

# **Післяоптимізаційний аналіз задачі лінійного програмування**

## Аналізу параметричної чуттєвості

Післяоптимізаційний аналіз, або аналіз чуттєвості полягає у зв'язуванні впливу структурних, параметричних та структурно-параметричних змін у математичній моделі (математичній постановці) задачі на отриманий оптимальний розв'язок для тієї постановки задачі лінійного програмування, яка вважається вихідною.

Розглянемо, в якому було з'ясовано, що для отримання максимального прибутку необхідно випустити продукцію типу А (супутники зв'язку)  $x_1 = 17 \cdot 1/7 \approx 17$  та типу В (навігаційні супутники)  $x_2 = 23 \cdot 4/7 \approx 23$ . Оптимальний розв'язок було отримано за умови, що вартість виробів А та В складає відповідно 40 та 50 умовних одиниць. У зв'язку зі змінами, що відбуваються в світовій економіці, керівнику фірми (особі, що приймає рішення) важливо знати, як вплине зміна вартості продукції А та В (питомий прибуток) на запланований випуск продукції  $x_{1,2}$  (рис. 1).

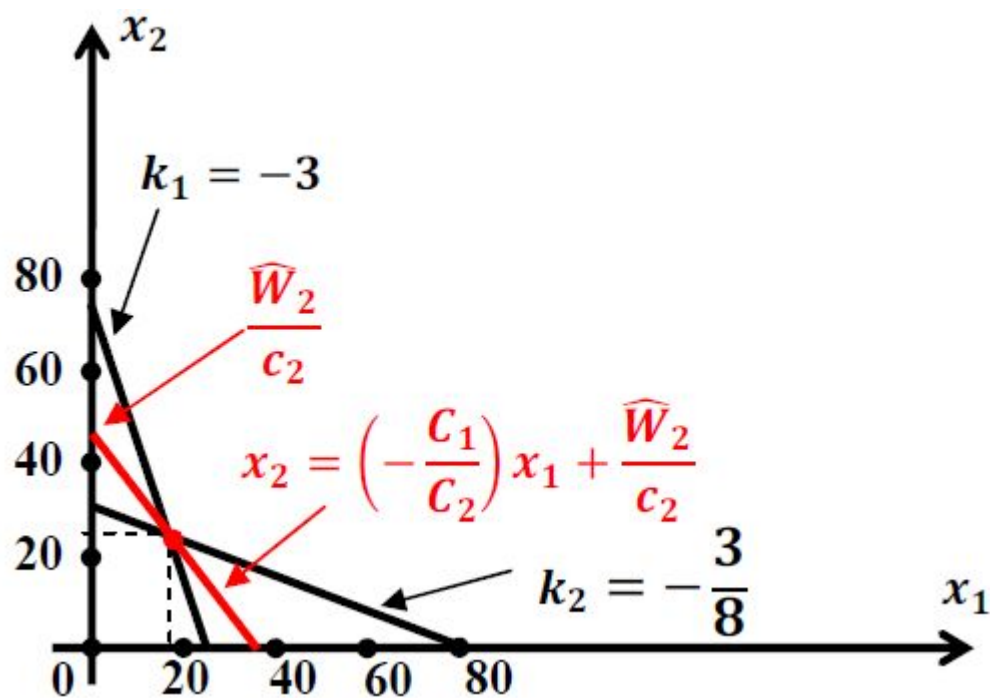


Рис. 1. Графічна ілюстрація алгоритму визначення меж зміни співвідношення між  $c_1$  та  $c_2$  у виразі для обчислення показника ефективності, при яких оптимальний розв'язок  $(x_1, x_2)$  залишається незмінним.

Як бачимо, при умові

$$-3 < -\frac{c_1}{c_2} < -\frac{3}{8} \Leftrightarrow 3 > \frac{c_1}{c_2} > \frac{3}{8} \Leftrightarrow 3 > \frac{c_1}{c_2} > 0,375$$

оптимальний план випуску продукції не зміниться, тому що «основна пряма»

$$W = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

проходитиме через кутову точку із координатами

$$\left( \hat{x}_1 = 17\frac{1}{7}, \hat{x}_2 = 23\frac{4}{7} \right)$$

Це забезпечує максимальне значення показника ефективності.

