ТВЕРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

ТЕМА 10. ЧИСЛОВЫЕ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

Числовым рядом называется сумма вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

где числа u_1, u_2, u_3,…,u_n,… – ***члены ряда*** (бесконечная последовательность),
u_n – ***общий член ряда***.

Частичные суммы ряда:
$S_1=u_1$,
$S_2=u_1+u_2$,
$S_3=u_1+u_2+u_3$,
……………………
$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *или* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = S$,

то ряд называется ***сходящимся****, а число S –* ***суммой*** *сходящегося ряда.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S$$

Если частичная сумма S_n *ряда при неограниченном возрастании n не имеет конечного предела (в частности, стремится к +∞ или к -∞), то такой ряд называется* ***расходящимся****.*

Пример. *Найти сумму членов ряда:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$= \frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots;$$

Находим частичные суммы членов ряда:

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{3}; \qquad S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5};$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}; \qquad S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{63}$$
$$= \frac{4}{9}, \ldots.$$

Запишем последовательность частичных $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$

Общий член этой последовательности есть: *n/(2n+1)*

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Последовательность частичных сумм имеет предел, равный 1/2. Итак, ряд сходится и его сумма равна 1/2.

Необходимый признак сходимости ряда

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *может <u>сходиться</u> только при условии, что его общий член* u_n *при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *<u>расходится</u> – это достаточный признак расходимости ряда.*

Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами

а) Признак сравнения рядов с положительными членами.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда: исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

б) Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} \ldots (u_n > 0)$$

выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ *, то ряд сходится при l<1 и расходится при l>1.*

Признак Даламбера не дает ответа, если l=1. В этом случае для исследования ряда применяют другие приемы.

Геометрический ряд

-образован из членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

$$(a > 0)$$

сходится при $|q| < 1$

расходится при $|q| \geq 1$

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

сходится при p >1

расходится при p ≤ 1

Пример. *Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}=0$$

Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Для признака сравнения сравним данный ряд с геометрическим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

который сходится, так как q=1/2<1.

Сравнивая члены нашего ряда с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства:

$$\frac{1}{2} < 1; \frac{1}{3\cdot 2^2} < \frac{1}{2^2}; \frac{1}{5\cdot 2^3} < \frac{1}{2^3}; \ldots; \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}; \ldots$$

Т.е. члены данного ряда соответственно меньше членов геометрического ряда. Следовательно, данный ряд сходится.

Пример. *Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}=\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\cdots+\frac{2n}{5^n}+\cdots;$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}:\frac{2n}{5^n}=\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение 1:

Функциональным называется ряд, члены которого есть непрерывные функции от аргумента ***x:***

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

При ***x=n*** функциональный ряд становится числовым, который либо сходится, либо расходится.

ПРИМЕР ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

Рассмотрим геометрическую прогрессию со знаменателем *x*:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Геометрическая прогрессия сходится, если ее знаменатель $|x| < 1$. Тогда она имеет сумму $S = \dfrac{1}{1-x}$, которая

очевидно является функцией от *x*.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

<u>Определение 2:</u>

Совокупность значений ***x***, при которых ФР сходится, называется <u>*областью сходимости*</u> ряда.

Сумма ФР может быть представлена:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

Определение 3:

ФР называется равномерно сходящимся в некоторой области X, если для каждого сколь угодно малого ε>0 найдется такое N(ε)>0, что при n>N выполняется неравенство:

$$\left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|R_n(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

S(x) – непрерывная функция

Определение 4:

Пусть даны:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \; \textit{функциональный ряд}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; \textit{знакоположительный числовой ряд}$$

причем в некоторой области выполняется условие:

$$|u_1(x)| \le a_1, \; |u_2(x)| \le a_2, \ldots, |u_n(x)| \le a_n, \ldots$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; \textit{является мажорантой для} \; \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

