

Реферат

на тему

Уравнения и неравенства в целых числах

- 1. Соображения делимости**
- 2. Метод разложения на множители**
- 3. Графический метод решения**
- 4. Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных**
- 5. Метод перебора**

Соображения делимости

Найти целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

Решение. Данное уравнение линейно относительно y :

$y(2x + 1) = 112 + x - 2x^2$. Так как $x, y \in \mathbf{N}$, то $2x + 1 \neq 0$, поэтому:

$$y = \frac{112 + x - 2x^2}{2x + 1};$$

$$y = \frac{112 + x - 2x^2 + 2x - 2x}{2x + 1};$$

$$y = \frac{112 + 2x - (2x^2 + x)}{2x + 1};$$

$$y = \frac{112 + 2x - x(2x + 1)}{2x + 1};$$

$$y = -x + \frac{2x + 1 + 111}{2x + 1};$$

$$y = -x + 1 + \frac{111}{2x + 1};$$

$$111 \nmid (2x + 1) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 1, \\ 2x + 1 = 3, \\ 2x + 1 = 37, \\ 2x + 1 = 111; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 112, \\ x = 1, \\ y = 37, \\ x = 18, \\ y = -14, \\ x = 55, \\ y = -53. \end{cases}$$

После проверки получаем одно целое положительное решение $x = 1, y = 37$.

Ответ: (1; 37).

Метод разложения на множители

Найти все целые числа m и n такие, что
 $2mn + 3m = 10$ и $m + n \geq 5$.

Решение. Из первого условия следует, что $m(2n + 3) = 10$, причём m – целое, а $2n + 3$ – целое и нечётное.

Следовательно, возможны следующие варианты:

$$1. \begin{cases} m = 2, \\ 2n + 3 = 5; \end{cases} \begin{cases} m = 2, \\ n = 1; \end{cases} \Rightarrow m + n = 3 < 5 \text{ – не удовлетворяет второму условию;}$$

$$2. \begin{cases} m = -2, \\ 2n + 3 = -5; \end{cases} \begin{cases} m = -2, \\ n = -4; \end{cases} \Rightarrow m + n = -6 < 5 \text{ – не удовлетворяет второму условию;}$$

$$3. \begin{cases} m = 10, \\ 2n + 3 = 1; \end{cases} \begin{cases} m = 10, \\ n = -1; \end{cases} \Rightarrow m + n = 9 > 5 \text{ – верно;}$$

$$4. \begin{cases} m = -10, \\ 2n + 3 = -1; \end{cases} \begin{cases} m = -10, \\ n = -2; \end{cases} \Rightarrow m + n = -12 < 5 \text{ – не удовлетворяет второму условию.}$$

Ответ: $m = 10, n = -1$.

Графический метод решения

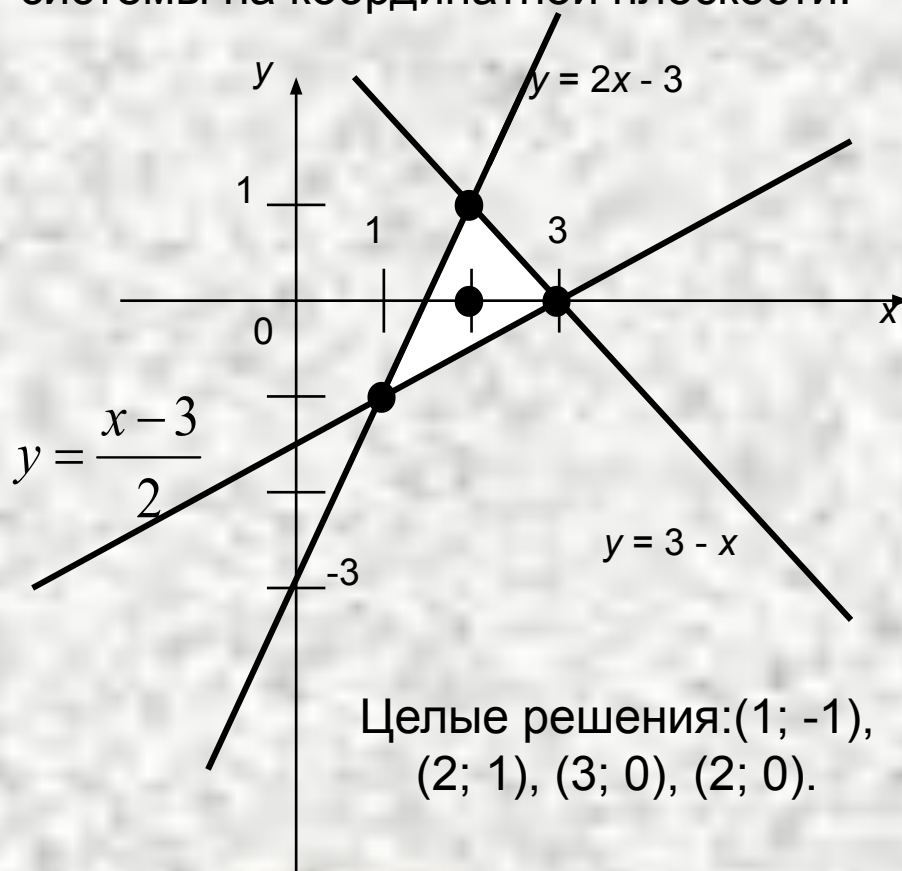
Найти все целочисленные пары $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{2y - x + 3} = 2\sqrt{3 - x - y}.$$