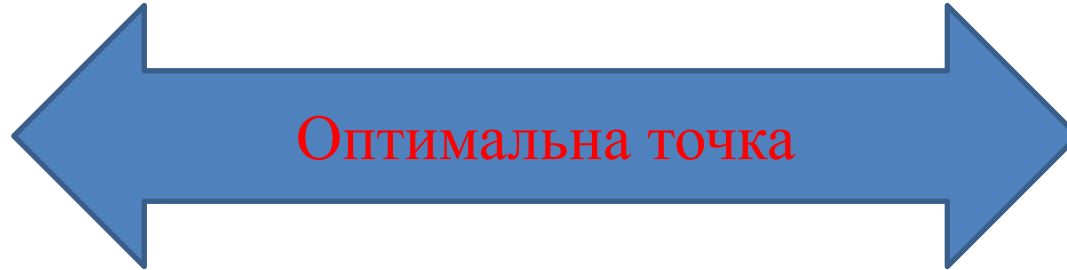
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = 3$$

Невизначеність.

$$\frac{c_1}{c_2} < \frac{3}{8}$$

$$(0, 30)$$



$$\frac{c_1}{c_2} > 3$$

$$(25, 0)$$

З фізичної точки зору означає відповідно недоцільність випуску супутників зв'язку, або навігаційних супутників. При зміні співвідношення між  $c_1$  та  $c_2$  відбувається зміна оптимального значення показника ефективності.

Зрозуміло, що взагалі зміна будь-якого параметра математичної моделі задачі лінійного програмування (об'єм ресурсів та їх вартість), норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції впливатиме на оптимальне рішення і значення показника ефективності. Кількісне дослідження цих змін і виконується в процесі аналізу чутливості математичної моделі задачі лінійного програмування. Наведений простий приклад аналізу чутливості оптимального рішення задачі лінійного програмування та значення показника ефективності до зміни параметрів математичної моделі має ілюстративний характер і для використання у багатовимірному випадку ( $n \geq 3$ , де  $n$  – кількість змінних) стає громіздким.

Для дослідження впливу властивостей задачі лінійного програмування на її оптимальне за вихідною постановкою рішення в загальному багатовимірному випадку використовують спеціальним чином переформульовану вихідну задачу лінійного програмування, яка отримала назву **двоїста (спряжена) задача лінійного програмування**, або використовують так зване **параметричне програмування**.

## Ідея фізичного змісту побудови математичної моделі двоїстої задачі лінійного програмування

Було поставлено за мету отримати максимальний прибуток від виробництва виробів А та В, але нічого не було сказано про вартість ресурсу, який використовувався для створення цих виробів, тобто нічого не було сказано про витрати, які необхідно мінімізувати, але таким чином, щоб не зменшити питомий прибуток (собівартість виробленої продукції).

Припустимо, що одиниця ресурсу С, D, E коштує відповідно  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ . Тоді вартість виробів можливо обчислити за виразами відповідно:

$$24u_1 + 8u_2 + 3u_3$$

$$8u_1 + 8u_2 + 8u_3$$



Задача лінійного програмування із змінними  $u_{1,2,3}$  формулюється так: якою повинна бути вартість кожного окремого ресурсу для того, щоб не зменшуючи вартості одиниці виробу, досягти мінімуму сумарної вартості ресурсів. Математична постановка задачі в цьому випадку набуває вигляду:

$$W = 600u_1 + 480u_2 + 240u_3 \rightarrow \min_{u_{1,2,3} \geq 0}$$

$$\begin{cases} 24u_1 + 8u_2 + 3u_3 \geq 40, \\ 8u_1 + 8u_2 + 8u_3 \geq 50. \end{cases}$$

Записана задача лінійного програмування має назву двоїстої по відношенню до задачі прикладу

# **Загальна постановка і правила побудови двоїстої задачі**

Кожній задачі лінійного програмування можливо поставити у відповідність задачу, яку називають двоїстою до неї. Припустимо, що загальна задача лінійного програмування (вихідна, або, як ще кажуть, пряма задача) задана у вигляді:

$$W = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max_{x_j \geq 0} \left( j = \overline{1, n} \right)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \left( i = \overline{1, m} \right)$$

1

Двоїста (спряжена до неї) задача має вигляд:

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^m b_i u_i \rightarrow \min_{u_i \geq 0} \left( i = \overline{1, m} \right),$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq c_j \quad \left( j = \overline{1, n} \right).$$

2

Задача двоїста до основної задачі – будується за наступними правилами:

1. Виконується впорядкування вихідної задачі до виду (2), тобто якщо цільова функція максимізується, то нерівності-обмеження повинні бути приведені до вигляду « $\leq$ », а якщо мінімізується, то до вигляду « $\geq$ ». Досягти виконання потрібної орієнтації знаку обмежень можливо множенням обох його частин на  $(-1)$ .

2. Якщо вихідна задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації. При цьому вектор, який утворено із коефіцієнтів при невідомих в показнику ефективності вихідної задачі співпадає із вектором констант в правих частинах системи обмежень двоїстої задачі, і, навпаки, коефіцієнти при невідомих в показнику ефективності двоїстої задачі є відповідними правими частинами системи обмежень вихідної задачі.