ПРИЗНАК ВЕЙЕРШТРАСА

- Если *мажоранта* функционального ряда сходится, то сходится и функциональный ряд <u>абсолютно и равномерно.</u>

СВОЙСТВА АБСОЛЮТНО И РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Пусть даны функциональные ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \quad \textit{равномерно сходящийся на } [a; b]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = S_1(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = S_2(x) \textit{ равномерно сходящиеся, причем}:$$

$$v_n(x) = u_n'(x) \quad \textit{и} \quad \varphi_n(x) = \int_a^b u_n(x)dx \quad \textit{тогда}:$$

$$S_1(x) = S'(x) \qquad S_2(x) = \int_a^b S(x)dx$$

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение 5:

Функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + ..$$

$$a_0, a_1, \ldots a_n - \textit{вещественные числа}$$

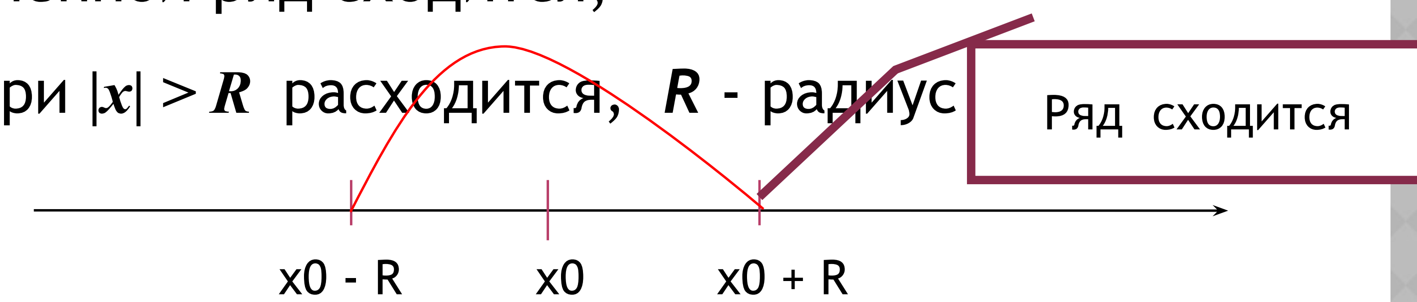
называется степенным рядом.

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

1. Если степенной ряд сходится при $x = x1$, то он сходится для всех $|x| < |x1|$.
2. Если степенной ряд расходится при $x = x2$, то он расходится для всех $|x| > |x2|$.

Из теоремы следует, что существует такое положительное значение $x = R$, что при $|x| < R$ степенной ряд сходится,

а при $|x| > R$ расходится, R - радиус



НАХОЖДЕНИЕ РАДИУСА СХОДИМОСТИ

1. <u>По признаку Даламбера:</u>

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

НАХОЖДЕНИЕ РАДИУСА СХОДИМОСТИ

2. По радикальному признаку Коши:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

РЯД ТЕЙЛОРА

Определение 6:

Рядом Тейлора функции ***f(x)*** называется степенной ряд вида:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{\backslash}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{\backslash\backslash}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

это есть разложение функции в окрестности точки x_0.

Коэффициентами являются производные высших порядков в точке x_0, т.е. Для разложения в ряд Тейлора необходимо, чтобы ***f(x)*** существовала в x_0 вместе со своими производными.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ В РЯД ТЕЙЛОРА

Определение 6:

Всякая функция ***f(x)*** бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-x_0|<r$ может быть разложена в степенной ряд Тейлора, если в этом интервале остаток ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

РЯД МАКЛОРЕНА

Определение 7:

Рядом Маклорена функции ***f(x)*** называется степенной ряд вида:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{\backslash}(0)}{1!}x + \frac{f^{\backslash\backslash}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

это есть разложение функции в окрестности точки $x=0$.

Коэффициентами являются производные высших порядков в точке $x_{=0}$, т.е. Для разложения в ряд Маклорена необходимо, чтобы ***f(x)***существовала в $x=0$ вместе со своими производными.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

называется степенным по степеням x . Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

является степенным по степеням $(x - x_0)$.

