کتاب
رياضيات و كاربرد آن در مديريت

رشته هاي حسابداري و مديريت

مؤلف: ليدا فرخي

تهيه ي پاور پوينت: اردوان ميرزايي

تعداد واحد : 3

اهداف درس

توانايي حل مسئله

تقويت تفكر رياضي

آشنايي با: بردارها

ماتريس و دترمينان

دستگاه معادلات خطي و توابع خطي

توابع چند متغيره و معادلات ديفرانسيل

انتگرال

فهرست مطالب

فصل اول: بردارها

- بردارها در صفحه
- ضرب عددي دو بردار
- بردارها در فضاي سه بعدي
- ضرب برداري بردارها
- بردارها در فضاي n بعد

فصل دوم:ماتریس و دترمینان

- ماتریس
- دترمینان
- وارون ماتریس

فصل سوم: دستگاه معادلات خطي و توابع خطي

- دستگاه معادلات
- استقلال و وابستگي خطي
- رتبه ي يك ماتريس
- توابع خطي

فصل چهارم: توابع چند متغیره

- توابع چند متغیره
- حد و پیوستگي توابع چند متغیره
- مشتق هاي جزيي
- ديفرانسيل کل و مشتقگيري ضمني
- ماکسيمم و مينيمم توابع دو متغيره
- ماکسيمم و مينيمم توابع نسبت به شرايط داده شده

فصل پنجم:معادلات ديفرانسيل

- آشنايي معادلات ديفرانسيل
- معادلات ديفرانسيل جدايي پذير

فصل ششم: انتگرال

- انتگرال

فصل اول: بردارها

كميتهايي مانند سرعت يا شتاب يك متحرك و نيروي وارد بر يك جسم هنگامي مشخص مي شوند كه علاوه بر اندازه سو و جهتشان نيز معين باشد.اين نوع كميت ها را برداري مي ناميم.

برخي از كميت ها هنگامي كه اندازه ي آنها بر حسب واحد مشخصي داده شود كاملا معين مي شوند.

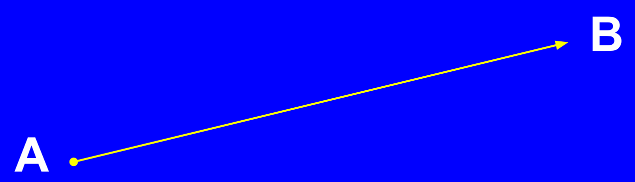
مانند درجه ي حرارت، جرم، طول و حجم ، هزينه و درآمد.

اين گونه كميت ها را عددي يا اسكالر مي ناميم.

بردارها در صفحه *1.1*

تعریف1.1.1

پاره خط AB که ابتداي آنA و انتهاي آن B است، يك پاره خط جهت دار ناميده مي شود. به شكل زير توجه كنيد:

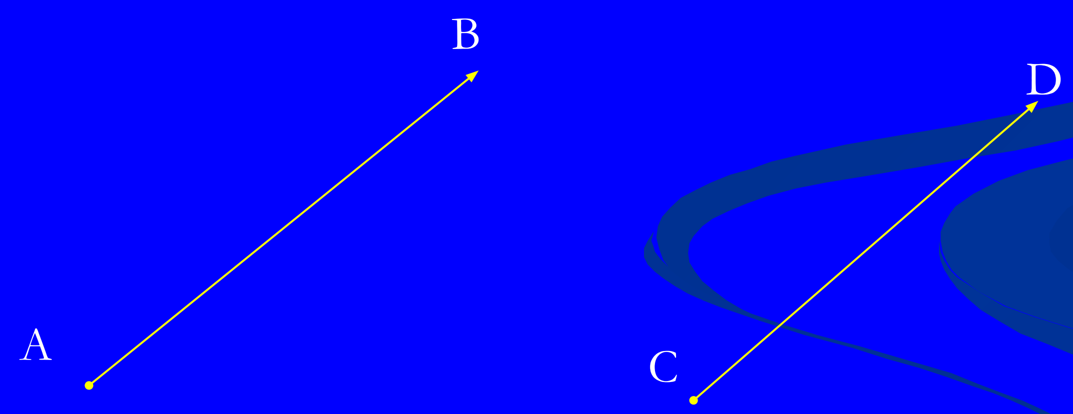


پاره خط جهت دارAB رايك بردار مي ناميم و با $\overrightarrow{AB}$ نمايش ميدهيم

نقطه ي A را مبدا و نقطه ي B را انتهاي بردارمي ناميم.

تساوي دو بردار 1.1.2

دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را برابر يا همسنگ مي ناميم و مينويسيم $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ، اگر اندازه و جهت آنها يكي باشد.



جمع بردار ها 1.1.3

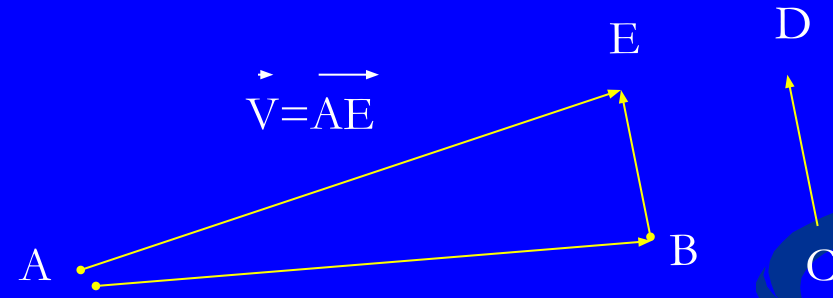
دو بردار AB و CD را در نظر مي گيريم.مجموع AB+CD برداري است مانند V كه به يكي از دو روش زير به دست مي آيد.

با توجه به تعريف تساوي دو بردار، مي توان دو برداررا كه داراي يك مبدا نباشند نيز با يكديگر جمع كرد.

روش اول

از نقطه ي B بردار $\overrightarrow{BE}$ را برابر با بردار $\overrightarrow{CD}$ رسم مي كنيم.

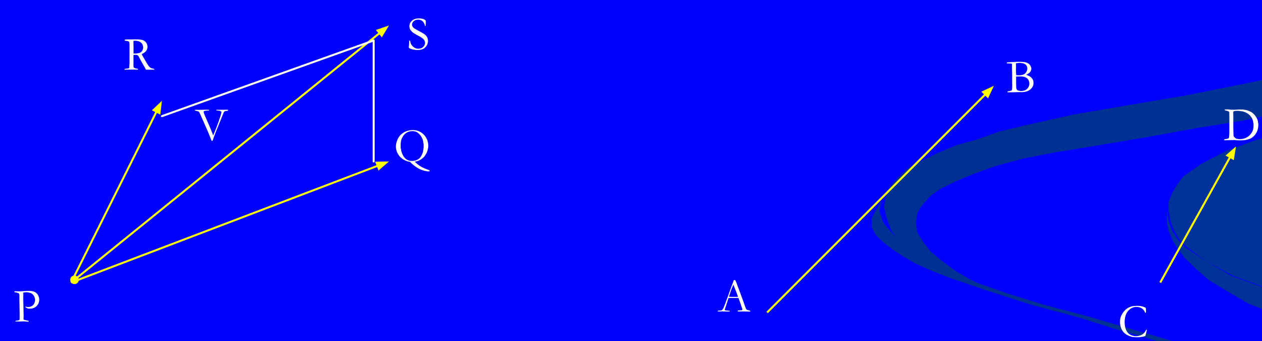
بردار $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AE}$ مجموع دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ است.



$$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$

روش دوم

از نقطه ي دلخواه P، دو برابرPQ وPR را که به ترتیب برابر با بردارهايAB وCD هستند ، رسم مي کنيم. بردارPS قطرمتوازي الاضلاع حاصل از این دو بردار برابر با Vمجموع دو بردارAB وCD است.



$$\vec{P}=\vec{V}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$

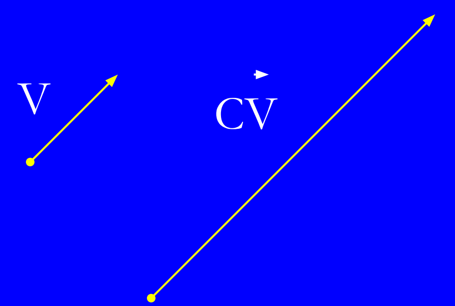
بردار صفر *1.1.4*

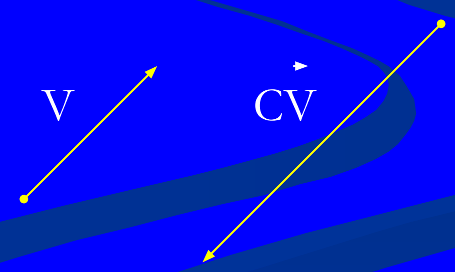
اگر اندازه ي بردار $\vec{V}$ برابر صفر باشد يعني $|\vec{V}|=0$، بردار $\vec{V}$ را بردار صفر مي ناميم و 0 با نشان مي دهيم. بنا بر اين اندازه ي 0 برابر صفر است ، ولي جهت آن مشخص نيست.

ضرب عدد در بردا ر(ضرب اسكالر) *1.1.5*

فرض مي كنيم $\vec{V}$ برداري دلخواه و C عددي حقيقي باشد.منظور از حاصلضرب عدد C در بردار $\vec{V}$ برداري است با اندازه ي C $\vec{V}$ و همجهت با $|\vec{V}|$ اگر $C>0$ و در خلاف جهت $\vec{V}$ اگر $C<0$.

حاصلضرب عدد C در بردار $\vec{V}$ را با $C\vec{V}$ نشان مي دهيم.در شكل :اگر $C=0$ آنگاه $C\vec{V}$ برابر است با بردار صفر.

