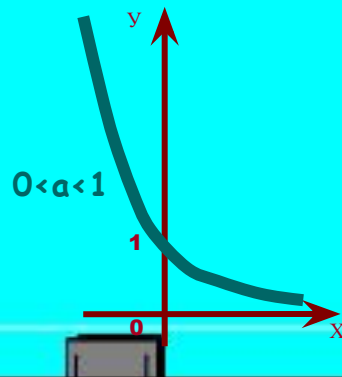




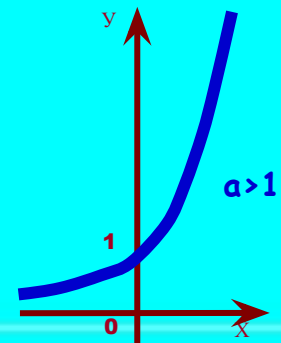
$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Показательные уравнения:

ТИПЫ И МЕТОДЫ решения.



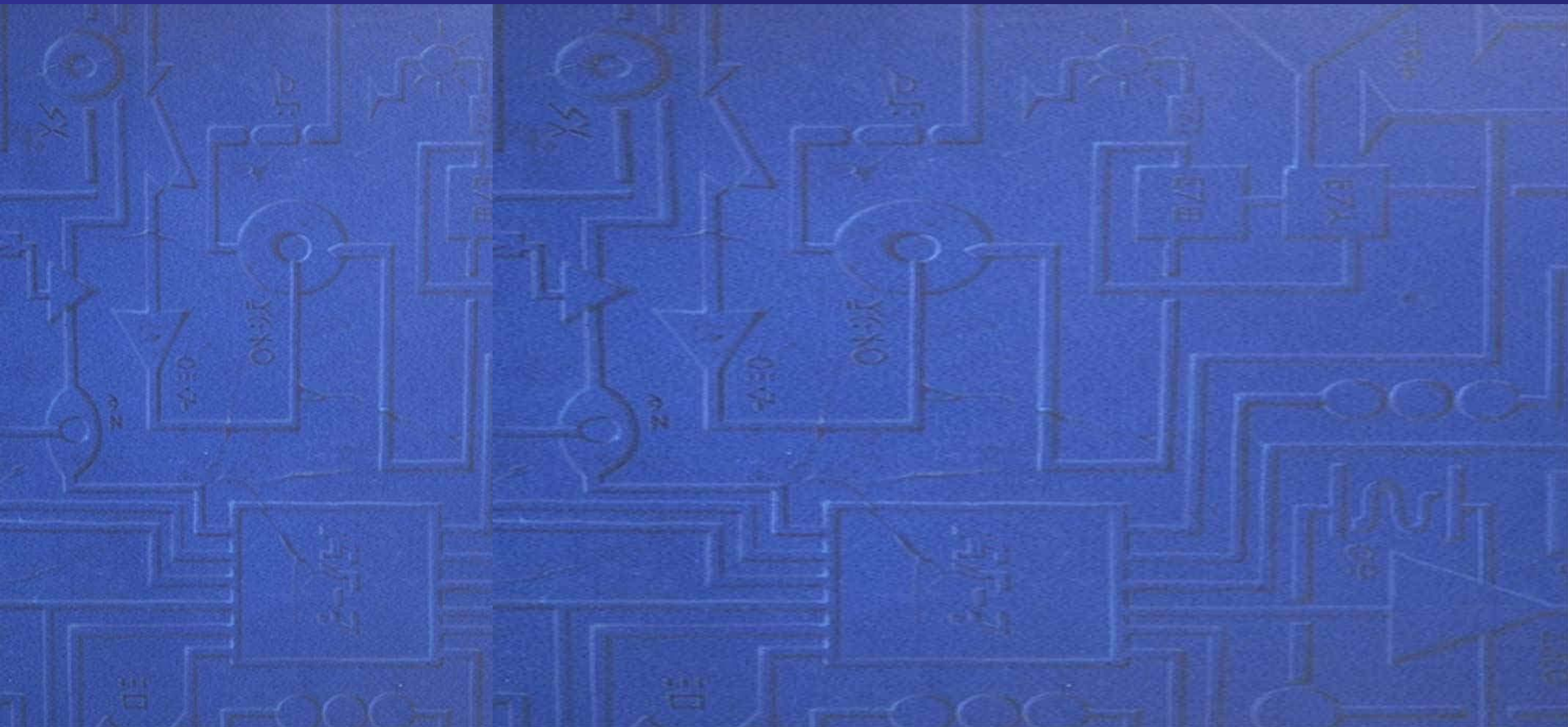
$$y = a^x$$



Концентрация внимания



Выпишите в каждом ряду лишнее (по смыслу составления ряда) число



Концентрация внимания равна N .