ИНТЕРВАЛ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Для любого степенного ряда существует конечное неотрицательное число *R* - радиус сходимости - такое, что если $R > 0$, то при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится.

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда. Если $R = +\infty$, то интервал сходимости представляет собой всю числовую прямую. Если же $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь в точке x=0.

НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕРВАЛА СХОДИМОСТИ ПО ПРИЗНАКУ ДАЛАМБЕРА

Составим ряд из абсолютных величин членов степенного ряда и найдем интервал, в котором он будет сходиться, Тогда в этом интервале данный степенной ряд будет сходиться абсолютно. Согласно признаку Даламбера, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x^n|}<1,$$

то степенной ряд абсолютно сходится для всех *x*, удовлетворяющих этому условию.

ПРОДОЛЖЕНИЕ

В этом случае ряд будет сходиться внутри интервала (-*R*,*R*),где *R*-это радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

За пределами этого интервала ряд будет расходиться, а на концах интервала, где

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = 1$$

, требуется

дополнительное исследование.

ПРИМЕРЫ

Найти интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в интервале (-1,1).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|x^{n+1}\right|(2n+1)}{(2n+3)\cdot\left|x\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left|x\right| \frac{2n+1}{2n+3} = \left|x\right| \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n} = \left|x\right| < 1$$

ПРИМЕРЫ

Положим $x = 1$. Тогда получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. Этот ряд расходится

(сравните его с гармоническим рядом).

Полагая $x = -1$, имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$,

который сходится условно в силу теоремы Лейбница.

Итак, степенной ряд сходится в промежутке [-1,1).

ПРИМЕРЫ

Найти интервал сходимости степенного

ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Здесь $u_n = \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}$;

=

.Тогда

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1)|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0 \,.$$

Но 0<1 всегда, т.е. независимо от х. Это означает, что степенной ряд сходится независимо от х, т.е. на всей числовой прямой.

Итак, интервал сходимости ряда - это промежуток $(-\infty, \infty)$.

ПРИМЕР

Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)|x|}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1)\ .$$

Этот предел может быть меньше единицы, если только x=0 (иначе он будет равен бесконечности). Это означает, что степенной ряд сходится лишь в точке x=0.

Свойства степенных рядов. Непрерывность суммы ряда

1. Сумма степенного ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

является непрерывной функцией в каждой точке интервала сходимости этого ряда.

Например,

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

непрерывна , если $|x| < 1$.

ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

2. Ряд, полученный почленным дифференцированием степенного ряда, является степенным рядом с тем же интервалом сходимости, что и данный ряд, причем :если

то $S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$,

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом промежутке, целиком входящем в интервал сходимости степенного ряда, при этом

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} a_0 dx + \int_{\alpha}^{\beta} a_1 x dx + \ldots + \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx + \ldots$$

где

$$(\alpha, \beta) \subset (-R, R)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

***Определение*.** Если бесконечно дифференцируемая функция является суммой степенного ряда, то говорят, что она разлагается в степенной ряд .

***Опр*.** Рядом Тейлора функции *f(x)* называется ряд, коэффициенты которого определяются

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

по формулам , т.е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

.

СТЕПЕННОЙ РЯД КАК РЯД ТЕЙЛОРА

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x_0

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

то ряд справа есть ее ряд Тейлора.

Короче: если функция представлена в виде степенного ряда, то этот ряд является ее рядом Тейлора.

Представление функции ее рядом Тейлора единственно.

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Рассмотрим *n*-ю частичную сумму ряда Тейлора:

$$S_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Этот многочлен называется многочленом Тейлора функции $f(x)$.

Разность $R_n(x)=f(x)-S_n(x)$ называется остаточным членом ряда Тейлора.

