ТВЕРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

ТЕМА 9.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ФУНКЦИЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Случаи функций двух переменных ***z*** = ***f***(**x**, **y**) и трех переменных (например, распределение температуры в некотором объёме $T = f(x, y, z)$

можно дать геометрическое толкование $M(x, y, z)$ как точек трёхмерного пространства, а множество таких точек с координатами (x_i, y_j, z_k)

– как часть пространства, или геометрически – тело.

Но при n >3 возможности непосредственной геометрической интерпретации уже нет.

При изучении функций многих переменных n >3 вводят понятие n – мерного пространства.

Следовательно, случаи функций двух и трёх переменных – это частные случаи функции многих переменных

1. Определение функции нескольких переменных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Функция $f : X \to U$ *называется* ***функцией n переменных*** .

Записывают: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

где f – закон, задающий соответствие между $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и u .

Значение $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, \ldots, x_n = x_{0n}$

записывают в виде

$u = f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ или $u\big|_{x_1=x_{01}, x_2=x_{02}, \ldots, x_n=x_{0n}}$

Назовём n – мерной "точкой" систему из n вещественных чисел: $M(x_1, \ldots, x_n)$.

Сами числа $x_1, \ldots, x_n$ являются координатами этой точки M.

Множество всех n – мерных "точек" составляет n – мерное пространство, которое иногда называют арифметическим.

Основные понятия и геометрическое изображение функции двух переменных

До сих пор мы изучали совместное изменение двух переменных (x, y), из которых одна зависела от другой: значение независимой переменной x уже вполне определяло значение зависимой переменной y (или функции $y = f(x)$).

На самом деле в жизни, как и в науке, нередки случаи, когда независимых переменных оказывается несколько.

• при изучении физического состояния какого-либо тела часто приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Таковы, например, плотность, температура, электрический потенциал, т. е. это функции точки, и зависят они, очевидно, от координат x, y, z. Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим независимым переменным присоединяется ещё и время t.

Определение 1 *Переменная z называется функцией независимых переменных x, y на множестве D, если каждой паре значений $x = x_1$, $y = y_1$ из D по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определённое значение z_1 из Z (Z – область изменения функции).*

В этом случае z – однозначная функция своих аргументов, D – область определения (существования) функции, переменные x, y по отношению к функции z называются аргументами. Функциональная зависимость обозначается так: $z = f(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т. д.

Пусть функция

$$\boxed{z = f(x, y)}$$

определена в некоторой области D на плоскости xOy.

Множество точек $P(x, y, f(x, y))$, определяемое уравнением ,
является геометрическим образом функции двух переменных – это поверхность, которая проектируется в область D (см. рис.).

Точка M является проекцией точки P.

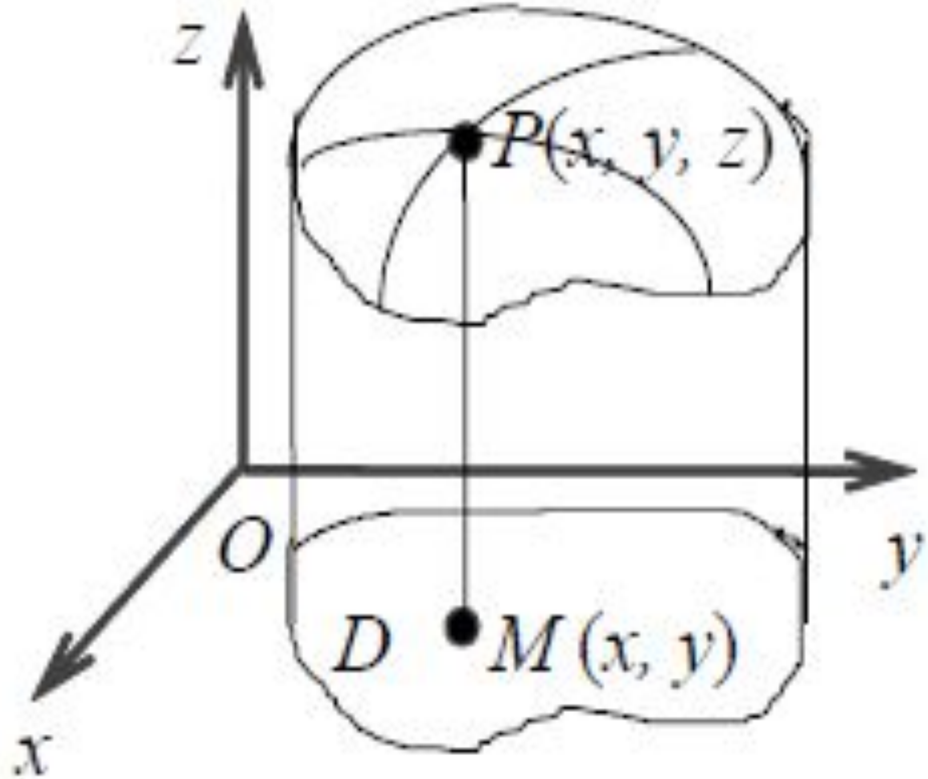
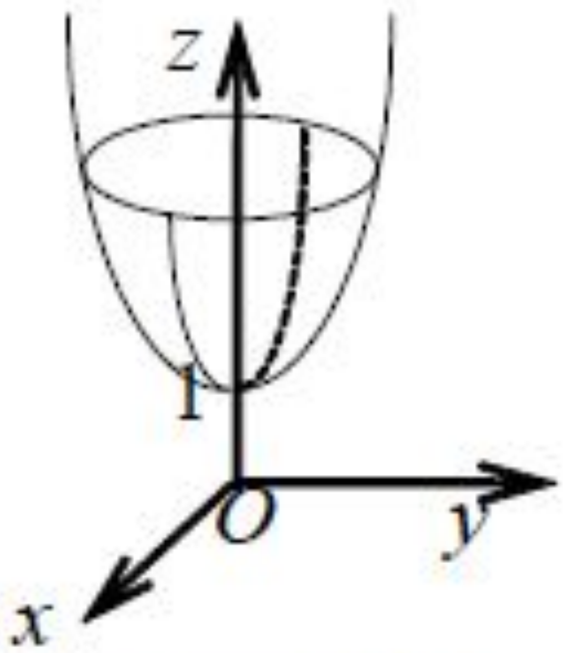