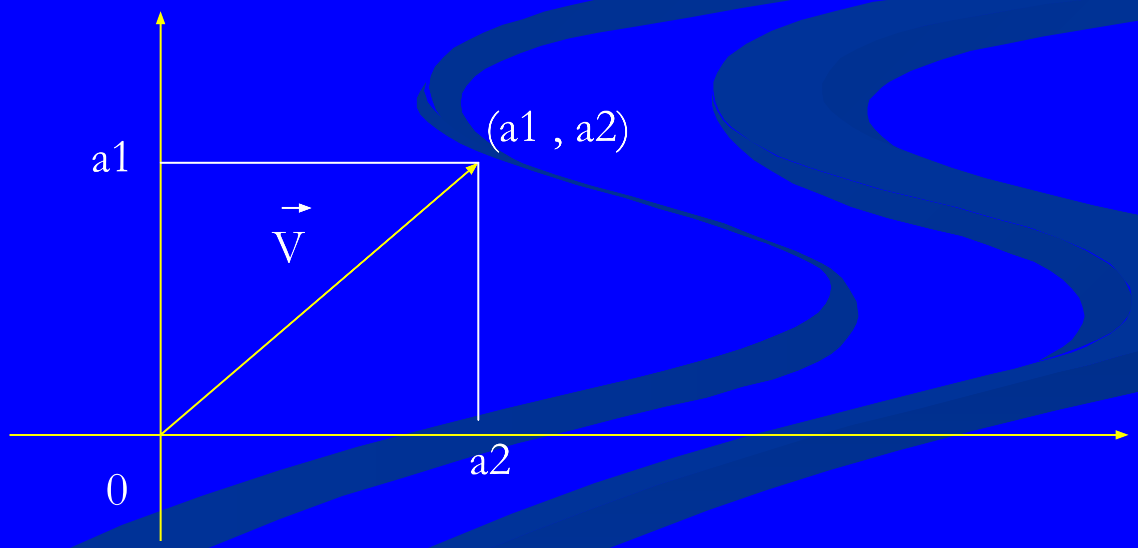




تعریف *1.1.7*

بردار $\vec{V}$ را که ابتداي آن مبدا مختصات و انتهاي آن نقطه ي $(a1 , a2)$است در صفحه ي مختصات xoy است ، بردار نظير زوج مرتب $(a1 , a2)$ مي ناميم. اعداد a1 و a2 را مؤلفه هاي بردار $\vec{V}$ ميناميم و مي نويسيم:

$$\vec{V} = (a1 , a2)$$



قضیه *1.11*

اگر $\overrightarrow{V1}=(a1,a2)$ و $\overrightarrow{V2}=(b1,b2)$ دو بردار باشند ، آنگاه مجموع $\overrightarrow{V1}+\overrightarrow{V2}$ برابر است با:

$$\overrightarrow{\mathbf{V1}}+\overrightarrow{\mathbf{V2}}= (\mathbf{a1+b1}\ ,\ \mathbf{a2+b2})$$

تعريف قرينه ي يك بردار ***1.1.13***

اگر $\vec{V}=(a1,a2)$، آنگاه بردار $(-a1,-a2)$ را قرينه ي بردار $\overrightarrow{V}$ مي ناميم و با $-\vec{V}$ نشان مي دهيم. پس:

$$\mathbf{-V=(-a1, -a2)}$$

تعريف تفاضل دو بردار 1.1.14

بردار $\vec{V}+(-\vec{U})$ را كه مساوي با جمع $\vec{V}$ با قرينه ي $\vec{U}$ است تفاضل $\vec{U}$ از $\vec{V}$ مي ناميم و با $\vec{V}-\vec{U}$ نشان مي دهيم. يعني:

$$\vec{V}-\vec{U}=\vec{V}+(-\vec{U})$$

تعبير هندسي تفاضل دو بردار 1.15

نمايش هاي دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{U}$ را از يك نقطه رسم مي كنيم. در اين صورت، پاره خط جهت داري كه مبدا آن نقطه ي انتهايي نمايش $\vec{U}$ و انتهاي آن، نقطه ي انتهايي نمايش $\vec{V}$ باشد ، يك نمايش بردار $\vec{V}-\vec{U}$ است. زيرا بنا بر تعريف جمع بردار ها داريم:

$$\vec{U}+(\vec{V}-\vec{U})=\vec{V}$$

اندازه ي يك بردار 1.1.16

اندازه ي بردار $\vec{V}=(a1,a2)$ برابر است با:

$$V = \sqrt{a1^2 + a2^2}$$

قضيه *1.1.18*

اگر $\vec{V}$ و $\vec{U}$ و $\vec{W}$ بردارهايي در V بوده و c و d اعدادي حقيقي باشند، آنگاه جمع برداري و ضرب اسكالر داراي خواص زيرند:

- $\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$ (قانون جا به جايي جمع)
- $(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}=\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})$ (قانون شركت پذيري جمع)
- برداري مانند $\vec{0}$ در V وجود دارد به طوري كه $\vec{V}+\vec{0}=\vec{V}$ (وجود هماني نسبت به عمل جمع)
- برداري مانند $-\vec{V}$ و $\vec{V}$ در هست به طوري كه $\vec{V}+(-\vec{V})=0$ (وجود قرينه ي هندسي نسبت به عمل جمع)

ادامه

- $V=\vec{c}\,(dV)\,(\vec{c}d)$ (قانون شرکت پذيري)
- $C\,\vec{(}U\vec{+}V)=\vec{c}U+\vec{c}V$ (قانون بخشپذيري)
- $U=c\vec{U}+d\vec{U}(c\vec{+}d)$ (قانون بخشپذيري)
- $\vec{U}=\vec{U}$ (وجود هماني نسبت به ضرب اسكالر)

تعريف فضاي برداري حقيقي 1.1.20

فضاي برداري حقيقيV مجموعه اي است از بردارها، همراه با مجموعه اعداد حقيقي (اسكالرها) ، با دو عمل جمع برداري و ضرب اسكالر، به طوري كه هر جفت بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ در V و هر اسكالر c ، بردارهاي$\vec{U}+\vec{V}$ و $c\vec{U}$ طوري تعريف شده باشند كه در خواص قضيه ي قبل صدق كنند.

بردارهاي يكه

اندازه ي هر دو بردار (0و1) و (1و0) ، برابر با 1 است، آنها را بردارهاي يكه مي ناميم و با نمادهاي زير نشان ميدهيم.

$\vec{i} = (1,0)$ $\vec{j} = (0,1)$

با توجه به نماد گذاري گذشته براي هر بردار $\vec{V}=(a1,a2)$ به دست مي آوريم:

$$a1\,(1,0)+a2\,(0,1)=a1\,\vec{i}+a2\,\vec{j}=(a1,a2)$$

بنابر اين هر بردار $V2$ در را مي توان به صورت يك تركيب

خطي از دو بردار i و j (عبارتي به صورت $a1\ i + a2\ j$ را يك

تركيب خطي از i و j مي نامند.) نوشت. از اين رو بردارهاي i و j

يك پايه براي فضاي برداري $V2$ تشكيل مي دهند . تعداد عناصر

يك پايه يك فضاي برداري ، بعد فضاي برداري نام دارد.

بنابر اين $V2$ يك فضاي برداري دو بعدي است.

تعريف توازي بردارها 1.1.25

دو بردار نا صفر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ را موازي مي ناميم ، در صورتي كه اسكالر (عدد حقيقي)c وجود داشته باشد، به طوري كه $\vec{V}=c\vec{U}$.

قضيه *1.1.25*

اگر $\vec{V}$ بردار نا صفري باشد ، آنگاه

$$\vec{U} = \frac{1}{|\vec{V}|}\vec{V}$$

بردار يكه (واحد) هم جهت با $\vec{V}$ است.

ضرب عددي دو بردار 1.2

تعريف ضرب عددي دو بردار *1.2.1*

اگر $\vec{U}=(a1,a2)$ و $\vec{V}=(b1,b2)$ دو بردار در $V2$ باشند ، آنگاه حاصلضرب عددي دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ را با $\vec{U}.\vec{V}$ نشان مي دهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$\vec{U}.\vec{V}=(a1,a2).(b1,b2)=a1\ b1+a2\ b2$$

توجه مي كنيم كه حاصلضرب عددي دو بردار ، عددي حقيقي است و بردار نيست. اين حاصلضرب داخلي يا حاصلضرب نقطه اي دو بردار نيز ناميده مي شود.

قضیه 1.2.4

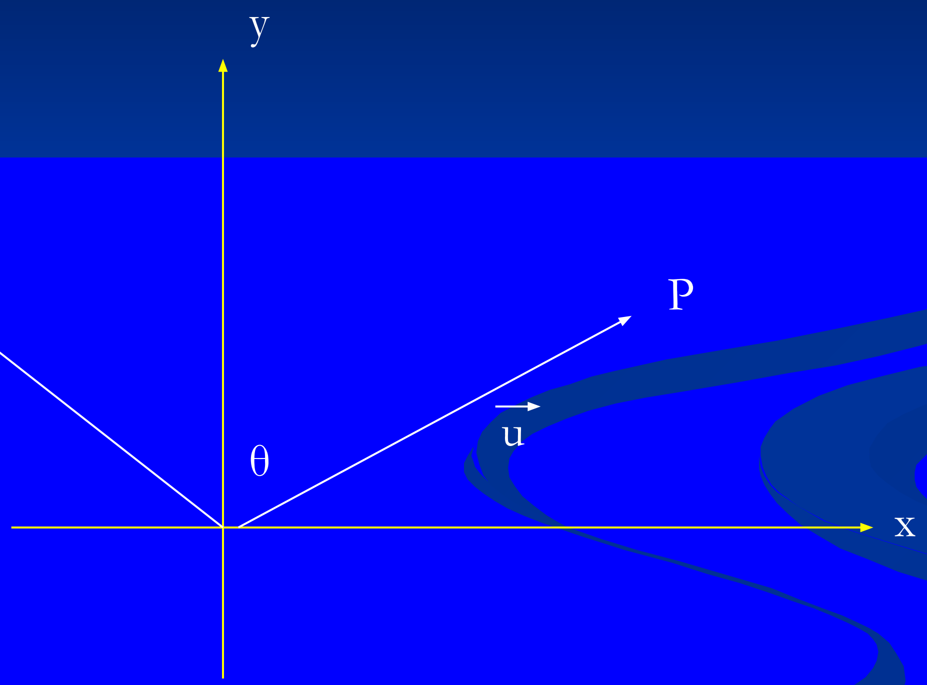
اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ بردارهايي در $V2$ بوده و c يك اسكالر باشد. آنگاه:

1. $\vec{U}\cdot\vec{V}=\vec{V}\cdot\vec{U}$
2. $\vec{U}\cdot(\vec{V}+\vec{W})=\vec{U}\cdot\vec{V}+\vec{U}\cdot\vec{W}$
3. $(\vec{U}+\vec{V})\cdot\vec{W}=\vec{U}\cdot\vec{W}+\vec{V}\cdot\vec{W}$
4. $c(\vec{U}\cdot\vec{V})=(c\vec{U})\cdot\vec{V}=\vec{U}\cdot(c\vec{V})$
5. $\vec{0}\cdot\vec{U}=0$
6. $\vec{V}\cdot\vec{V}=|\vec{V}|$

تعريف زاويه ي بين دو بردار *1.2.5*

فرض مي كنيم $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردار نا صفر باشند به طوري $\vec{U}$ كه مضرب اسكالري از $\vec{V}$ نباشد.اگر $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ به ترتيب بردارهاي نمايشگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ باشند.آنگاه زاويه ي بين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ را كوچكترين زاويه ي بين دو پاره خط OP و OQ تعريف مي كنيم.