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ где } c \in (x_0, x)$$

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Условия сходимости ряда Тейлора к функции y=f(x)

Для того чтобы функцию можно было разложить в ряд Тейлора на интервале (-R,R),необходимо и достаточно, чтобы функция на этом интервале имела производные всех порядков и чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при всех

$$x \in (-R, R) \; при \; \mathrm{n} \to \infty$$

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗЛОЖИМОСТИ ФУНКЦИИ В РЯД ТЕЙЛОРА

Если функция f(x) на интервале (-R,R) бесконечно дифференцируема и ее производные равномерно ограничены в совокупности, т. е. существует такая константа М, что для всех

$x \in (-R, R)$ *выполняется условие*

$\left| f^{(n)}(x) \right| \le M$ *при n=0,1,2,…, то функцию можно разложить в ряд Тейлора на этом интервале.*

РАЗЛОЖЕНИЕ

$$f(x) = e^x$$

Все производные этой функции совпадают с самой функцией, а в точке x=0 они равны 1. Составим для функции формально ряд Маклорена:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Этот ряд, очевидно, сходится на всей числовой оси. Но все производные функции равномерно ограничены, т. к. $f^{(n+1)}(c) = e^c < e^R$, где R-любое число из интервала сходимости. Поэтому этот ряд сходится именно к функции e^x.

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД СИНУСА.

Вычислим производные синуса:

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$$

$$f'''(x) = \cos(x + 2\frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$$

....

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

$$f(0) = 0,$$

$$f'(0) = 1,$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

....

$$f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$$

....

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Ясно, что все производные синуса не превосходят по модулю единицу. Так что запишем ряд, который будет разложением синуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + .. = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

при этом видно, что этот ряд сходится на всей числовой оси.

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Разложения 1–7 позволяют, используя соответствующее разложение, вычислять приближенно значения функций, интегралы, приближенно интегрировать дифференциальные уравнения.

Пример . С помощью степенного ряда вычислить с точностью до 0,0001 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

РЕШЕНИЕ

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \ldots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots)dx =$$

$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!}dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!}dx + \int_0^1 \frac{x^8}{4!}dx - \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{2\cdot 5}\Big|_0^1 - \frac{x^7}{6\cdot 7}\Big|_0^1 + \frac{x^9}{24\cdot 9}\Big|_0^1 - .. =$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{2\cdot 5}\Big|_0^1 - \frac{x^7}{6\cdot 7}\Big|_0^1 + \frac{x^9}{24\cdot 9}\Big|_0^1 - .. =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + ..$$

Так как получившийся ряд является знакочередующимся, то сумма знакочередующегося ряда не превосходит первого члена такого ряда. Ясно, что часть ряда, которую в задаче следует отбросить, также является знакочередующимся рядом и его сумма не превзойдет модуля первого отброшенного члена ряда.

Таким образом, первый отброшенный член ряда должен быть меньше заданной погрешности, т.е. 0,0001.

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Вычислив еще несколько членов ряда

$$-\frac{1}{1320}, -\frac{1}{9360}, -\frac{1}{75600}$$

видим, что $\frac{1}{75600} < 0{,}0001$

Отбросив этот и следующие за ним члены ряда, получим:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} = 0{,}7468$$

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Вычислить $\sqrt[3]{10}$ с точностью до 0,001.

Преобразуем

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8\frac{10}{8}} = 2\sqrt[3]{1+\frac{2}{8}} = 2\sqrt[3]{1+0,25} = 2(1+0.25)^{\frac{1}{3}}$$

Воспользуемся биномиальным рядом при x=0,25 и $m = \frac{1}{3}.$

Получим

$$\sqrt[3]{10} \approx 2(1+\frac{1}{3}0,25+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}0,25^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}0,25^3) \approx$$

$$\approx 2(1+0,0833-0,0069+0,0009) \approx 2(1+0,0833-0,0069) \approx$$

$$\approx 2,1528 \approx 2,153.$$