Рис.

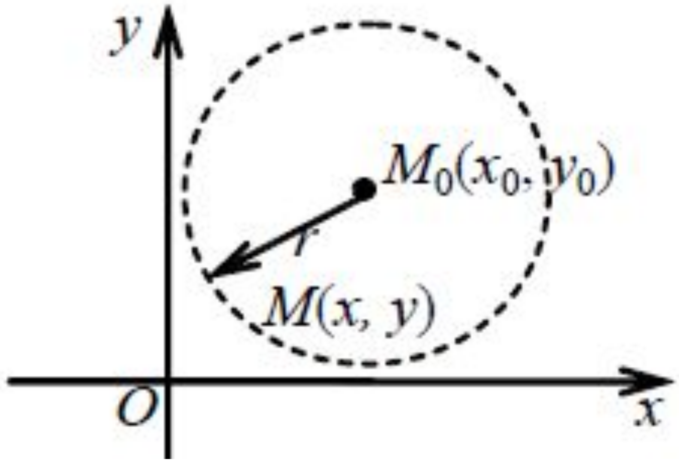
Например, функция $z = x^2 + y^2 + 1$ геометрически представляет собой уравнение параболоида, смещённого относительно начала координат на единицу масштаба по оси Oz (рис.). Областью определения этой функции является вся плоскость xOy.



Определение *Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность точек $M(x, y)$, лежащих внутри круга радиуса r, с центром в точке M_0*

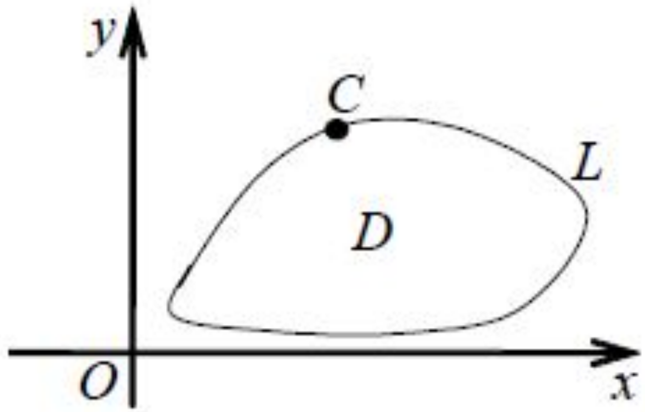
$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r.$$

Если функция обладает некоторым свойством в точке M_0, то она обладает этим свойством в окрестности точки M_0.



Определение *Точка $C(x, y)$ называется граничной для некоторой области D, если в её окрестности есть как точки, принадлежащие области D, так и точки, не содержащиеся в области D. Всё множество граничных точек образует границу области.*

На рис. – это линия L



Определение *Если граница (линия L) принадлежит области D, то область называют* ***замкнутой и*** *обозначают $\overline{D}$, границу при этом изображают сплошной линией. В противном случае ($L \notin D$) область D –* ***открытая*** *(не замкнутая). В этом случае границу изображают пунктирной линией.*

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D \in xOy$, содержащей точку M_0.

