Теория вероятностей и математическая статистика

Сложение и умножение вероятностей. Полная вероятность. Формула Бейеса. Схема Бернулли

доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики, кандидат педагогических наук, доцент,
Солдатенков Роман Михайлович

Содержание

Теорема сложения вероятностей и ее следствия

Теорема сложения: Пусть A и B – два несовместных события. Тогда вероятность того, что осуществится хотя бы одно из этих событий, равна сумме их вероятностей, т. е.

$$\boldsymbol{P(A \text{ или } B)=P(A)+P(B)}$$

Если A, B, C, ... , L – несовместные события, то

$$\boldsymbol{P\ (A \text{ или } B \text{ или } C \text{ или} \ldots \text{ или } L\ )=P(A)+P(B)+P(C)+\ldots+P(L)}$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны и единственно возможны, то

$$\boldsymbol{P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1}$$

Сумма вероятностей двух взаимно противоположных событий равна единице:

$$\boldsymbol{P(A_1)+P(\overline{A})=1}$$

Примеры

Пример 1. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность сделать выстрел на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

Пример 2. В урне, содержащей n шаров белого, красного и черного цветов, находятся k белых шаров и l красных. Какова вероятность вынуть шар не черного цвета?

Пример

Пусть на складе имеется 400 электрических лампочек, изготовленных на двух различных заводах, причем на первом изготовлено 75% всех лампочек, а на втором – 25%. Допустим, что среди лампочек, изготовленных первым заводом, 83% удовлетворяют условиям определенного стандарта, а для продукции второго завода этот процент равен 63%. Определим вероятность того, что случайно взятая со склада лампочка окажется удовлетворяющей условиям стандарта.

Теорема умножения

Вероятность события B при условии, что имеет место событие A, называют **условной вероятностью** события B при условии наступления события A и обозначают $\boldsymbol{P_A(B)}$.

Теорема умножения: Вероятность совмещения событий A и B равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого в предположении, что первое имело место:

$$\boldsymbol{P\,(A \text{ и } B\,) = P(A)P_A(B).}$$

При этом под совмещением событий A и B понимается наступление каждого из них, т. е. наступление как события A, так и события B.

Примеры

Пример 1. В продукции некоторого предприятия признаются годными (событие A) 96% изделий. К первому сорту (событие B) оказываются принадлежащими 75 изделий из каждой сотни годных. Определить вероятность того, что произвольно взятое изделие принадлежит к первому сорту.

Пример 2. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле (событие A) равна 0,2, Какова вероятность поразить цель, если 2% взрывателей дают отказы (т. е. в 2% случаев выстрела не произойдет)?

Независимые события

Два события называются **независимыми**, если вероятность одного из них не изменяется в результате того, наступило или не наступило другое.

Аналогично, вероятность вынуть во второй раз белый шар из урны с белыми и черными шарами, если вынутый первым шар предварительно возвращен, не зависит от того, белый или черный шар был вынут в первый раз. Поэтому результаты первого и второго вынимания независимы между собой. Наоборот, если шар, вынутый первым, не возвращается в урну, то результат второго вынимания зависит от первого, ибо состав шаров, находящихся в урне после первого вынимания, меняется в зависимости от его исхода. Здесь мы имеем пример зависимых событий.

Независимые события

Два события называются **независимыми**, если вероятность одного из них не изменяется в результате того, наступило или не наступило другое.

Зависимое событие	**Независимое событие**
Вероятность вынуть во второй раз белый шар из урны с белыми и черными шарами, если вынутый первым шар предварительно возвращен, не зависит от того, белый или черный шар был вынут в первый раз. Поэтому результаты первого и второго вынимания независимы между собой.	Если шар, вынутый первым, не возвращается в урну, то результат второго вынимания зависит от первого, ибо состав шаров, находящихся в урне после первого вынимания, меняется в зависимости от его исхода. Здесь мы имеем пример зависимых событий.

Теорема умножения для независимых событий

Если события А и В независимы, то вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \text{ и } B)=P(A)P(B).$$

События *A, B, … , L*. Будем называть их **независимыми в совокупности**, если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли ли какие-либо другие рассматриваемые события или нет.