شكل زيرزاويه ي بين دو بردار را ذر حالتي كه مضرب اسكالري از نباشد، نشان مي دهد:



قضيه *1.2.6*

اگر θ زاويه ي بين دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ باشد،آنگاه:

$$\vec{U}.\vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}| \cos\theta$$

نتيجه *1.2.8*

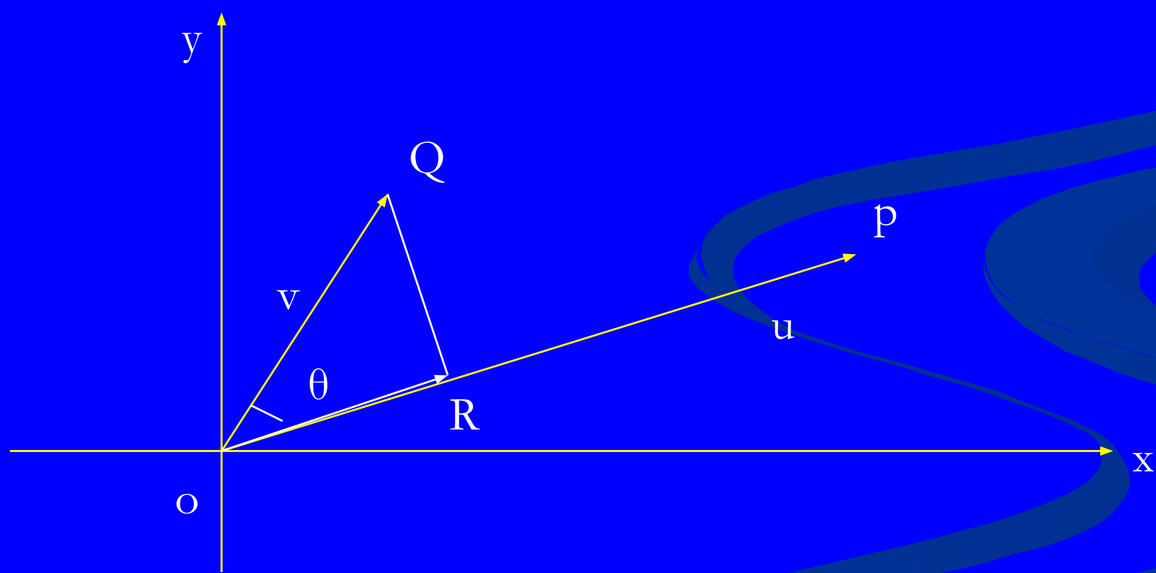
از قضيه ي قبل نتيجه مي شود كه دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ بر هم عمودند (متعامدند) اگر و تنها اگر:

$$\vec{U}.\vec{V}=0$$

تصوير يك بردار بر روي بردار ديگر *1.2.10*

فرض مي كنيم$\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ به ترتيب نمايشگرهاي بردارهاي $\overrightarrow{U}$و$\overrightarrow{V}$ باشند.تصوير$\overrightarrow{OQ}$ در جهت $\overrightarrow{OP}$،بردار$\overrightarrow{OR}$ است،كه در آنR پاي عمود از نقطهQ ي بر خطي است كه از دو نقطه ي كه از دو نقطهD وP مي گذرد.

شکل: تصویر بردار $\vec{V}$ بر روي بردار $\vec{P}$



تعريف 1.2.11

اگر $\overrightarrow{U}$ بردار ناصفري باشد، تصوير برداري $\overrightarrow{V}$ روي بردار $\overrightarrow{U}$ به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$\mathrm{Proj}_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{U}|^{2}}\,\vec{u}$$

تصویر اسکالر $\vec{V}$ روي $\vec{U}$ برابر با $|\vec{V}|\cos\theta$ است . با توجه به قضيه داريم:

$$\vec{V}\cos\theta = \frac{\vec{V}.\vec{U}}{|\vec{U}|} = \vec{V}.\left(\frac{\vec{U}}{|\vec{U}|}\right)$$

بردارها در فضاي سه بعدي 1.3

تعريف *1.3.1*

مجمو عه ي تمام سه تايي هاي مرتب از اعداد حقيقي را فضاي عددي سه بعدي مي ناميم و با R نشان مي دهيم. هر سه تايي مرتب (x و y و z) را يك نقطه در فضاي عددي سه بعدي مي ناميم.

قضيه 1.3.2

فاصله ي بين دو نقطه $p(x_1, y_1, z_1)$ و $p(x_2, y_2, z_2)$ برابر است با:

$$|\overline{p_1p_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)}$$

تعريف 1.3.4

يك بردار در فضاي سه بعدي، يك سه تايي مرتب از اعداد حقيقي به صورت (a_3 و a_2 و a_1) است. اعداد a_1، a_2 و a_3 را مولفه هاي بردار (a_3 و a_2 و a_1) مي ناميم. مجموعه تمام بردارهايي به صورت (a_3 و a_2 و a_1) را با V3 نشان مي دهيم.

اگر بردارهاي يكه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و k عبارت باشند از:

$i=(1,0,0)$ $\quad$ $j=(0,1,0)$ $\quad$ $k=(0,0,1)$

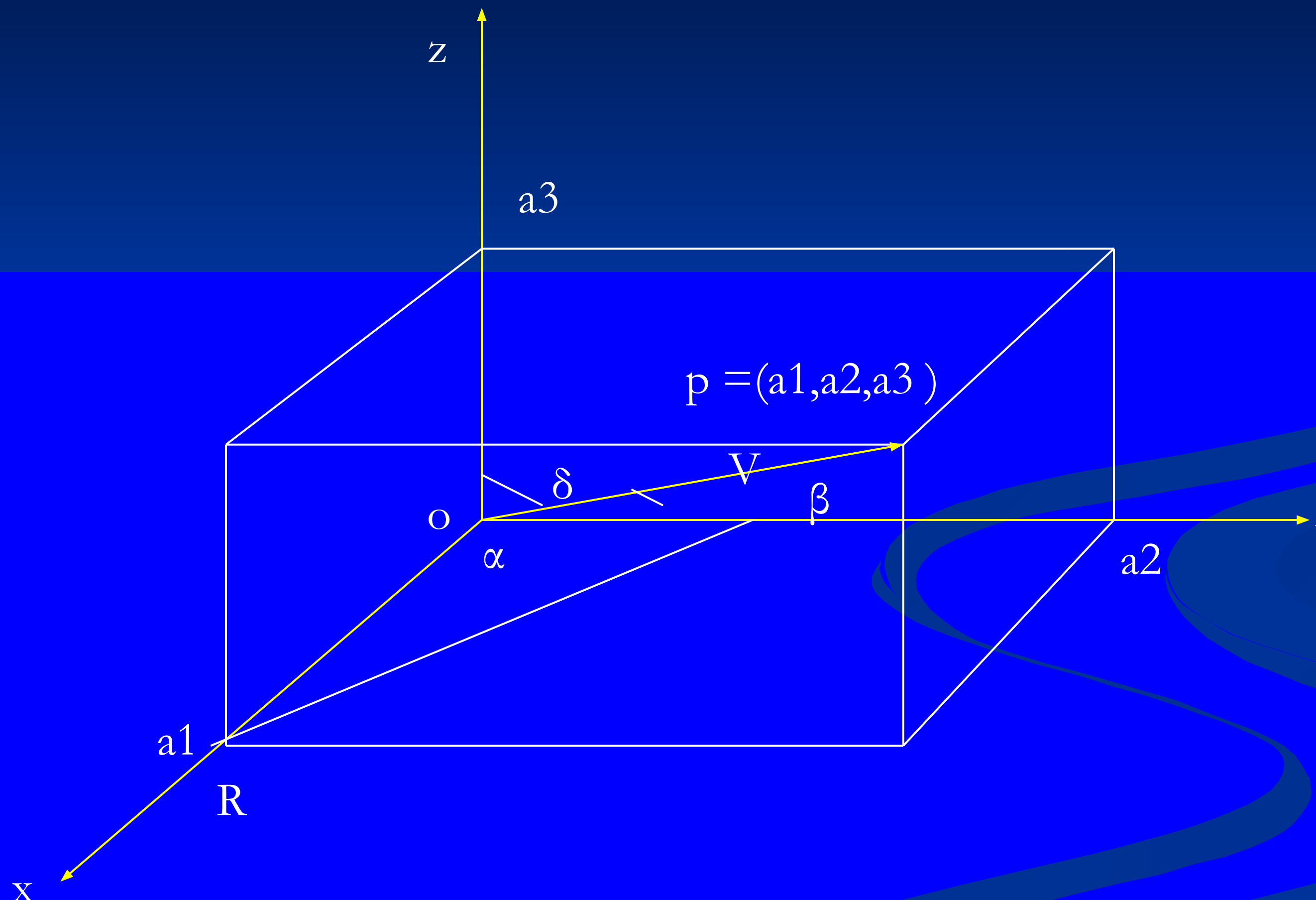
آنگاه هر بردار $\vec{V}=(a1,a2,a3)$ در $\mathbb{R}^3$ را مي توان به صورت زير نوشت:

$$\vec{V}=(a1,a2,a3)=a1\,\vec{i}+a2\,\vec{j}+a3\,\vec{k}$$

تعريف 1.3.5

سه زاويه ي α و β و δ زواياي كه بردار $\vec{V}$ نا صفر به ترتيب با جهت مثبت محورهاي x و y و z مي سازد را زواياي هادي $\vec{V}$ مي ناميم.توجه كنيد كه هر زاويه ي هادي بزرگتر يا مساوي 0 و كوچكتر يا مساوي π است.

زواياي هادي بردار $\vec{V}=(a1,a2,a3)$ در شكل نشان داده شده است.



در شکل مؤلفه هاي V اعدادي مثبت و زواياي هادي آن مثبت و کوچکتر π2/ از هستند.به طوري که در شکل ديده مي شود، مثلث قايم الزاويه OPR است و داريم :

$$COS\alpha = \frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a1}{|\overrightarrow{V}|}$$

مي توان نشاشن داد که دستور اخير به ازاي $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ نيز بر قرار است.دستور هاي مشابهي براي $COS\beta$ و $COS\alpha$ به دست مي آيند.

$$COS\beta = \frac{a2}{|\vec{V}|}$$

$$COS\,\alpha = \frac{a3}{|\vec{V}|}$$

اعداد $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\delta$ راکسینوسهاي هادي بردار $\vec{V}$ مي نامند.

توجه کنيد که بردار صفر ، زواياي هادي و در نتيجه کسينوس هاي هادي ندارد.

نكته *1.3.7*

اگر اندازه ي يك بردار و كسينوسهاي هادي آن معلوم باشند،آنگاه بردار به طور منحصر به فردي معي است، زيرا:

$$a1= \cos\alpha \left|\vec{V}\right|$$

$$a2= \cos\beta \left|\vec{V}\right|$$

$$a3= \cos\delta \left|\vec{V}\right|$$

قضيه *1.3.8*

اگر $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\delta$ كسينوسهاي هادي بردار $\vec{V}$ باشند، آنگاه:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1$$

1.3.15 نتيجه

از قضيه و تعريف كسينوسهاي هادي نتيجه مي شمد كه مؤلفه هاي يك بردار يكه كسينوسهاي هادي آن هستند.