$$N = (\text{число верно указанных чисел}) \times 0,125 \times 100\%$$

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$

$a^x = b$ - простейшее показательное уравнение

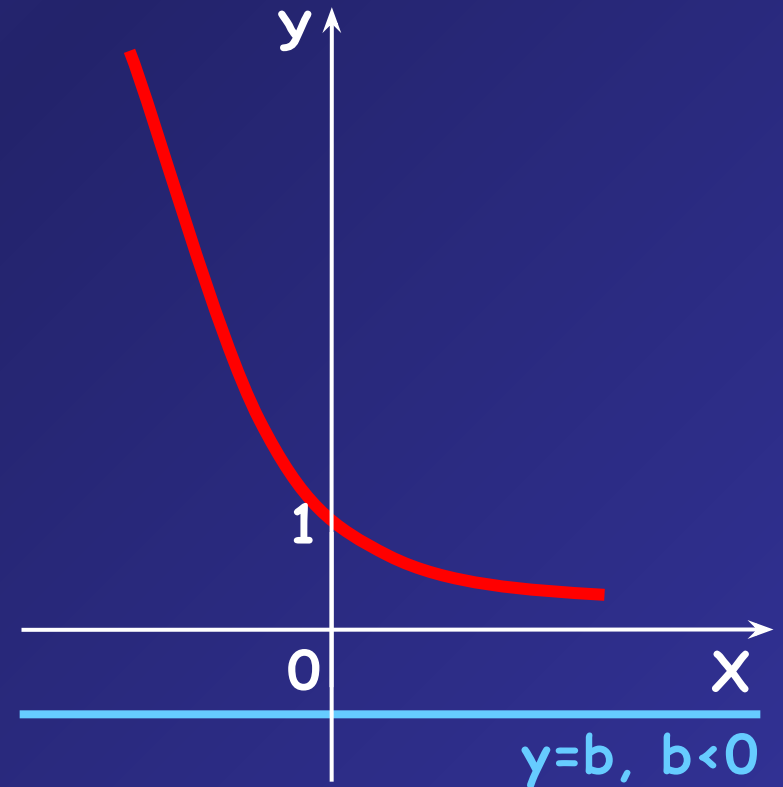
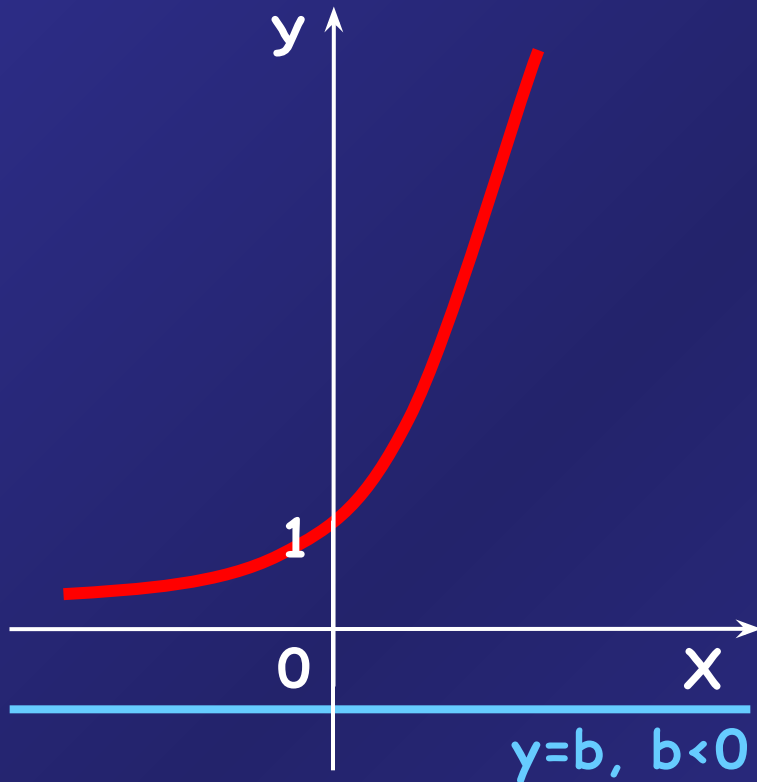
Пример:

