно, данная система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4;5]$ при $1<a\leq 2\sqrt{3}$.

Ответ: $1<a\leq 2\sqrt{3}$.

Переводим формулы на язык геометрии

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-5a+1)^2+(y-2a-1)^2=a-2,\\ 3x-4y=2a+3\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Если $a<2$, то система не имеет решений.

Пусть $a=2$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases}(x-9)^2+(y-5)^2=0,\\ 3x-4y=7.\end{cases}$$

Первому уравнению удовлетворяет только одна пара $(9;5)$, которая также удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому при $a=2$ система имеет единственное решение.

Пусть $a>2$ – фиксированное число. Решения первого уравнения системы лежат на окружности с центром в точке $(5a-1;2a+1)$ и радиусом $\sqrt{a-2}$. Решения второго уравнения – точки прямой $3x-4y=2a+3$. Следовательно, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда расстояние от центра $(5a-1;2a+1)$ окружности до прямой $3x-4y=2a+3$ равно радиусу $\sqrt{a-2}$ данной окружности. Получаем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{|3(5a-1)-4(2a+1)-2a-3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{a-2},\\ a>2;\end{cases}\quad \begin{cases}|a-2|=\sqrt{a-2},\\ a>2;\end{cases}\quad a=3.$$

Следовательно, система имеет единственное решение при $a=2$ и при $a=3$.

Ответ: 2; 3.

19. Задача по дискретной математике

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Обязательно – примеры!

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Решение.

а) Пять чисел 6, 7, 8, 9, 10 удовлетворяют условию задачи.

б) Заметим, что среди написанных чисел только одно число может быть больше 9, поскольку произведение любых двух различных натуральных чисел, больших 9, больше 100. Аналогично, среди написанных чисел только одно число может быть меньше 7, поскольку произведение любых двух различных натуральных чисел, меньших 7, меньше 40. Таким образом, помимо наибольшего и наименьшего чисел, на доске могут быть написаны только числа 7, 8 или 9. Следовательно, на доске не может быть более пяти чисел.

Тяжеловесный пункт задачи

в) Пусть на доске написаны числа a, b, c и d, причём $a<b<c<d$. Тогда для выполнения условий задачи достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$ab>40,\ cd<100.$$

В пункте «б» было доказано, что $7 \le b < c \le 9$. Разберём три случая.

Если $b=7$, $c=8$, то $7a>40$, $8d<100$, откуда, учитывая, что a и d — целые, получаем $a=6$, $9 \le d \le 12$. В этом случае наибольшее возможное значение суммы достигается при $d=12$ и равно 33.

Если $b=7$, $c=9$, то $7a>40$, $9d<100$, откуда, учитывая, что a и d — целые, получаем $a=6$, $10 \le d \le 11$. В этом случае наибольшее возможное значение суммы достигается при $d=11$ и равно 33.

Если $b=8$, $c=9$, то $8a>40$, $9d<100$, откуда, учитывая, что a и d — целые, получаем $6 \le a \le 7$, $10 \le d \le 11$. В этом случае наибольшее возможное значение суммы достигается при $a=7$ и $d=11$ и равно 35.

Таким образом, наибольшее значение суммы равно 35.

Ответ: а) да; б) нет; в) 35.