به عبارت دیگر اگر V=(a1,a2,a3) بردار یکه هم جهت با V باشد آنگاه:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{a_1}{|\vec{v}|}\vec{i} + \frac{a_2}{|\vec{v}|}\vec{j} + \frac{a_3}{|\vec{v}|}\vec{k}$$

یا

$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

در مورد بردارهاي فضايي اعمال جمع ، تفريق،ضرب اسكالر و ضرب عددي دو بردار در $V3$ ،مشابه آنچه $V2$ در تعريف مي شوند.

فرض مي كنيم $\vec{U}=(a1,a2,a3)$ و $\vec{V}=(b1,b2,b3)$ يك اسكالر باشد.داريم:

الف

$$\vec{u}+\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1+b_2+b_3)$$
$$=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

ب

$$\vec{u}.\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1+b_2+b_3)$$
$$=(x_1-b_1,x_2-b_2,a_3-b_3)$$

پ

$$c\vec{u}=c\,(a_1,a_2,a_3)=(ca_1+ca_2+ca_3)$$

ت

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1+b_2+b_3)$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

نكته *1.3.14*

به آساني مي توان نشان داد كه:

$$\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = 0$$

قضیه1.3.15

اگرθ زاويه ي بين دو بردار نا صفر$\vec{U}$ و$\vec{V}$ درV3 باشد آنگاه:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$

تعریف 1.3.16

دو بردار در$V3$ را موازي مي ناميم اگر و تنها اگر يكي از بردارها مضرب اسكالري از ديگري باشد.

قضیه*1.3.17*

دو بردار نا صفر در V3 موازي اند اگر و تنها اگر زاويه ي بين آنها0 يا π باشد.

قضیه $1.3.18$

دو بردار نا صفر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ در $V3$ متعامدند اگر و تنها اگر

$\vec{U}.\vec{V}=0$

1.4ضرب برداري بردار ها

تعريف 1.4.1

اگر $\vec{U}=(a1,a2,a3)$ و $\vec{V}=(b1,b2,b3)$ آنگاه حاصل ضرب برداري U در V با نشان $\vec{U}*\vec{V}$ مي دهيم.برداري است كه به صورت زير تعريف مي شود:

$$\vec{U}*\vec{V}=(a2b3-a3b2,a3b1-a1b3,a1b2-a2b1)$$

براي سهولت در يادگيري و به ذهن سپردن دستور $\vec{U}*\vec{V}$ ، از نماددترمينين استفاده مي كنيم.يك دترمينان مرتبه ي دوم را به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

با استفاده از نماد دترمينان دستور محاسبه ي $\vec{U}*\vec{V}$ به صورت زير در مي آيد:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

سمت راست عبارت اخير را مي توان با نماد زير نشان داد:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

قضيه1.4.3

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ بردارهايي در V3 باشند، آنگاه:

$$\vec{U} * \vec{V} = -(\vec{V} * \vec{U})$$

قضیه 1.4.4

اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهاي يكه ي $V3$ باشند، آنگاه:

الف) $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$

ب) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\quad,\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\quad,\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

پ) $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\quad,\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\quad,\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

قضيه *1.4.5*

اگر $\overrightarrow{U}$ و $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{W}$ بردارهايي در V3 و c يك اسكالر باشد آنگاه:

الف) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

ب) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$

پ) $(c\vec{u}) \times \vec{v} = c(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times (c\vec{v})$

ت) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

ث) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

قضيه1.4.7

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردارV3 و θ زاويه ي بين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ باشد،آنگاه:

$$|\vec{U} * \vec{V}| = |\vec{U}|\,|\vec{V}|\sin\theta$$

نتيجه1.4.9

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردار نا صفر در V3 باشند آنگاه و موازي اند اگر و تنها اگر $\vec{U}*\vec{V}=0$

قضیه 1.4.11

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ سه بردار در $V3$ باشند، آنگاه:

الف) $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$

ب) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$

تعریف 1.4.12

فرض مي كنيم $\vec{U}=(a1,a2,a3)$ و $\vec{V}=(b1,b2,b3)$ و $\vec{W}=(c1,c2,c3)$. حاصلضرب $\vec{U}.(\vec{V}*\vec{W})$ را حاصلضرب عددي سه گانه بردارهاي U و V و W مي ناميم.

حاصلضرب عددي سه گانه برابر است با:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

حاصلضرب عددي سه گانه يك اسكالر است.

قضیه ***1.4.13***

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردار نا صفر در باشند آنگاه:

الف) $\vec{u}.(\vec{u}\times\vec{v})=0$

ب) $\vec{v}.(\vec{u}\times\vec{v})=0$

1.5 بردارهاي فضاي n بعدي

تعريف1.5.1

فرض كنيدn عدد صحيح مثبتي باشد، n تايي مرتب (x1,x2…,xn)مجموعه اي ازn عدد است كه به ترتيب معيني نوشته شده اند.

اعداد حقيقي $x1,x2,......,xn$ را به ترتيب مؤلفه هاي اول تا nام اين n تايي مرتب مي خوانيم.مجموعه ي تمام nتايي هاي مرتب را با R نشان مي دهيم.

دو تايي مرتب $Y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$ و $X=(x_1,x_2,\ldots x_n)$ را برابر مب ناميم اگر و تنها اگر براي هر $i=1,2,\ldots n$ داشته باشيم:

$$x_i=y_i$$

تعریف 1.5.3

فرض مي کنيم$\vec{U}=(a1,a2,\ldots an)$ و $\vec{V}=(b1,b2,\ldots bn)$ دو بردار درVn و c عدد حقيقي (اسکالر) باشد.

مجموع دو بردار و ضرب اسکالر عدد در بردار به صورت زير تعزيف مي شود:

$$\vec{U}+\vec{V}=(a1+b1,a2+b2,\ldots,an+bn)$$

$$c\vec{U}=(ca1,ca2,\ldots,can)$$

قضيه 1.5.4

فرض مي كنيم $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ سه بردار در V_n و c و k دو اسكالر (عدد حقيقي) باشند. در اين صورت

الف) جمع بردارها جا به جايي پذير است، يعني

$$\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$$

ب) جمع بردارها شركت پذير است، يعني

$$\vec{W}+(\vec{U}+\vec{V})=(\vec{W}+\vec{U})+\vec{V}$$

پ)عمل جمع داراي عضو خنثي است يعني

بردار $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$ بردار صفر n مؤلفه اي وجود دارد به طوري كه

$$\vec{U}+\vec{0}=\vec{U}$$

ت) براي هر $\vec{U}$ بردار قرينه $-\vec{U}$ وجود دارا به طوري كه

$$\vec{U}+(-\vec{U})=\vec{0}$$

ث) $c(\vec{U}+\vec{V})=c\vec{U}+c\vec{V}$

ج) $(c\,k)\vec{U}=c(k\vec{U})$

ح) $(c+k)\vec{U}=c\vec{U}+k\vec{U}$

خ) وجود هماني نسبت به ضرب اسكالر،يعني

$$1\vec{U}=\vec{U}$$

تعریف 1.5.5

طول بردار U=(a1,a2,…an) برابر است با

$$|u| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

فصل دوم:ماتریس و دترمینان

در اين فصل با معرفي ماتريس مفهوم بردار را تعميم مي دهيم. همچنين انواع ماتريس،ماتريسهاي خاص و اعمال جبري روي ماتريس ها ،دترمينين و وارون ماتريس را مورد مطالعه قرار مي دهيم.

2.1ماتریس

تعريف 2.1.1

هر جدولي از اعداد را كه شامل m سطر و n ستون باشد،يك ماتريس mدرn مي ناميم و به شكل زير نشان مي دهيم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

يا

$$n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

هر يك از اعدادaij را يك عنصر يا درايه ماتريس مي ناميم.در اينجاi انديس سطر و j انديس ستون است،به بيان ديگر ،عنصرaij در محل تلاقي سطرi ام و ستونj ام ماتريس قرار دارد.

تعریف 2.1.2

الف) هر گاه ماتریس $A=(aij)mn$ تنها داراي يك سطر باشد،يعني $m=1$ ، اين ماتريس را يك ماتريس سطري (بردار سطري)مي ناميم.

ماتزيس [1و4و3-] يك ماتريس سطري است.

اگر ماتريس $A=(a_{ij})_{mn}$ تنـها داراي يك ستون باشد.يعنـي $n=1$،اين ماتريس را يك ماتريس ستونـي (بردار ستونـي)مي نـاميم.

ماتريس $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ يك ماتريس ستونـي است.

پ) اگر تمام عناصر ماتریس $A=(a_{ij})_{mn}$ صفر باشند آن را ماتریس صفر مي ناميم و به صورت $A=0_{mn}$ يا $A=0$ نشان مي دهيم.مانند:

F يك ماتريس صفر 2*3 است.

تعريف2.1.3

ماتريسي را كه تعداد سطرها و تعداد ستونهايش برابر باشد، يك ماتريس مربع مي ناميم.به بيان ديگر $A=(a_{ij})_{mn}$ يك ماتريس مربع است اگر و تنها اگر $m=n$

در ماتريس مربع $A=(a_{ij})_{mn}$، قطري را كه شامل عناصر $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ قطر اصلي و اين عناصر را عناصر قطر اصلي مي ناميم.

$$n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

تعريف*2.1.4*

ماتريس مربع $A=(a_{ij})_{mn}$ را يك ماتريس هماني يا واحد $n*n$ مي ناميم اگر هر يك از عناصر قطر اصلي برابر 1 و همه ي عناصر ديگر آن صفر باشند.

ماتريس واحد n*n را با Iنشان مي دهيم .مانند:

$$I_{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad I_{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

تعريف تساوي دو ماتريس 2.1.5

دو ماتريس $A=(a_{ij})_{mn}$ و $B=(b_{ij})_{pq}$ را برابر مي گوييم اگر $m=p$ و $n=q$ و براي هر i و j که $i=1,2,\ldots m$ و $j=1,2,\ldots n$ داشته باشيم $a_{ij}=b_{ij}$

براي مثال:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

تعريف2.1.7

فرض مي كنيم $A=(a_{ij})_{mn}$ و $B=(b_{ij})_{mn}$ دو ماتريس $m*n$ وk عددي حقيقي باشد.

الف) حاصل جمع این دو ماتریس را با $A+B$ نشان داده و به صورت زیر تعریف مي کنیم:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

ب)حاصل ضرب عدد حقيقي k در A ماتريس را با kA نشان داده و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

توجه كنيد كه $A+B$ و kA ماتريسهاي $m*n$ هستند.توجه داشته باشيد كه جمع دو ماتريس كه داراي تعداد سطرهاي متفاوت يا تعداد ستونهاي متفاوت باشند تعريف نشده است.

تعریف2.1.9

اگر $A=(a_{ij})_{m0}$ ماتريس (-1) A را قرينه ي ماتريس A مي ناميم و با $-A=(-a_{ij})_{m0}$ نشان مي دهيم.