3. Кожній змінній  $u_i$  двоїстої задачі відповідає  $i$ -те обмеження вихідної задачі і навпаки, кожній змінній  $x_j$  вихідної задачі відповідає  $j$ -те обмеження двоїстої задачі.

4. Матриця коефіцієнтів двоїстої задачі може бути отримана транспонуванням матриці  $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ , складеної із коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень вихідної задачі.

Задачі (1) та (2) утворюють симетричну пару взаємно двоїстих задач. Якщо використати позначення:

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T,$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T,$$

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

$$Q_k = (0, \dots, 0)_k^T$$

прямокутна матриця розміром  $m \times n$ .

вектор-стовпець нулів розмірності  $k$ .

Пряму і двоїсту задачі лінійного програмування можливо записати у вигляді:

$$\begin{cases} W = C \cdot X \rightarrow \max \\ X \geq o_n \\ A \cdot X \leq B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{W} = B^T \cdot U \rightarrow \min \\ U \geq o_m \\ A^T \cdot U \geq C^T \end{cases}$$

Пряма та двоїста задача.

Розглянемо двоїсту задачу лінійного програмування (2) як вихідну задачу лінійного програмування і, скориставшись правилами переходу до двоїстої задачі, отримаємо пряму задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} -\tilde{W} = -B^T \cdot U \rightarrow \max, \\ U \geq o_m \\ -A^T \cdot U \geq -C^T . \end{cases}$$

Після перетворення, можемо записати:

$$\begin{cases} -W = -C \cdot X \rightarrow \min, \\ X \geq o_n \\ -A \cdot X \geq -B; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W = C \cdot X \rightarrow \max, \\ X \geq o_n \\ A \cdot X \leq B. \end{cases}$$

### **Висновок:**

- 1) Двоїста задача лінійного програмування до двоїстої задачі лінійного програмування є прямою задачею.
- 2) В системі пряма-двоїста обидві задачі лінійного програмування рівноправні. Кожну з них можливо розглядати як пряму, і тоді інша вважається двоїстою до неї.

Необхідно побудувати двоїсту задачу лінійного програмування.

$$\begin{cases} W = x_1 - 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \min ; \\ 0 \leq x_{1,2,3} \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_3 \geq 4. \end{cases}$$

Приведемо задану задачу лінійного програмування до вигляду (1).





Двоїста ЗЛП набуває вигляду:

$$\tilde{W} = [7 \quad 6 \quad -6 \quad -4] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \rightarrow \min_{u_{1,2,3,4} \geq 0} .$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = 7u_1 + 6u_2 - 6u_3 - 4u_4 \rightarrow \min_{u_{1,2,3,4} \geq 0}; \\ 3u_1 + u_2 - u_3 \geq -1, \\ 4u_1 + 2u_2 - 2u_3 \geq 4, \\ u_1 + u_2 - u_3 - 4u_4 \geq 3. \bullet \end{cases}$$

**Приклад 2.**

$$\begin{cases} W = 6x_1 + 10x \rightarrow \max, \\ x_1 \geq 0 \\ 5x_1 + 3x \geq 10, \\ x_1 - x \leq 4. \end{cases}$$

Побудувати двоїсту задачу.

Приведемо пряму задачу до стандартного вигляду.

$$x = x_2 - x_3 \in \mathbb{R}, x_{2,3} \geq 0$$

$$\begin{cases} W = 6x_1 + 10x_2 - 10x_3 \rightarrow \max; \\ x_{1,2,3} \geq 0 \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq -10, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} W = [6 \quad 10 \quad -10] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \max; \\ x_{1,2,3} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Двоїста задача набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} W = [-10 \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \rightarrow \min, \\ \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}, \\ u_{1,2} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W} = -10u_1 + 4u_2 \rightarrow \min, \\ -5u_1 + u_2 \geq 6, \\ -3u_1 - u_2 \geq 10, \\ 3u_1 + u_2 \geq -10, \\ u_{1,2} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W} = -10u_1 + 4u_2 \rightarrow \min, \\ -5u_1 + u_2 \geq 6, \\ -3u_1 - u_2 = 10. \bullet \\ u_{1,2} \geq 0 \end{array} \right.$$

Побудувати задачу двоїсту до заданої задачі лінійного програмування.

$$\begin{cases} W = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ x_{123} \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 9, \\ 2x_1 + x_3 \geq 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} W = [111] \cdot [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \rightarrow \min, \\ x_{123} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{W} = [9 \ 4] \cdot [u_1 \ u_2]^T, \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = 9u_1 + 4u_2 \rightarrow \max; \\ x_{123} \geq 0, \\ u_1 + 2u_2 \leq 1, \\ 2u_1 \leq 1, \\ u_1 + u_2 \leq 1. \bullet \end{cases}$$

# Основні теореми двоїстості

## Теорема 1.

Якщо одна із двоїстих задач має оптимальний розв'язок

$\hat{X} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$ , то і інша має оптимальний розв'язок

$\hat{U} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_m]^T$ , при цьому екстремальні значення показ-

ника ефективності обох задач співпадають  $\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \hat{u}_i$ .