Теорема умножения (для событий независимых в совокупности): Вероятность совмещения событий *A, B, … , L*, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$\mathrm{P}\ (A \text{ и } B \text{ и} \dots \text{ и } L\ )=P\ (A)P\ (B)\dots\ P\ (L).$$

Примеры

Пример 1. Рабочий обслуживает три автоматических станка, к каждому из которых нужно подойти для устранения неисправности, если станок остановится. Вероятность того, что первый станок не остановится в течение часа, равна 0,9. Та же вероятность для второго станка равна 0,8, а для третьего – 0,7. Определить вероятность того, что в течение часа рабочему не потребуется подойти ни к одному из обслуживаемых им станков.

Пример 2. Вероятность сбить самолет винтовочным выстрелом p=0,004. Какова вероятность уничтожения неприятельского самолета при одновременной стрельбе из 250 винтовок?

Пример

Можно разобрать теперь предыдущий пример в самом общем виде. Пусть вероятность наступления некоторого события при отдельном испытании равна p. Решим два следующих вопроса:

а) какова вероятность P, что это событие наступит хотя бы один раз при N независимых испытаниях?

б) сколько требуется произвести испытаний, чтобы вероятность наступления события хотя бы один раз была не меньше $1 - \varepsilon$?

Для решения а) воспользуемся формулой:

$$\mathbf{P = 1 - } \boldsymbol{p^N}$$

Для решения б) требуется решить неравенство:

$$\boldsymbol{P \geq 1 - \varepsilon}, \text{ что дает } \boldsymbol{N \geq \frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-p)}}$$

Расширенная теорема сложения

Если события A и B совместны, то вероятность наступления хотя бы одного из них не равна сумме их вероятностей.

Расширенная теорема сложения: Пусть A и B – произвольные события. Вероятность того, что осуществится хотя бы одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей без вероятности их совмещения, т. е.

$$\boldsymbol{P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)}$$

Пример: В электрическую цепь включены последовательно два предохранителя. Вероятность выхода из строя первого предохранителя равна 0,6, а второго 0,2. Определить вероятность прекращения питания в результате выхода из строя хотя бы одного из этих предохранителей.

Пример

Имеется три одинаковые на вид урны с различным составом белых и черных шаров. Пусть в первой урне находится m_1 белых и n_1 черных шаров, во второй урне – соответственно m_2 белых и n_2 черных и, наконец, в третьей – m_3 белых и n_3 черных шаров. Выбирается наугад одна из урн и из нее вынимается один шар. Требуется определить вероятность того, что вынутый шар окажется белым.

Сделаем сначала предположение, что шар вынут из первой урны. Можно сказать, что это предположение означает наступление события H_1 или осуществление гипотезы H_1. Так как выбор любой урны равновероятен, то вероятность этой гипотезы равна $P(H_1)=\frac{1}{3}$. Из предположения о составе шаров следует, что вероятность вынуть белый шар (событие A) из первой урны равна:

$$\boldsymbol{P_{H_1}(A) = \frac{m_1}{m_1 + n_1}}$$

Пример

Тогда для первой урны вероятность вынуть белый шар:

$$P(H_1 \text{ и } A) = P(H_1)P_{H_1}(A) = \frac{1}{3}\frac{m_1}{m_1+n_1}$$

Вероятность вынуть белый шар из второй урны:

$$P(H_2 \text{ и } A) = P(H_2)P_{H_2}(A) = \frac{1}{3}\frac{m_2}{m_2+n_2}$$

А для третьей урны:

$$P(H_3 \text{ и } A) = P(H_3)P_{H_3}(A) = \frac{1}{3}\frac{m_3}{m_3+n_3}$$

Тогда:

$$P(A)=P[(H_1 \text{ и } A) \text{ или } (H_2 \text{ и } A) \text{ или } (H_3 \text{ и } A)]=$$

$$P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A) = \frac{1}{3}\left(\frac{m_1}{m_1+n_1}+\frac{m_2}{m_2+n_2}+\frac{m_3}{m_3+n_3}\right)$$

Формула полной вероятности

Сформулируем теперь общую задачу. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий и при наступлении каждого из них, например H_i событие A может наступить с некоторой условной вероятностью $P_{H_i}(A)$. Какова будет при этом вероятность наступления события A?

$$\boldsymbol{P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A)}$$

$$\boldsymbol{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P(H_i)P_{H_i}(A)}$$ – формула полной вероятности.