Определение *Число A называется* ***пределом функции*** $f(x, y)$ *при стремлении* $M(x, y)$ *к* $M_0(x_0, y_0)$, *если для всякого как угодно мало-го* $\varepsilon > 0$ *существует (или найдётся) число* $r(\varepsilon) > 0$, *такое, что для всех точек* (x, y), *для которых выполняется неравенство* $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$, *имеет место неравенство* $|A - f(x,y)| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$, или $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$.

Геометрически можно интерпретировать это определение так: число A является пределом функции $f(x, y)$ при $M \to M_0$, если в ε-окрестность этого числа попадут все значения функции, соответствующие точкам (x, y) из r-окрестности точки M_0.

Определение 21. *Функция f(x, y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в точке и некоторой её окрестности и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, или $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.*

Введём обозначения:

$$\Delta x = x - x_0, \ \Delta y = y - y_0, \ \Delta z = z - z_0, \ z_0 = f(x_0, y_0).$$

Определение 22. *Функция f(x, y) непрерывна в точке (x_0, y_0), если* $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)\right] = 0$, или $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Иначе говоря, *функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, если бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.*

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Для наглядности, здесь и далее все определения и утверждения будем формулировать для функции 2-х (или 3-х) переменных. На случай большего числа неизвестных они обобщаются естественным образом.

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$,

Пусть $\forall M_0(x_0,y_0) \in D$.

Придадим x_0 приращение Δx, оставляя значение y_0 неизмененным (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$).

При этом $z = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta_x z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

$\Delta_x z(M_0)$ называется ***частным приращением*** функции $z = f(x,y)$ ***по x в точке*** $M_0(x_0,y_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Предел при* $\Delta x \to 0$ *отношения*

$$\boxed{\frac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}}$$

(если он существует и конечен) *называется* ***частной производной функции $z = f(x,y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0,y_0)$.***

Обозначают:

или $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$, $z'_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $f'_x(x_0, y_0)$

$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$, $z'_x(M_0)$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $f'_x(M_0)$

Замечания.

1) Обозначения

$$\boxed{\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}} \quad \text{и} \quad \boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}$$

надо понимать как целые символы, а не как частное двух величин. Отдельно взятые выражения $\partial z(x_0,y_0)$ и ∂x смысла не имеют.

2) $z'_x(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x,y)$ по x в точке $M_0(x_0,y_0)$ (физический смысл частной производной по x).

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x,y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Обозначают: $\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad z'_y(M_0), \quad \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad f'_y(M_0)$

Соответствие

$$(x_0;y_0)\to f'_x(x_0;y_0) \quad \text{и} \quad (x_0;y_0)\to f'_y(x_0;y_0)$$

является функцией, определенной на $D_1(D_2)\subseteq$ D(f).

Ее называют ***частной производной функции** z = f(x,y) **по переменной x*** (*y*) и обозначают

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad z'_x,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad f'_x(x,y),\quad \frac{\partial f(M)}{\partial x},\quad f'_x(M)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y},\quad z'_y,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad f'_y(x,y),\quad \frac{\partial f(M)}{\partial y},\quad f'_y(M)\right).$$

Операция нахождения для функции z = *f*(*x*,*y*) ее частных производных

$$\boxed{f'_x(x,y) \quad \text{и} \quad f'_y(x,y)}$$

называется ***дифференцированием функции* z = f(x,y) *по переменной x и y*** соответственно.

Пример Найти частные производные функции двух переменных:

$$z = x^2 + y^3 + xy + 8;$$

Решение. Полагая $y = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной x: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$.

Полагая $x = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной y: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + x$.

Фактически, – это обыкновенная производная функции $z = f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной x (соответственно y) $f'_x(x,y)$ $\left(f'_y(x,y) \right)$ при постоянном значении другой переменной.

Поэтому, вычисление частных производных производится по тем же самым правилам, что и для функции одной переменой. При этом, одна из переменных считается константой.

Пример

$$z=\ln\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right);$$

48.2. Считая z функцией только от x, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\left(x^2-y^2\right)'_x\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(2x-0)\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+x}{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Аналогично, считая z функцией только от y, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \left(0+\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}(0-2y)\right) = \frac{-y}{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\cdot\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Пример $z = e^{x/y}$;

Решение.