اگر $A=(a_{ij})_{mn}$ و $B=(b_{ij})_{mn}$ بنابر تعريف داريم:

$$A-B=A+(-B)$$

قضیه 2.1.11

اگر A و B و C سه ماتریس $m*n$ و k و h دو عدد حقیقي باشند آنگاه:

الف) $A + B = B + A$

ب) $A + (B + C) = (A + B) + C$

پ) $k(A + B) = kA + kB$

ت) $(k + h)A = kA + hA$

تعريف2.1.13

ماتريسهاي A=(aij)mp و B=(bij)pn را در نظر مي كيريم.منظور از حاصل ضربA در B ماتريسm*n اي چون c به طوري كه

$$C=(c_{ij})_{\;n}$$

$$c_{ij} = x_{1j}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{ip}\, b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

حاصل ضربA در B يعنيc را باAB نشان مي دهيم.

قضيه 2.1.15

اگر $A=(aij)mn$ يك ماتريس مربعي $n*n$ باشد آنگاه:

$$AI_n = A = I_nA$$

قضیه*2.1.16*

اگر $A=(a_{ij})_{mp}$ و $B=(b_{ij})_{pq}$ و $C=(c_{ij})_{qn}$ آنگاه

$A(BC)=(AB)C$

قضیه 2.1.19

اگر $A=(a_{ij})_{pn}$ و $B=(b_{ij})_{pn}$ و $C=(c_{ij})_{mp}$

$C(A+B)=CA+CB$

تعريف 2.1.20

اگر در ماتريس $A=(a_{ij})_{mn}$ جاي سطرها و ستونها را با يكديگر عوض كنيم، ماتريس حاصل را ترانهاده (Transpose) ماتريس A مي ناميم و آن را با A^T نشان مي دهيم. به بيان ديگر $A^T=(b_{ij})_{nm}$ كه در آن براي i و j داريم:

$b_{ij}=a_{ij}$

قضیه2.1.21

اگر A و B دو ماتریس $m*n$ و k عددي حقيقي باشد آنكاه:

الف) $(A^T)^T = A$ یعني ترانهاده ، ترانهاده ماتریس با ماتریس برابر است.

ب) $(kA)^T = k(A^T)$ يعني ترانهاده مضربي از يك ماتريس با همان مضرب ترانهاده ماتريس بربار است.

پ) $(A+B)^T = A^T + B^T$،يعني ترانهاده مجموع دوماتريس با مجموع ترانهاده هاي دو ماتريس برابر است.

ت) اگر A و B دو ماتريس مربع باشند،آنگاه $(AB)^T = B^T A^T$ ،يعني ترانهاده ي حاصلضرب دو ماتريس با حاصلضرب ترانهاده ماتريس دومي در ترانهاده ماتريس اولي برابر است.

تعریف *2.1.23*

الف) ماتريس مربع A را متقارن مي ناميم اگر $A = A^T$.

براي مثال ماتريس زير متقارن است .توجه كنيد كه در ماتزيس متقارن عناصر ماتريس نسبت به قطر اصلي متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ -۳ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

ب) ماتريس A مربع را شبه متقارن مي ناميم اگر $A=-A^T$. اگر
يك ماتريس شبه متقارن باشد بايد براي هر i و j داشته باشيم
$a_{ij}=-a_{ij}$ اما از $a_{ii}=-a_{ii}$ نتيجه مي شود $a_{ii}=0$. پس عناصر
قطر اصلي در ماتريس شبه متقارن همگي برابر صفرند.

پ) ماتريس A مربع را قطري مي ناميم اگر همه ي عناصر غير واقع بر قطر اصلي آن صفر باشند.مانند:

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

ت) ماتريس قطري S را يك ماتريس اسكالر مي ناميم، اگر عناصر قطر اصلي آن برابر عدد ثابت K باشد، يعني

$$S=\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

ث) ماتريس n*n و c را متعامد مي گوييم اگر :

$$CC^T = C^TC = I_n$$

براي مثال:

$$C=\begin{bmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}}\\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}}\end{bmatrix}\;,\; C^T=\begin{bmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{-۱}{\sqrt{۲}}\\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}}\end{bmatrix}$$

آنگاه

$$CC^T=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=C^TC=I_۲$$

پس c ماتريسي متعامد است.

ج)ماتريس مربعU را ماتريس مثلثي بالا مي ناميم، اگر تمام عناصر زير قطر اصلي آن صفر باشد.مانند:

$$U=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

چ)ماتريس مربع L را ماتريس مثلثي پايين مي ناميم، اگر تمام عناصر بالاي قطر اصلي آن صفر باشد.مانند:

$$L=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۳ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

تعریف 2.1.25

در ماتريس مربع $A=(a_{ij})_{nn}$ مجموع تمام قطر اصلي را اثر A مي ناميم و با $tr(A)$ نشان مي دهيم.پس:

$$t_r(A)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$$
$$=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2.2 دترمینان

دترمینان ماتریس A را با $\det A$ یا $|A|$ نشان مي دهیم.

تعریف *2.2.1*

1) ماتريس 1*1 تنها داراي يك عنصر a11 است، دترمينان اين ماتريس را برابر با عدد a11 تعريف مي كنيم.

2) دترمينان ماتريس 2*2

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۱} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$

به صورت زير تعريف مي شود

$$\text{Det } A = A = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} = \text{a11a22-a12a21}$$

تعریف2.2.2

ماتریس $A=(a_{ij})_{nn}$ را در نظر مي گيريم. فرض کنيد M_{ij} ماتريسي$(n-1)*(n-1)$ باشد که از حذف سطرi ام و ستونj ام ماتريسA به دست آمده است. دترمينان ماتريس $|M_{ij}|$،يعني M_{ij} را مينور عنصر در ماتريس مي ناميم.

تعريف2.2.3

همسازه عنصر aij در ماتريس A=(aij)nn را با Aij نشان مي دهيم وبرابر با عدد زير است:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left|M_{ij}\right|$$

تعریف2.2.4

دترمینان ماتریس A=(aij)nn را به صورت

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

تعریف مي کنیم.مي گوییم دترمینیانA بر حسب سطر i ام

بسط داده شده است.

بنابر اين تعريف براي محاسبه ي دترمينان يك ماتريس، يك سطر يا يك ستون را انتخاب مي كنيم . اين سطر يا ستون را در همسازه اش ضرب ، سپس مقادير حاصل را با هم جمع مي كنيم.

اگر دترمينان را بر حسب سطر يا ستوني كه بيشترين تعداد صفر را دارد محاسبه مي كنيم، محاسبات كوتاهتر مي شود، زيرا نيازي به محاسبه ي همسازه هاي صفر نيست.چون حاصلضرب صفر در هر همسازه اي صفر است.

قضيه(خواص دترمينان)2.2.7

1) دترمينان ماتريس مربع A و ترانهاده A برابر است .يعني:

$$|A^T| = |A|$$

2) اگر تمام عناصر يك سطر يا يك ستون ماتريس A صفر باشند، آنگاه

$$|A| = 0$$

3) اگر تمام عناصر يك سطر يا يك ستون ماتريس A در عدد r ضرب مي كنيم آنگاه دترمينان ماتريس حاصل برابر با $|A|r$ است.

4) دترمينان ماتريس حاصل از تعويض دو سطر يا دو ستون ماتريس A مساوي است با منهاي دترمينان A.

5) اگر دو سطر يا دو ستون ماتريسي برابر باشند، آنگاه مقدار دترمينان آن برابر با صفر است.

6)دترمينان حاصل از جمع مضرب اسكالري از يك سطر (يا ستون) با سطري (يا ستوني) ديگر از ماتريس A مساوي است با دترمينان A.

7) دترمينان حاصلضرب دو ماتريس برابر با حاصلضرب دترمينانهاي آنها است يعني

$$|AB| = |A|\,|B|$$

8) دترمينان يك ماتريس قطري برابر است با حاصلضرب عناصر روي قطر اصلي آن.

9) دترمينان ماتريس واحد برابر يك است، يعني

$$|I_n| = 1$$

تعریف2.2.15

اگر دترمینان ماتریس $A=(a_{ij})_{nn}$ برابر صفر باشد ، ماتریس A را منفرد مي ناميم. در غير اين صورت ماتریس را غير منفرد مي ناميم.

ماتریس زير منفرد است.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

2.3وارون ماتریس

تعریف 2.3.1

ماتريس $A=(aij)nn$ را وارون پذير مي ناميم ، اگر ماتريسي مانند $B=(bij)nn$ وجود داشته باشد به طوري که

$$AB=BA=In$$

اگر A ماتريسي وارون پذير باشد، آنگاه وارون آن منحصر به فرد است و آن را با A^{-1} نشان مي دهيم.

اعمال سطري مقدماتي2.3.5

ماتريس $A=(a_{ij})_{nn}$ را در نظر مي كيريم. هر يك از اعمال زير را كه بر روي سطر هاي ماتريس A انجام مي پذيرد، يك عمل سطري مقدماتي مي ناميم.

1) تعويض دو سطر ماتريس A.

2) ضرب يك سطر ماتريس A در يك عدد نا صفر.

3) افزودن مضربي از يك سطر ماتريس A به سطري ديگر.

براي اختصار در نوشتن اعمال سطري مقدماتي ، از حرف R ، اول كلمه ي Row به معناي سطر به صورت زير استفاده مي كنيم.

الف) $R_j \rightleftarrows R_i$ به معناي تعويض سطر i ام و سطر j ام

ب) kR_1 به معناي ضرب سطر i ام ماتريس در عدد ناصفر k

پ) R_j+kR_i به معناي افزودن برابر سطر ام به سطر ام

قضیه2.3.8

اگر ماتريس وارون پذير A به وسيله ي يك سلسله اعمال مقدماتي تبديل به ماتريس واحد شود، آنگاه با انجام همين سلسله اعمال سطري مقدماتي بر روي ماتريس واحد ، وارون ماتريس A به دست مي آيد.

براي به دست آوردن وارون ماتريس A معمولا اعمال سطري مقدماتي را به طور هم زمان بر روي ماتريس A و ماتريس واحد انجام مي دهند.لذا ماتريس مركب[A I] را در نظر گرفته و با انجام يك سلسله اعمال مقدماتي سطري آن را تبديل به[I B] ميكنيم.بنا بر قضيه ي بالا، برابر وارون ماتريس است.