Решение. Найдём сначала все целые допустимые пары:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 \geq 0, \\ 2y - x + 3 \geq 0, \\ 3 - x - y \geq 0; \end{cases} \begin{cases} y \leq 2x - 3, \\ y \geq \frac{x-3}{2}, \\ y \leq 3 - x. \end{cases}$$

Изобразим множество решений последней системы на координатной плоскости:



Проверим эти решения, подставляя их в исходное уравнение:

1. $\sqrt{2 \cdot 1 - (-1) - 3} + \sqrt{2 \cdot (-1) - 1 + 3} = 2\sqrt{3 - 1 - (-1)},$

$0 = 2\sqrt{3}$ - не верно;

2. $\sqrt{2 \cdot 2 - 0 - 3} + \sqrt{2 \cdot 0 - 2 + 3} = 2\sqrt{3 - 2 - 0},$

$\sqrt{3} = 0$ - не верно;

3. $\sqrt{2 \cdot 3 - 0 - 3} + \sqrt{2 \cdot 0 - 3 + 3} = 2\sqrt{3 - 3 - 0},$

$\sqrt{3} = 0$ - не верно;

4. $\sqrt{2 \cdot 2 - 0 - 3} + \sqrt{2 \cdot 0 - 2 + 3} = 2\sqrt{3 - 2 - 0},$

$1 + 1 = 2$ - верно.

Целые решения: $(1; -1),$
 $(2; 1), (3; 0), (2; 0).$

Ответ: $(2; 0).$

Графический метод решения

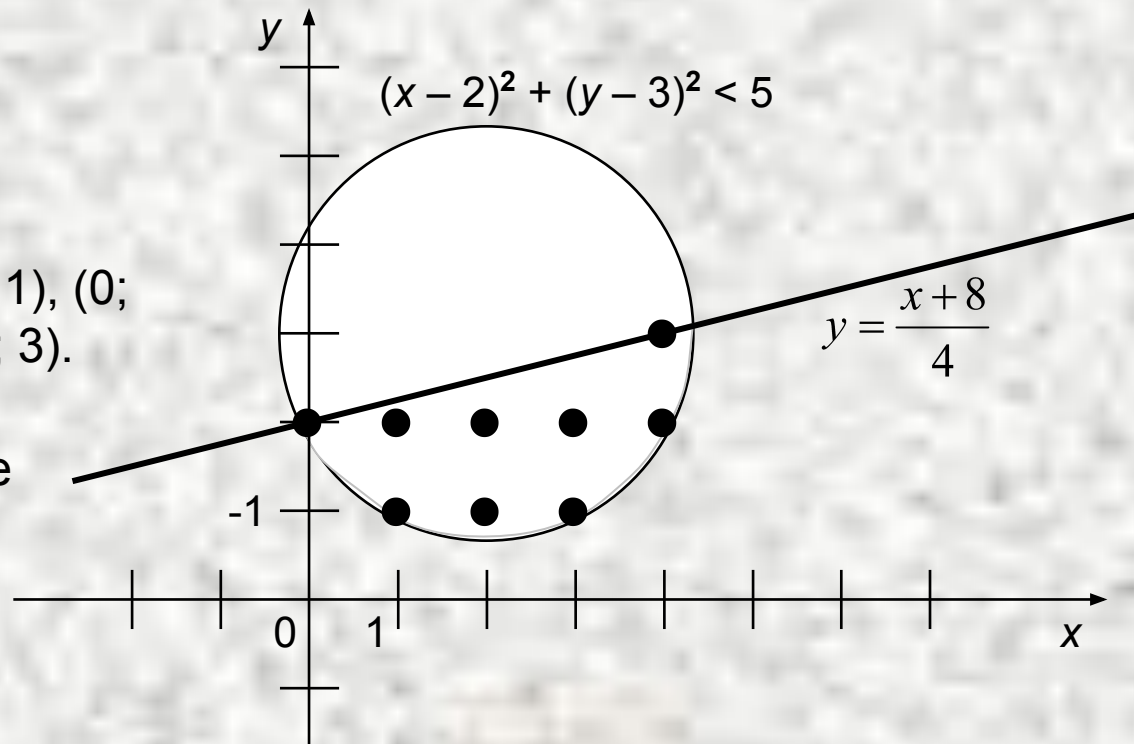
Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 < 5, \\ 4y \leq x + 8. \end{cases}$$