Полагая $y = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y} \cdot x' = \frac{1}{y} e^{x/y}.$$

Полагая $x = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = e^{x/y} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} e^{x/y}.$$

Пример $z = \sin(xy) + 5x^3 y + x - y^2$

Решение. Полагая $y = \text{const}$, находим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy) \cdot (xy)'_x + 5y \cdot (x^3)' + 1 - 0 = y\cos(xy) + 15yx^2 + 1.$$

Полагая $x = \text{const}$, находим $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(xy) \cdot (xy)'_y + 5x^3 \cdot y' + 0 - 2y = x\cos(xy) + 5x^3 - 2y.$$

Пример $z = x^y$;

Решение. Полагая, что $y = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной x:

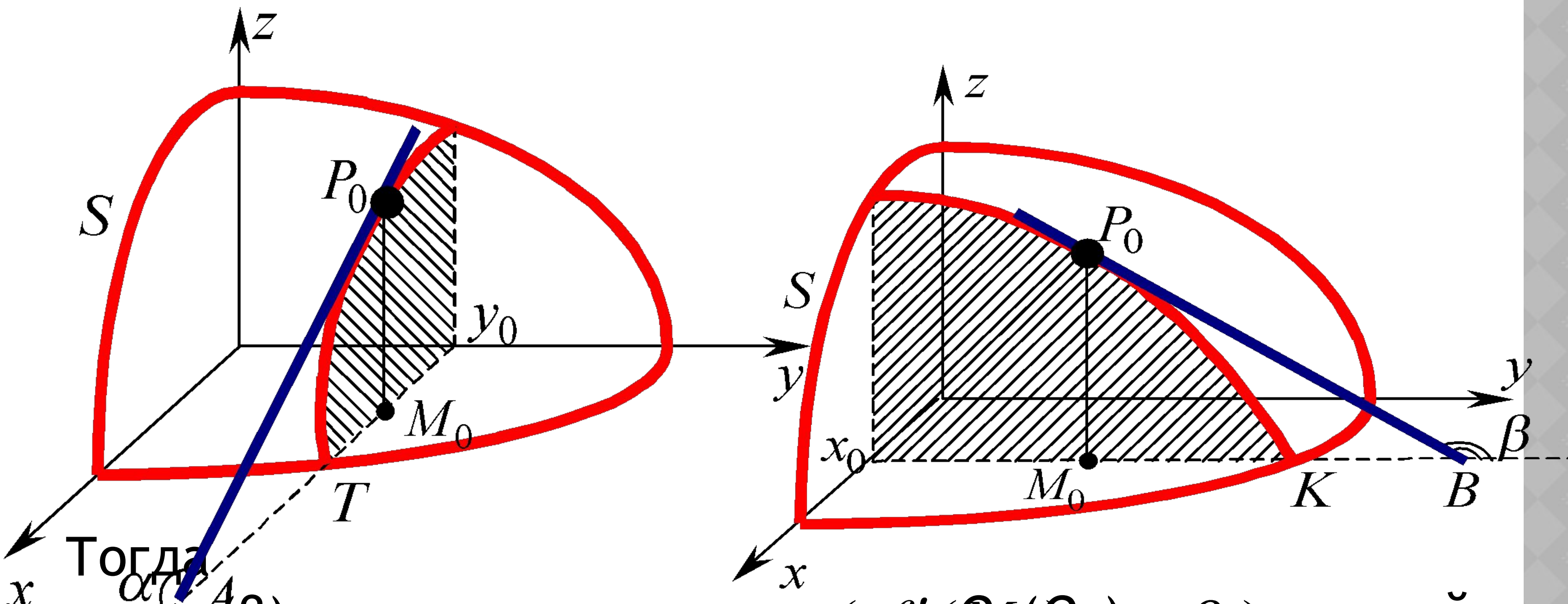
$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}.$$

Считая z функцией от y, находим $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ **частных производных функции двух переменных.**

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в $M_0(x_0,y_0)$ частную производную по x (y).

Пусть поверхность ***S*** – график функции $z = f(x,y)$.



Тогда $f'_x(M_0) = \operatorname{tg}\alpha$ $\left(f'_y(M_0) = \operatorname{tg}\beta\right)$,

где α(β) – угол наклона к оси Ox (Oy) касательной, проведенной в точке $P_0(x_0,y_0,\ f(x_0,y_0))$ к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = y_0$ ($x = x_0$).

ГРАДИЕНТ

$$z = f(M)$$

$$grad\, z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right\}$$

$$M(x, y)$$

$$u = f(x, y, z)$$

$$grad\, u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

$$u = x^2 - arctg(y + z)$$

$$M(2,1,1)$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \qquad f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ 2-ГО ПОРЯДКА

$$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2}$$

$$z = x^3 + y^3 + x^2 y^2$$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

$$f(x, y)$$

$$M_0(x_0, y_0)$$

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

$$z = y^4 - 2xy^2 + x^2 + 2y + y^2$$