تعریف 2.3.11

ترانهاده ماتريس همسازه هاي ماتريس مربع A را ماتريس الحاقي A مي ناميم و با نشان مي دهيم ، پس:

$$adjA=(A_{ij})^T$$

قضیه2.3.13

اگر A یك ماتریسn*n باشد آنـگاه :

$$A\,(\mathrm{adj}\,A) = (\mathrm{adj}\,A) = (\mathrm{adj}\,A)I_n$$

قضيه *2.3.13*

اگر $\det A \neq 0$ ،آنگاه وارون وجود دارد و برابر است با

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

عكس اين نتيجه نيز درست است.يعني اگر A وارون پذير باشد
آنگاه ،

$$\det A \neq 0$$

قضیه2.3.17

اگر A و B دو ماتریس مربع n*n و وارون پذیر باشند آنگاه

الف) ماتریس حاصلضرب وارون پذیر است و

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

ب) ماتریس ترانهاده A وارون پذیر است و

$$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$$

پ) وارون ماتريس وارون A برابر A است ، يعني

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ت) دترمينان وارون ماتريس A برابر با معكوس دترمينان A است يعني

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

فصل سوم: دستگاه معادلات خطي و توابع خطي

در اين فصل با استفاده از مفهوم ماتريس و دترمينان روشي براي حل و بحث در وجود جوابهاي دستگاه معادلات خطي ارائه دهيم. سپس استقلاال و وابستگي خطي يك مجموعه از بردارها را مورد بررسي قرار دهيم. در خاتمه ي فصل با توابع خطي آشنا مي شويم.

دستگاه معادلات خطي3.1

معادله اي به صورت $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$ با مجهول $x_1,x_2,\ldots,x_n$ را يك معادله ي n مجهولي خطي مي ناميم.
n تايي $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ از اعداد حقيقي را كه در اين معادله صدق كنند يك جواب آن مي ناميم.

تعريف 3.1.1

مجموعه اي از معادلات خطي

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + x_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

را يك دستگاه m معادله ي خطي n مجهولي مي ناميم.

تايي از اعداد حقيقي را در تمام معادله هاي دستگاه صدق كند
يك جواب اين دستگاه مي ناميم.

اين دستگاه را ميتوان به صورت معادله ي ماتريسي زير نوشت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

با فرض

$$B=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\quad A=(a_{ij})_{m\times n}$$

معادله ي ماتريسي اخير به صورت خلاصه ي زير در مي آيد.

$$AX=B$$

Aرا ماتريس ضرايب X را ماتريس مجهولها و B را ماتريس طرف دوم دستگاه معادلات خطي مي ناميم.

توجه كنيد يك دستگاه معادلات خطي ممكن است داراي يك جواب منحصر به فرد يا بينهايت جواب باشد ويا اصلا جوابي نداشته باشد.

اينك به معرفي روشهايي براي حل يك دستگاه معادلات خطي مي پردازيم.

1- روش حذف گوسي

2- دستور كرامر

روش حذف گوسي*3.1.2*

ميتوان نشان داد دو دستگاه معادلات خطي كه يكي از آنها به وسيله ي انجام اعمال زير روي معادلات دستگاه ديگري به دست آمده باشد داراي جواب يا جوابهاي يكسان هستند:

1) ضرب يك معادله ي دستگاه در عددي غير صفر.
2) تعويض محل دو معادله ي دستگاه و
3) افزودن مضربي از يك معادله به معادله ي ديكر دستگاه.

پس براي حل دستگاه $AX=B$ بايد تا جايي كه ممكن است به وسيله ي اعمال سطري مقدماتي ماتريس$[A|B]$ را به ماتريس ساده تري تبديل كنيم تا جوابها به آساني به دست آيند.

قضیه3.1.6

اگر تعداد مجهولها با تعداد معادله ها ي يك دستگاه معادلات خطي برابر باشد (دستگاهn معادلات n مجهولي) و ماتريس ضرايب دستگاه وارون پذير باشد آنگاه دستگاه همواره داراي يك جواب منحصر به فرد است.

دستور کرامر 3.1.8

اگر ضرایب یك دستگاه n معادلات n مجهولي وارون پذير باشد آنگاه جواب دستگاه برابر است با

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad i = ۱,۲,\dots,n \quad (*)$$

که دران A_i ماتريس حاصل از جايگزين كردن ماتريس ستوني $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ در ستون iام ماتريس A است.

فرمول * را دستور كرامر مي ناميم.

تعریف 3.1.10

اکر در دستگاه m معادله ي n خطي مجهولي طرف دوم تمام معادلات صفر باشند دستگاه را همگن مي ناميم. در غير اين صورت دستگاه را غير همگن مي ناميم.

روشن است كه در دستگاه همگن همواره $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ يك جواب دستگاه هست. اين جواب به جواب بديهي دستگاه موسوم است.

قضیه 3.1.11

دستگاه n معادله ي خطي n مجهولي همگن داراي يك جواب غير بديهي (غير صفر) است. اگر و تنها اگر دترمينان ضرايب دستگاه صفر باشد.

نتیجه3.1.13

يك دستگاه m معادله يn خطي مجهولي همگن همواره داراي يك جواب غير بديهي (غير صفر) است اگر

$m<n$

قضیه 3.1.15

اگر X_1 و X_2 دو جواب دستگاه غیر همگن $AX=B$ باشند آنگاه X_2-X_1 جوابي براي دستگاه همگن $AX=0$ است.

نتیجه3.1.13

دستگاه غیر همگن AX=B داراي يك جواب منحصر به فرد است اگر و تنها اگر جواب AX=0 منحصر به فرد باشد.

استقلال و وابستگي خطي3.2

تعريف *3.2.1*

مجموعه ي m بردار $\{\vec{V1},\vec{V2},\dots,\vec{Vn}\}$ از عناصر فضاي برداري R را مستقل خطي مي ناميم اگر هيچ مجمو عه اي از اعداد حقيقي $c1,c2,\dots,cn$ به جز $c1=c2=\dots=cm=0$ وجود نداشته باشد به طوري كه

$$C_1V_1+C_2V_2+\dots+CV_m=0$$

به بيان ديگر مجموعه ي m بردار $\{\vec{V}1,\vec{V}2,\ldots,\vec{V}n\}$ مستقل خطي است تنها جواب معادله ي

$$C_1V_1 + C_2V_2 + \ldots + CV_m = 0$$

برابر با $c1=c2=\ldots=cm=0$ باشد. در غير اين صورت اين مجموعه را وابسته ي خطي مي ناميم.

رتبه ي يك ماتريس3.3

در اين بخش به هر ماتريس عدد صحيح و مثبتي به نام رتبه ي ماتريس را نسبت مي دهيم. با استفاده از اين عدد در مورد جوابهاي دستگاههاي معادلات خطي را بررسي مس كنيم.

تعريف *3.3.1*

فرض كنيم A ماتريسي $m*n$ باشد. حداكثر تعداد سطرهاي مستقل خطي ماتريس A را رتبه ي ماتريس A مي ناميم و با نشان $r(A)$ مي دهيم.

به عبارت ديگر اگر $R1,R2,\ldots,Rm$ سطرهاي ماتريس A باشند رتبه ي a برابر با حداكثر تعداد بردارهاي مستقل خطي در مجموعه ي $\{R1,R2,\ldots,Rm\}$ است.

يك روش تعيين رتبه ي ماتريسA اين است كه بزرگترين زير ماتريس مربع A را كه دترمينانش مخالف صفر باشد به دست آوريم ، تعداد سطرهاي اين ماتريس برابر رتبه ي ماتريس A است.

خواص رتبه ي ماتريس3.3.6

الف) رتبه ي ماتريس واحد I_n برابر با n است، يعني:

$$r(I_n) = n$$

ب) رتبه ي ماتريس A با رتبه ي ترانهاده ي A برابر است ، يعني:

$$r(A) = r(A^T)$$

پ) اگر A ماتریس $n*n$ باشد آنگاه $r(A)=n$ اگر و تنها اگر $\det A\neq 0$ به بیان دیگر $r(A)<n$ اگر و تنها اگر $\det A=0$.

ت) رتبه ي حاصلضرب دو ماتريس همواره نابيشتر از كوچكترين رتبه دو ماتريس است ، يعني:

$$r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$$

نتیجه3.3.7

اينك با استفاده از مفهوم رتبه ي ماتريس به طور خلاصه به بررسي جوابهاي دستگاه معادلات خطي $AX=B$ در حالتهاي مختلف مي پردازيم.

فرض مي كنيم ماتريس ضرايب A ، باشد.m برابر با تعداد معادلات و n مساوي با تعداد مجهولهاي دستگاه است. رتبه ي ماتريس مركب$[A|B]$ را با$r(A|B)$ نشان مي دهيم.

الف) اگر $r(A|B)=r(A)$ آنگاه دستگاه داراي حداقل يك جواب است.

ب) اگر $r(A|B)=r(A)=n$ آنگاه دستگاه داراي يك جواب منحصر به فرد است.

پ) اگر $r(A|B)=r(A)<n$ آنگاه دستگاه داراي بي نهايت جواب و مجموعه سطر هاي ماتريس A وابسته ي خطي است.

ت) اگر $r(A|B)\neq r(A)$ آنگاه دستگاه جواب ندارد.

توابع خطي3.4

در اين بخش به مطالعه ي توابع خطي كه توابعي از يك فضاي برداري به فضاي برداري ديگري هستند مي پردازيم.

تعريف 3.4.1

تابع n متغيره ي f از فضاي برداري R^n به فضاي برداري R^m را كه به ازاي هر عدد حقيقي r و هر دو n تايي

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

از R^n در دو شرط زير صدق مي كند، يك تابع خطي مي ناميم.

۱) $f(X+Y)=f(x)+f(Y)$

۲) $f(rx)=rf(x)$

قضيه 3.4.3

تابع $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ خطي است.اگر و تنها اگر هر مؤلفه مقدا رتابع

f در $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ به صورت يك تركيب خطي از اعداد

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ باشد.

از اين قضيه نتيجه مي شود كه اگر $f: R^n \to R^m$ تابع خطي با شد آنـگاه اعداد حقيقي

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

وجود دارند به طوري كه

$$f(x)=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+x_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+x_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

بنا بر اين $A=(aij)m*n$ قرار دادن مقدار تابع خطي f

را ميتوان به ازاي هر $R^n \longleftarrow x$ به صورت ماتريسي

$$F(x)=Ax$$

نوشت.ماتريس A را يك ماتريس نمايشگر تابع خطي F مينامیم.

تعريف 3.4.6

تابع $F: R^n \to R^m$ را كه براي هر به صورت زير تعريف مي شود، تابع صفر مي ناميم.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

تعريف ميشود .تابع هماني مي ناميم.

تعریف 3.4.7

تابع $I: R^n \longrightarrow R^n$ را که براي هر $X \in R^n$ به صورت

$$I\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

تعریف 3.4.8

توابع خطي $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را در نظر مي گيريم:

1) مجموع f و g را با $f+g$ نشان ميدهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$f(x)+g(x)=(x)(f+g)$$

2) فرض ميكنيم k عددي حقيقي باشد.حاصلضرب عدد حقيقي k در f را با نشان kf ميدهيم و به صورت زير مي نويسيم.

$$k\,f(x)=(x)(kf)$$

فصل چهارم:توابع چند متغیره

در فصل هاي قبل با توابعي سر و كار داشتيم كه تنها وابستهبه يك متغير بودند. اين نوع توابع را يك متغيره مي ناميم. ولي اكثر توابع در اقتصاد و مديريت به بيش از يك متغير وابسته اند.