Решение. Найдем все целые допустимые пары:

Изобразим множество решений системы на координатной плоскости:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 < 5, \\ y \leq \frac{x + 8}{4}. \end{cases}$$



Целые решения: (1; 1), (2; 1), (3; 1), (0; 2), (1; 2), (2; 2), (3; 2), (4; 2), (4; 3).

Точки (0; 2), (1; 1), (3; 1), (4; 2) не удовлетворяют первому неравенству системы, так как лежат на окружности.

Ответ: (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3; 2), (4; 3).

Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных

Найти все целочисленные решения уравнения
 $2x^2 - xy - 3y^2 = 7.$

Решение Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x , тогда $D = 25y^2 + 56$. Так как нас интересуют целочисленные решения, то

$$25y^2 + 56 = K^2;$$

$$(K - 5y)(K + 5y) = 56.$$

Рассмотрим все варианты разложения числа 56 на целые множители:

$$56 = 2 \times 28;$$

$$56 = -2 \times (-28);$$

$$56 = 7 \times 8;$$

$$56 = -7 \times (-8);$$

$$56 = 4 \times 14;$$

$$56 = -4 \times (-14).$$

В итоге получим, что целые решения имеют две системы:

$$1) \begin{cases} K - 5y = 4, \\ K + 5y = 14; \end{cases} \Rightarrow y = 1;$$

$$2) \begin{cases} K - 5y = -4, \\ K + 5y = -14; \end{cases} \Rightarrow y = -1.$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение, имеем:

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 1), (2; -1).$

Метод перебора

Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 < 5, \\ 4y \leq x + 11. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Первое неравенство задаёт внутренность круга радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке (3; 4) и

$$\begin{cases} (x-3)^2 < 5, \\ (y-4)^2 < 5; \end{cases} \implies \begin{cases} |x-3| < \sqrt{5}, \\ |y-4| < \sqrt{5}. \end{cases}$$

С учётом целочисленности x и y имеем:

$$1 \leq x \leq 5 \text{ и } 2 \leq y \leq 6.$$

Разрешим второе неравенство системы сначала относительно y :

$$y \leq \frac{x+11}{4}; \quad y \leq \frac{16}{4} = 4; \quad (2)$$

$$\text{то есть } 2 \leq y \leq 4.$$

Затем относительно x :

$$x \geq 4y - 11. \quad (3)$$

1. Пусть $y = 2$, тогда из (1) следует, что $(x-3)^2 < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 1$;
 $-1 < x-3 < 1$; $2 < x < 4$.

Целочисленное решение есть: $x = 3$.
Оно удовлетворяет и (3).

2. Если $y = 3$, тогда из (1) следует, что $(x-3)^2 < 4 \Leftrightarrow |x-3| < 2$;
 $-2 < x-3 < 2$; $1 < x < 5$.

Таким образом, получаем решения $x \in \{2; 3; 4\}$, и все они удовлетворяют (3).

3. При $y = 4$ из (1) следует, что $|x-3| < \sqrt{5}$, то есть $1 \leq x \leq 5$.

Неравенство (3) приводит при этом к ограничению $x \geq 5$. Таким образом, имеем одно решение $x = 5$.

Ответ: (3; 2), (2; 3), (3; 3), (4; 3), (5; 4).

Универсальных методов для решения уравнений и неравенств в целых числах не существует.

**Чтобы решить в целых числах
неравенство или уравнение,
необходимо применить метод,
подходящий для данного конкретного
случая.**