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ – гипотезы.

Пример

При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки, причем число крупных осколков составляет 0,1 их общего числа, а число средних и мелких – соответственно 0,3 и 0,6 общего числа осколков. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний – с вероятностью 0,3 и мелкий – с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет ее?

Формула Бейеса или формула вероятности гипотез

Пусть мы имеем некоторую полную группу событий – гипотез H_i (i = 1, 2, … , n), вероятность каждой из которых $P(H_i)$ до производства опыта имеет определенное значение. Предположим, что в результате опыта наступило некоторое событие A. Появление этого нового сведения – наступление события A – может повлечь за собой изменение первоначальных вероятностей гипотез.

Поставим вопрос в общем виде: выяснить, каковы будут вероятности гипотез H_i после опыта в предположении, что в результате опыта наступило событие А.

$$\boldsymbol{\beta_i = \frac{\alpha_i p_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j} = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_n p_n}}$$ – **формула Бейеса**

Пример

Пусть урна содержит три шара белого и черного цвета, однако распределение числа шаров по цветам неизвестно. До производства опыта о содержимом урны можно сделать четыре гипотезы:

1) 3 белых и 0 черных (H_1),
2) 2 белых и 1 черный (H_2),
3) 1 белый и 2 черных (H_3),
4) 0 белых и 3 черных (H_4),

которые можно считать равновероятными:

$$\boldsymbol{P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}}$$

Схема Бернулли

Пусть при некотором испытании событие A может наступить или не наступить. Обозначим вероятность наступления события A через $P(A)=p$ и вероятность его ненаступления через $P(\bar{A})=q=1-p$.

Результаты испытаний	AA			
Вероятность		pq	qp	

Биноминальная формула

Производится серия из n независимых испытаний, то есть вероятность наступления события A при каждом отдельном испытании постоянна. Пусть она равна p. Требуется определить вероятность $P_{m,n}$ того, что событие наступит точно m раз.

Биноминальная формула:

$$\boldsymbol{P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}}$$

Пример: Бросается монета 6 раз. Какова вероятность выпадения герба 0, 1, …, 6 раз?

Пример

Пример: Производится восемь выстрелов по резервуару с горючим, причем первое попадание вызывает течь, а второе – воспламенение горючего. Какова вероятность того, что резервуар будет подожжен, если вероятность попадания при отдельном выстреле равна p=0,2?

Пример

С ростом m вероятность $P_{m,n}$ сначала возрастает, а затем с некоторого m начинает убывать.

В случае нецелых np-q для μ получаются неравенства:

$$np-q<\mu< np-p$$

Пример. Игральная кость бросается девять раз подряд. Каково наиболее вероятное количество выпадений числа очков, кратного трем. Определим эту вероятность, а также вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет не более двух раз.

Пример

Пример. В некотором производстве вероятность того, что отдельная деталь окажется бракованной, равна 0,005. Какова вероятность того, что в партии из 10 000 изделий бракованных окажется:

а) ровно 40?

б) не более 70?

Пример

Пример. В некоторой лотерее имеется всего n билетов, из которых m являются выигрышными. Определить вероятность хотя бы одного выигрыша для лица, обладающего k билетами.

$$P = 1 - \frac{C_{n-m}^{k}}{C_{n}^{k}}$$

Пример

Пример. Партия товара состоит из ста изделий, среди которых имеется пять бракованных. Определить вероятность того, что эта партия будет принята при испытании выбранной наудачу ее половины, если условиями приема допускается не более одного бракованного изделия на пятьдесят испытываемых.

$$P(A) = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}$$

$$P(B) = \frac{C_{5}^{1} \cdot C_{95}^{49}}{C_{100}^{500}}$$

$$p = P(A \text{ или } B) = \frac{C_{95}^{50} + C_{5}^{1} \cdot C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}} \approx 0,181.$$