فرض كنيد هزينه ي ماهانه ي خانواده اي بستگي به مقدار مصرف آنها از مواد غذايي،پوشاك،خدمات مسكوني و خدمات بهداشتي و درماني دارد.پس مس توان گفت تابع هزينه ي اين خانواده يك تابع 4 متغيره است.

توابع چند متغیره 4.1

تابع f که قلمرو آن زیر مجموعه اي از R^n و برد آن زیر مجموعه اي از اعداد حقیقي باشد.یك تابع n متغیره مي ناميم.

اگر f يك تابع n متغيره باشد هر عنصر قلمرو آن n، تايي $(x1.x2,\ldots,xn)$ است ، مقدار تابع به ازاي اين عنصر قلمرو را با $f(x1.x2,\ldots,xn)$ نشان مي دهيم.

تعريف 4.1.3

اگر f,g دو تابع n متغيره باشند آنگاه براي هر x از R^n و هر عدد حقيقي k، اعمال جبري زير تعريف مي شود.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(kf)(x)=kf(x)$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

4.2حد و پيوستگي توابع چند متغيره

تعريف 4.2.1

فرض مي كنيم f يك تابع دو متغيره باشد مي گوييم حد تابع f در نقطه ي (a,b) برابر با L است . هنگامي كه نقطه (x,y) به نقطه ي (a,b) نزديك و نزديكتر مي شود مقدار f(x,y) به عدد حقيقي L نزديك و نزديكتر شود .

مي توان نشان داد كه عدد حقيقي L در صورت وجود منحصر به فرد است و لذا L را با نماد زير نشان مي دهيم.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

حد توابع سه متغيره و به طور كلي n متغيره نيز به همين صورت تعريف مي شود.تمام مطالبي كه در اين بخش براي توابع دو متغيره عنوان مي شود براي توابع n متغيره نيز درست است.

قضیه 4.2.2

اگر $g(x,y)=y$, $f(x,y)=x$ آنگاه

الف)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=a$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=b$$

ب) اگر $k(x,y)=k$ تابعي ثابت باشد آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} k(x,y)=k$$

که در آن k عددي ثابت است.

قضيه *4.2.3*

اگر حد تابع دو متغيره ي f در نقطه ي (a,b) برابر L باشد آنگاه

$$\lim_{(a,y)\to(a,b)} f(a,y) = L$$

$$\lim_{(x,b)\to(a,b)} f(x,b) = L$$

این قضیه بیان مي کند که اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x.y)=L$ آنگاه حد تابع f

وقتي که نقطه ي (x,y) در مسیرهاي $y=b$ یا $x=a$ به تقطه

ي میل کند برابر با L است.

قضيه4.2.5

اگر حد تابعf هنگامي(x,y) كه بر روي دو منحني متمايز به نقطه ي(a,b) نزديك مي شود متفاوت باشد آنگاه حد تابعf در اين نقطه وجود ندارد.

نتیجه4.2.6

اگر

$$\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x,y)] \neq \lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x,y)]$$

آنگاه تابع f در نقطه ي(a,b) حد ندارد.

توجه كنيد در $\lim\limits_{x\to a}[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)]$ دا x را ثابت فرض كرده $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ را در صورت وجود محاسبه مي كنيم.سپس حد عبارت به دست آمده را كه تابعي از x است وقتي كه $x \to a$ پيدا مي كنيم.

قضیه *4.2.8*

اگر حد توابع دو متغیره يf و g در نقطه ي (a,b) اگر حد توابع دو متغیره يf و g در نقطه ي (a,b) وجود داشته باشد آنگاه

1)حد مجموع دو تابع برابر با مجموع حدهاي آنها است، يعني:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

2)براي هر عدد ثابت k

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (kf)(x,y) = k \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

3)حد تفاضل دو تابع برابر با حدهاي آنهاست يعني:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f-g)(x,y) \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

4)حد حاصلضرب دو تنبع برابر با حاصلضرب حدهاي آنهاست.يعني:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (fg)(x,y)[\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)] \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

5) حد خارج قسمت دو تابع برابر با خارج قسمت حدهاي آنهاست مشروط بر اينكه حد تابع مخرج مخالف صفر باشد، يعني:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \quad , \lim g(x,y) \neq 0$$

قضیه4.2.10

اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ و تابع یك متغیرهg در L پیوسته

باشد آنگاه:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} gof(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y)) = g(L)$$

4.2.12 تعريف

تابع دو متغيره ي f را در نقطه ي (a,b) پيوسته مي ناميم اگر شرايط زير بر قرار باشد.

1) تابع f در نقطه ي (a,b) تعريف شده باشد يعني f (a,b) معين باشد.

2) $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(x,y)$ وجود داشته باشد.

3) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

در صورتي كه يكي از اين شرايط بر قرار نباشد تابع f را در نقطه ي (a,b) نا پيوسته مي ناميم.

قضیه 4.2.14

اگر توابع دو متغیره ي f و g در نقطه ي (a,b) پیوسته باشند آنگاه توابع kf، $f-g$، $f+g$ (kعددي حقيقي) fg و $\frac{f}{g}$ (با شرایط $g(a,b) \neq 0$) نیز در نقطه ي (a,b) پیوسته اند.

قضيه *4.2.16*

اگر تابع دو متغيره ي f در نقطه ي (a,b) و تابع يك متغيره ي g در f (a,b) پيوسته باشند آنگاه تابع مركب gof در نقطه ي (a,b) پيوسته است.

مشتقهاي جزئي 4.3

در اين بخش مفهومي نزديك به مفهوم مشتق توابع يك متغيره را در مورد توابع چند متغيره ارائه مي دهيم. از اين مفهوم براي شناخت بهتر توابع چند متغيره استفاده مي كنيم.

تعريف4.3.1

فرض مي كنيم f تابعي از دو متغير x و y باشد. اگر

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

وجود داشته باشد مقدار اين حد را مشتق جزيي f نسبت به متغير x در نقطه ي (x,y) ميناميم.و آن را با نمادهاي $f_x(x,y)$ يا $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ (بخوانيد روند f به روند x (x,y)) نشان مي دهيم.

به همين ترتيب مشتق جزيي تابع f نسبت به متغير y در نقطه ي (x,y) به صورت

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = fy(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

تعريف مي شود.مشروط بر اينكه اين حد وجود داشته باشد.

اگر $f_x(x,y)$ وجود داشته باشد f_x تابعي از دو متغير x و y است

اين تابع را به صورت خلاصه $\frac{\partial f}{\partial x}$ نشان ميدهيم.

تابع $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ نيز به همين ترتيب تعريف مي شود.

توابع f_x و f_y را مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول f مي ناميم.

در اينجا نماد ∂ را به جاي d برتي تمايز مشتقهاي جزيي از مشتق معمولي به كار مي بريم.

براي محاسبه ي $f_x(x,y)$ در تابع $f(x,y)$ متغير y را ثابت تلقي مي كنيم. و از f نسبت به متغير x مانند يك تابع يك متغيره مشتق مي گيريم.

به همين ترتيب در محاسبه ي $f_x(x,y)$ متغير را در تابع$f(x,y)$ ثابت در نظر گرفته و ازf نسبت به متغير y مانند يك تابع يك متغيره مشتق مي گيريم.

4.3.4 مشتقهاي جزيي مرتبه هاي بالاتر

نظير مفهوم مشتقهاي مرتبه هاي بالاتر براي توابع يك متغيره مي توان مشتقهاي جزيي مرتبه هاي بالاتررا براي توابع nمتغيره تعريف كرد. اگر f تابعي از دو متغيرx و y باشد آنگاه f_x و f_y نيز توابعي از متغيرهايx و y هستند.پس مي توان مشتقهاي جزيي توابع f_x و f_y را تعريف كرد.

این مشتقها را مشتقهاي جزيي مرتبه دوم تابع f مي ناميم.

مشتقهاي جزيي مرتبه دوم تابع f عبارتند از:

$$F_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$F_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$F_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$F_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

لازم به تذكر است كه ترتيب نوشتن متغيرهاي x و y در f_{xy} بر

خلاف ترتيب آنها در نماد $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ است.

قضيه 4.3.6

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر توابع f_{xy} و f_{yx} در نقطه ي (a,b) پيوسته باشد آنگاه:

$$F_{xy}(a,b)=F_{yx}(a,b)$$

دیفرانسل کل و مشتقگیري ضمني4.4

تعريف 4.4.1

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر مشتقهاي جزيي مرتبه اول f وجود داشته باشد ديفرانسيل كل تابع f را با نشان df ميدهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم كه در آن dx و dy به ترتيب ديفرانسيل متغير هاي x و y است.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

ديفرانسيل كل تابع بيش از دو متغيره نيز به همين ترتيب تعريف مي شود، اگر u تابعي از چهار متغير z، x، y و t باشد آنگاه ديفرانسيل كل تابع برابر است با:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

نكته4.4.3

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر متغير هاي x و y نيز توابع يك متغيره ي مشتقپذيري از متغير ديگري مانند t باشند آنگاه داريم:

$$dx=\frac{dx}{dt}dt$$

$$dy=\frac{dy}{dt}dt$$

تعریف4.4.6

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول f بر روي ناحيه اي پيوسته باشد و متغير هاي x و y توابعي ازمتغير ديگري مانند t باشند آنگاه مشتق تابع f نسبت به t را با df/dt نشان مي دهيم و بنابراين تعريف برابر است با

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

توجه كنيد كه در واقع fتنها تابعي از متغير t است.

قاعده زنجيري براي توابع چند متغيره*4.4.8*

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر متغير هاي x و y توابعي از دو متغيرu وv باشند آنگاه مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول f نسبت به متغير هاي u وv برابرند با:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

قاعده زنجيري براي توابع بيش از دو متغير كاملا مشابه است.

مشتقگيري ضمني *4.4.10*

به كمك مفهوم مشتقهاي جزيي مي توان دستور ساده اي براي مشتقگيري از توابع ضمني (غير صريح) دو متغيره به دست آورد.

فرض مي كنيم معادله ي $f(x,y)=0$ ، متغير y را به صورت تابعي از x به طور ضمني تعريف كند، $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ وجود داشته باشند و $\partial f/\partial y \neq 0$ آنگاه به دست مي آوريم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{Fx(x,y)}{Fy(x,y)}$$

4.4.12 مشتقهاي جزيي توابع ضمني

فرض مي كنيم تابع دو متغيره ي $z=f(x,y)$ در معادله ي $F(x,y,z)$ صدق كند. پس اگر $\partial F/\partial x \neq 0$ آنگاه:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}$$

به همين ترتيب به دست مي آوريم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{Fy(x,y,z)}{Fx(x,y,z)}$$

مشروط بر اینکه ∂F/∂x=ρ

ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره 4.5

همهنطور كه از مشتقهاي اول و دوم يك تابع يك متغيره براي تعيين ماكسيمم و مينيمم آن استفاده مي كرديم از مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول و دوم مي توان براي يافتن ماكسيمم و مينيمم توابع چند متغيره استفاده كنيم.