**Зауваження 1.** Якщо показник ефективності однієї із задач необмежений, то інша задача не має розв'язків.

## Наслідок 1.

1. Для існування розв'язку однієї з двоїстих задач, необхідно і достатньо, щоб інша мала хоча б один розв'язок;
2. Для того щоб  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  та  $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$  були оптимальними розв'язками пари двоїстих задач, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i u_i.$$



## Теорема 2.

Якщо будь яка змінна  $\hat{x}_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) оптимального розв'язку прямої задачі додатна, то  $j$ -те обмеження двоїстої задачі на оптимальному розв'язку перетворюється у рівність. Якщо оптимальне рівняння прямої задачі перетворює будь яке  $i$ -те обмеження у строго нерівність, то в оптимальному розв'язку двоїстої задачі змінна  $\hat{u}_i$  дорівнює 0.

**Зауваження 2.** Теорема 2 ще має назву «умова доповняльної нежорсткості» і формально записується у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{u}_i - c_j \right) \cdot \hat{x}_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i \right) \cdot \hat{u}_i = 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \right.$$



### Теорема 3.

В оптимальному розв'язку двоїстої задачі значення змінних чисельно дорівнюють частинним похідним  $\frac{\partial W_{max}}{\partial b_i}$ , для прямої задачі:

$$\hat{u}_i = \frac{\partial W_{max}}{\partial b_i}, \quad i = \overline{1, m},$$

де  $\Delta W_{max}$  – зміна максимального значення показника ефективності  $W$ , при одному і тому самому двоїстому плані, викликано малою зміною  $b_i$  прямої задачі.

Покажемо, що при зміненні правих частин  $b_i (i=1, m)$  обмежень прямої задачі невідомі двоїстої задачі можливо інтерпретувати як оцінки впливу цих змінних на оптимальне значення показника ефективності прямої задачі. Позначимо:

$$\Delta B = [\Delta b_1, \dots, \Delta b_m]^T,$$

де  $\Delta b_i$  – приріст  $i$ -ої правої частини прямої задачі.

Розглянемо дві двоїсті задачі:

1. Пряма та двоїста відповідно.

$$\begin{cases} W = C \cdot X_1 \rightarrow \max, \\ X_1 \geq 0_n \\ A \cdot X_1 \leq B \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{W} = B^T \cdot U_1 \rightarrow \min, \\ U_1 \geq 0_m \\ A^T \cdot U_1 \geq C^T. \end{cases}$$

## 2. Пряма та двоїста відповідно.

$$\begin{cases} W = C \cdot X_2 \rightarrow \max, \\ X_1 \geq 0_n \\ A \cdot X_2 \leq (B + \Delta B) \end{cases} \quad \Delta B = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \vdots \\ \Delta b_m \end{bmatrix} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Delta b_1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \Delta b_m \rightarrow 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} \tilde{W} = (B + \Delta B)^T \cdot U_2 \rightarrow \min, \\ U_2 \geq 0_m \\ A^T \cdot U_2 \geq C^T. \end{cases}$$

Вимога, яка полягає в тому, що  $\Delta B \rightarrow 0$ , означає, що заміна  $B$  на  $B + \Delta B$  у двоїстій задачі не призводить до зміни її оптимального розв'язку  $U_2 = U_1$ . Тоді, відповідно до першої теореми двоїстості, можна записати для 1 і 2 пари задач відповідно:

$$W_{\max_1} = \hat{W}_{\min_1} \Leftrightarrow C\hat{X}_1 = B^T\hat{U}_1$$

$$W_{\max_2} = \hat{W}_{\min_2} \Leftrightarrow C\hat{X}_2 = (B + \Delta B)^T\hat{U}_1$$

Обчислимо приріст показника ефективності, прямої задачі:

$$\begin{aligned}\Delta W_{\max} &= W_{\max_2} - W_{\max_1} = (B + \Delta B)^T \cdot \hat{U}_1 - B^T \hat{U}_1 = \\ &= (B^T + \Delta B^T - B^T) \hat{U}_1 = \Delta B^T \hat{U}_1 = [\Delta b_1, \dots, \Delta b_m] \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \Delta b_i \cdot \hat{u}_i\end{aligned}$$

Із доведеної теореми 3 випливає, що розв'язок двоїстої задачі  $u_i$  (двоїста оцінка) кількісно дорівнює приросту максимального значення показника ефективності прямої задачі при зміні правої частини  $i$ -го обмеження прямої задачі на одиницю.