Пример

Пример. В партии из ста деталей имеется 30 бракованных. Наугад отбирается три детали. Какова вероятность того, что среди них имеется ровно одна бракованная?

$$P_{100,30}(3,1) = \frac{C_{30}^{1} C_{70}^{2}}{C_{100}^{3}} \approx 0,448.$$

Пример

Пример. В урне имеется N шаров, из которых M белых и L=M-N черных. Вынимается наугад n шаров. Требуется определить вероятность $P_{N,M}(n,m)$ того, что среди вынутых n шаров будет ровно m белых.

$$\boldsymbol{P_{N,M}(n,m) = \frac{C_M^m C_L^l}{C_N^n} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}}$$

$$\boldsymbol{P_{N,M}(n,m) = \frac{M!\,L!\,(N-n)!\,n!}{(M-m)!\,m!\,(n-m)!\,(L-l)!\,N!}}.$$

Пример

Пример. В пачке из 12 общих тетрадей имеется семь тетрадей в клетку и пять в линейку. Наугад отобраны шесть тетрадей. Какова вероятность того, что среди них будет одинаковое число тетрадей в клетку и в линейку.

$$\boldsymbol{P_{12,7}(6,3) = \frac{7!\,5!\,6!\,6!}{3!\,4!\,3!\,2!\,2!} = \frac{25}{66} \approx 0,38}.$$

Пример

Пример. Для приема зачетов преподаватель заготовил 50 задач: 20 задач по интегральному исчислению, 20 по дифференциальным уравнениям и 10 по теории вероятностей. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решить 18 задач по интегральному исчислению, 15 задач по дифференциальным уравнениям и 5 задач по теории вероятностей?

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P_{H_i}(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,76.$$

Пример

Пример. В условиях предыдущего примера определить вероятность того, что студент решил задачу по теории вероятностей, если известно, что он сдал зачет.

$$P_A(H_3) = \frac{\mathrm{P}(H_3)P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,76} = 0,132.$$

Пример

Пример. Из полной карточной колоды, содержащей 52 карты, извлекается наугад одна карта. Какова вероятность извлечь картинку (короля, даму или валета) любой масти или карту пиковой масти?

$$\frac{3}{13}+\frac{1}{4}-\frac{3}{52}=\frac{22}{52}=0,423.$$

Пример

Пример. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0,6. Произведено 8 бросков. Найти вероятность того, что при этом будет ровно два попадания. Найти наиболее вероятное число попаданий и соответствующую вероятность.

$$\boldsymbol{P_{5,8} = C_8^5 \cdot (0,6)^5 \cdot (0,4)^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} 0,078 \cdot 0,064 \approx 0,28}.$$

Пример

Пример. Игрушечный волчок разделен на 6 секторов, на которых написано по одной из цифр 1, 2, 3; каждая из них повторяется дважды. Волчок запускается три раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших цифр будет равна 6.

Общее число благоприятствующих этому событию возможностей равно 7, а искомая его вероятность $\frac{7}{27}$.

Пример

Пусть в результате каждого испытания может наступить одно из трех событий A_1, A_2, A_3 с вероятностями соответственно p_1, p_2, p_3 . Производится три испытания. Определить вероятность наступления k раз (k=0,1,2,3) каждого из возможных событий.

Возможные исходы								
Вероятность								

$$P_3(0) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_1}\,\overline{A_1}) = q_1^3 = (p_2 + p_3)^3,$$
$$P_3(1) = P(A_1\overline{A_1}\,\overline{A_1}) + P(\overline{A_1}A_1\overline{A_1}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_1}A_1) = 3p_1q_1 = 3p_1(p_2 + p_3)^2,$$
$$P_3(2) = P(A_1A_1\overline{A_1}) + P(A_1\overline{A_1}A_1) + P(\overline{A_1}A_1A_1) = 3p_1^2q_1 = 3p_1^2(p_2 + p_3),$$
$$P_3(3) = P(A_1A_1A_1) = p_1^3$$