تعريف *4.5.1*

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. در اين صورت:

الف) f(a,b) مقدار ماكسيمم (مطلق) fمي ناميم. اگر براي هر (x,y) از قلمرو f داشته باشيم:

F(x,y)<=f(a,b)

ب) $f(a,b)$ مقدارمينيمم (مطلق) fمي ناميم. اگر براي هر(x,y) از قلمرو f داشته باشيم:

$$F(x,y)>=f(a,b)$$

تعريف 4.5.2

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. در اين صورت:

الف) مي گوييم f تابع در (a,b) داراي يك ماكسيمم نسبي است. اگر دايره به مركز (a,b) در قلمرو f وجود داشته باشد به طوري كه به ازاي هر (x,y) در درون اين دايره داشته باشيم:

$$f(x,y)<=f(a,b)$$

ب) مي گوييم f تابع در (a,b) داراي يك مينيمم نسبي است. اگر دايره به مركز (a,b) در قلمرو f وجود داشته باشد به طوري كه به ازاي هر (x,y) در درون اين دايره داشته باشيم:

$$f(x,y)>=f(a,b)$$

قضيه 4.5.4

فرض مي كنيم تابع دو متغيره f در (a,b) يك ماكسيمم يا مينيمم نسبي دارد. اگر مشتقهاي جزيي مرتبه ي اول f در (a,b) موجود باشند آنگاه:

$F_x(a,b)=0$

$F_y(a,b)=0$

از اين قضيه نتيجه مي شود كه اگر تابع f در (a,b) يك ماكسيمم
يا مينيمم نسبي داشته باشد آنگاه (a,b) يك جواب دستگاه دو
مجهولي زير است:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0$$

هر جواب اين دستگاه را (نظير توابع يك متغيره) يك نقطه ي بحراني تابع f ميناميم.توجه كنيد كه نقطه ي (c,d) ممكن است يك نقطه ي بحراني f باشد ولي تابع f در اين نقطه ماكسيمم و مينيمم نسبي داشته باشد.

اگر $F_x(a,b) = F_y(a,b)$ ولي تابع F در (a,b) ماكسيمم يا مينيمم نسبي نداشته باشد مي گوييم تابع F در (a,b) داراي يك نقطه ي زين اسبي است.

معمولا با استفاده از تعريف تشخيص اينكه يك نقطه ي بحراني تابع دو دو متغيره ي F ماكسيمم است يا مينيمم مشكل است . اما به كمك مشتقهاي جزيي مرتبه ي دوم توابع يك يك متغيره قادر به اين امر هستيم.

آزمون مشتق دوم 4.5.8

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد.و Fy(a,b)=0 =Fx(a,b) همچنين فرض مي كنيم مشتقهاي جزيي F درون دايره اي به مركز (a,b) پيوسته باشند و

$$\Delta(x,y)=F_{xx}(x,y)F_{yy}(x,y)-[F_{xy}(x,y)]^2$$

در این صورت

الف) اگر $\Delta(a,b)>0$ و $F_{xx}(a,b)<0$ آنگاه F در (a,b) ماکسیمم نسبي دارد.

ب) اگر $\Delta(a,b)>0$ و $F_{xx}(a,b)>0$ آنگاه F در (a,b) مینیمم نسبي دارد.

پ) اگر $\Delta(a,b)<0$ آنگاه F در (a,b)يك نقطه ي زين اسبي دارد . به عبارت ديگر ماكسيمم و مينيمم ندارد.

ت) اگر $\Delta(a,b)=0$ از اين آزمون نتيجه اي به دست نمي آيد.

دقت کنید که اگر $\Delta(a,b)>0$ آنگاه حاصلضرب $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$ مثبت است.پس $f_{xx}(a,b)$ و $f_{yy}(a,b)$ هم علامت مي باشند .در نتيجه در بندهاي الف و ب آ زمون مشتق دوم میتوان $f_{yy}(a,b)$ را جایگزین $f_{xx}(a,b)$ نمود.

4.6 ماکسیمم و مینیمم توابع نسبت به شرایط داده شده

در اكثر مسايل مديريت و اقتصاد تعيين ماكسيمم و مينيمم يك تابع چند متغيره با توجه به يك يا چند شرط صورت مي گيرد.

براي مثال فرض كنيد هدف يك مصرف كننده به حداكثر رسانيدن مطلوب در مصرف دو كالاي 1و2 است. فرض كنيد قيمت اين دو كالا به ترتيب برابر باp_1 وp_2 ميزان مصرف او از اين دو كالا به ترتيب برابر با x_1وx_2 باشد.اما اين مصرف كننده محدوديتهايي نيز دارد.

يكي از محدوديتها ميزان درآمد او است. پس مطلوب است اين مصرف كننده تابعي از ميزان استفاده او از اين دو كالا بوده و ميزان مخارج مصرفي او از اين دو كالا بايد با ميزان درآمد او نيز برابر باشد.به بيان ديگر ميتوان گفت كه اين مصرف كننده ميخواهد مطلوبيت خود را با ت.جه به محدوديت درآمد به حد اكثر برساند.

پس باید ماکسیمم تابع

$U=f(x1,x2)$

را نسبت به شرط (محدودیت)

$P1x1+p2x2=y$

پیدا کنیم که در آن $U=f(x1,x2)$ تابع مطلوب است.

به دو روش مي توان اين كار را انجام داد. يكي به روش جايگزيني و ديگري به روش لاگرانژ .اين دو روش را در زير معرفي مي كنيم.

روش جايگزيني4.6.1

يكي از روشهاي به دست آوردت ماكسيمم و مينيمم توابع نسبت به شرايط داده شده از طريق جايگزين كردن تلبع محدوديت (شرايط داده شده) در تابع هدف است. بدين ترتيب مسئله تبديل به مسئله ي ماكسيمم يا مينيمم كردن يك تابع بدون محدوديت ميشود.

روش لاگرانژ 4.6.3

میخواهیم ماکسیمم یا مینیمم تابع دو متغیره ي $f(x,y)$ را با محدودیت $g(x,y)=0$ بیابیم.متغیر جدیدλ موسوم به ضریب لاگرانژ را در نظر مي گیریم با استفاده از متغیر λ تابع جدیدي به نام تابع لاگرانژ را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

پس اگر f در (a,b) ماکسیمم یا مینیمم داشته باشیم آنگاه λ =0λ
وجود دارد به طوري كه(a,b, λ) يك جواب دستگاه سه
معادله سه مجهولي زير است.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial y} = g(x, y) = 0
\end{cases}
$$

4.6.5 شرط كافي براي وجود ماكسيمم و مينيمم توابع نسبت به شرايط داده شده

فرض مي كنيم تابع دو متغيره ي $f(x,y)$ تحت محدوديت $g(x,y)=0$ داده شده باشد و $F(x,y,\lambda)$ تابع لاگرانژ متناظر باشد . ثابت ميشود كه شرط كافي براي وجود

الف) ماکسیمم این است که

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

ب) مینیمم این است که

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} < 0$$

نکته*4.6.6*

روش لاگرانژ را میتوان براي تابعn متغیره$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
با تابع محدودیت $i=1,2,\ldots,n$ $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$که در آن
تعمیم داد.

در این صورت تابع لاگرانژ عبارتند از

$$F(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k)=F(x_1,\dots,x_n)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x_1,\dots,x_n)$$

از مساوي صفر قرار دادن مشتقهاي جزيي تابع لاگرانژ دستگاهي شامل $n+k$ معادله ي $n+k$ مجهولي به دست مي آيد.

فصل پنجم:معادلات دیفرانسیل

حل برخي از مسايل در مديريت ئ اقتصاد منجر به بررسي معادله اي بين يك تابع مجهول و مشتقهاي آن مي شود.چنين معادله اي را يك معادله ي ديفرانسيل مي ناميم.در اين فصل با معرفي چند نوع معادله ي ديفرانسيل ساده روش حل آنها را مطالعه مي كنيم.

آشنايي با معادلات ديفرانسيل۵.1

تعريف 5.1.1

فرض كنيد y تابعي از x باشد هر معادله اي به صورت $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$ را كه F در آن تابعي از $n+2$ متغير y ، x و n مشتق اول y نسبت به x باشد يك معادله ي ديفرانسيل معمولي مرتبه ي n ام مي ناميم.

توجه كنيد منظور $y^{(n)}$ از مشتق n ام y نسبت به x است و مرتبه ي يك معادله ي ديفرانسيل برابر با مرتبه ي بالاترين مشتق موجود در معادله است.

تعريف 5.1.2

تابع $y=f(x)$ را يك جواب معادله ي ديفرانسيل

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$$

در فاصله ي I مي ناميم.در صورتي كه به ازاي هر x متعلق به I

تابع $y=f(x)$ و مشتق هاي آن در معادله صدق كنند.

مجموعه ي تمام جوابهاي معادله را جواب عمومي معادله مي ناميم.

منظور از حل يك معادله ي ديفرانسيل به دست آوردن جواب عمومي آن است.

تعريف 5.1.4

معادله ي ديفرانسيل مرتبه ي ام

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

با شرايط اوليه

$$\begin{aligned} y(x_0) &= k_0 \\ y'(x_0) &= k_1 \\ y''(x_0) &= k_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= k_{n-1} \end{aligned}$$

را كه در آن ها اعداد معيني هستند يك مسئله با مقادير اوليه مي ناميم.

توجه كنيد كه براي معادله ي ديفرانسيل مرتبه ي nامn شرط اوليه وجود دارد .اين شرايط مقادير تابع مجهول و(n-1) مشتق اول آن را در نقطه ي x0معين مي كنند.مي توان نشان داد كه با وضع محدوديتهايي برF يك مسئله با مقادير اوليه داراي يك مجواب منحصر به فرد است. اين جواب را جواب خصوصي مسئاله مي ناميم.

تعریف5.1.7

يك معادله ي ديفرانسيل با مشتقات جزيي معادله ايست كه شانل يك تابع مجهول چند متغيره (بيش از يك متغير) همرام با مشتقات جزيي آن باشد.

معادلات ديفرانسيل جدايي پذير ۵.2

در این بخش روش حل معادلات دیفرانسیلي را بررسي مي كنيم كه مي توان متغيرهاي آنها را از يكديگر جدا كرد.

تعريف 5.2.1

معادله ي ديفرانسيل مرتبه ي اول $p(x)dx+q(y)dy=0$ را كه در آن p و q دو تابع حقيقي به ترتيب در فاصله هاي I_1 و I_2 پيوسته اند يك معادله ي ديفرانسيل جدايي پذير مي ناميم.

با انتگرالگيري مستقيم از اين معادله جواب عمومي آن به صورت زير به دست مي آيد.

$$\int p(x)dx+\int q(y)dy=c$$