$$2^x = 8, \left(\frac{1}{3}\right)^x = 81, 5^x = \sqrt[3]{7}, 6^x = -10$$

Проанализируем решение уравнения $a^x=b$ графически

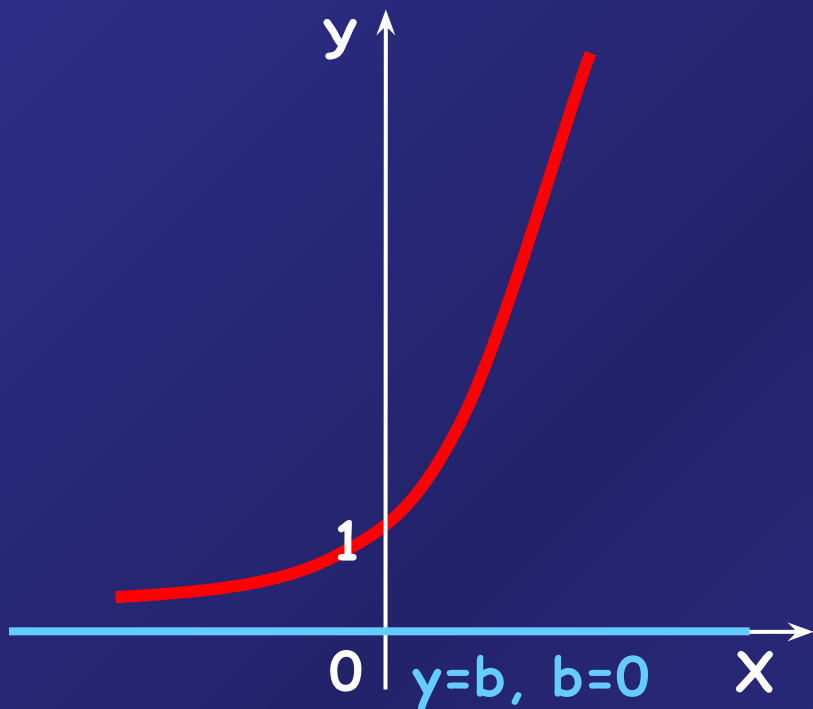
$$y=a^x, a>1$$

$$y=a^x, 0<a<1$$

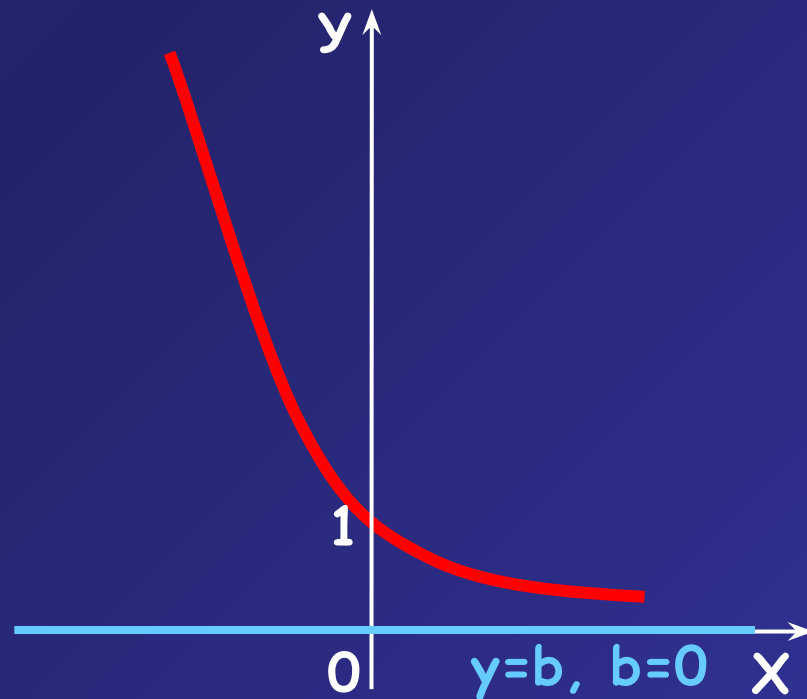


Проанализируем решение уравнения $a^x=b$ графически

$$y=a^x, a>1$$



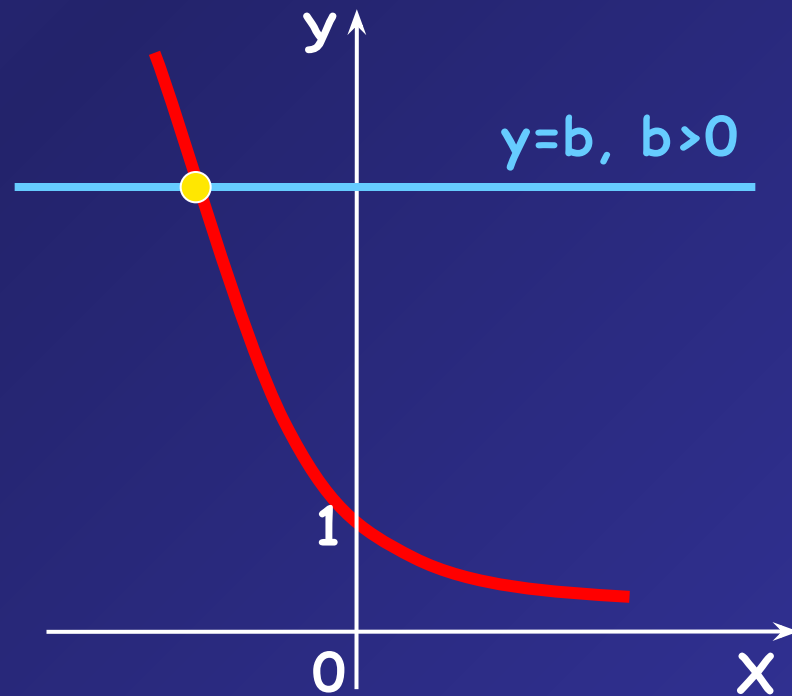
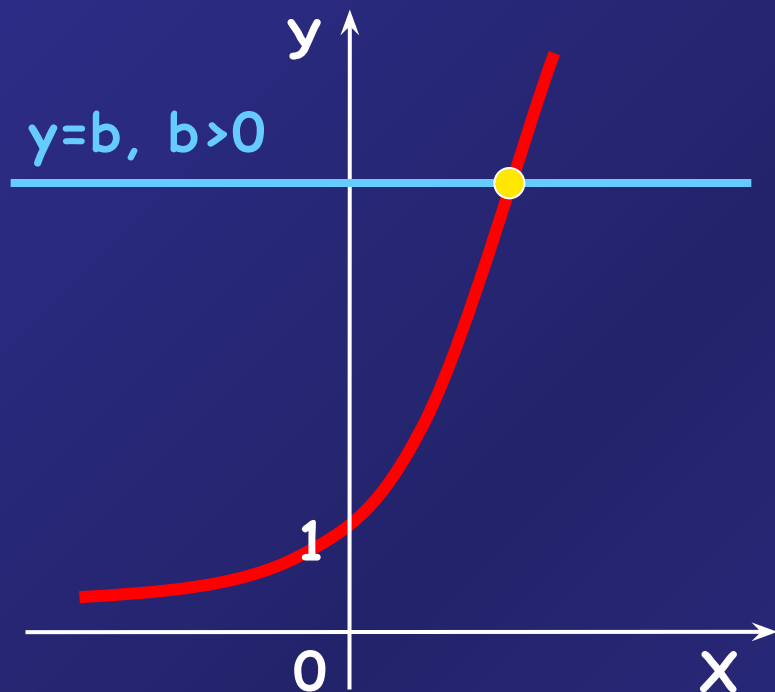
$$y=a^x, 0<a<1$$



Проанализируем решение уравнения $a^x=b$ графически

$$y=a^x, a>1$$

$$y=a^x, 0<a<1$$



Вывод:

$$b \leq 0$$

Уравнение $a^x = b$ корней не имеет

$$b > 0$$

Уравнение $a^x = b$ имеет единственное
решение $x = \log_a b$

Пример:

1) $2^x = 8,$

$x = \log_2 8,$

$x = 3.$

$8 > 0,$ уравнение имеет

единственное решение

2) $3^x = 5,$

$x = \log_3 5.$

$5 > 0,$ уравнение имеет

единственное решение

3) $5^x = -25,$

$-25 < 0,$ уравнение корней

не имеет.

Замечание:

Во многих случаях решение показательных уравнений после надлежащих преобразований сводится к решению простейших показательных уравнений.

При решении показательных уравнений часто используется следующая теорема:

«Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$ и $a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ ».

В общем, виде справедлива теорема

«Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ a > 0, a \neq 1, \end{array} \right. \text{»}.$$
$$a = 1.$$

ТИП

Простейшие показательные уравнения.

ПРИМЕР

$$9^{x^2+4x-4,5} = 3$$

Решение

$$9^{x^2+4x-4,5} = 3,$$

$$(3^2)^{x^2+4x-4,5} = 3,$$

$$(3)^{2(x^2+4x-4,5)} = 3,$$

$$2(x^2 + 4x - 4,5) = 1,$$

$$x^2 + 4x - 4,5 = 0,5,$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$\begin{cases} x = -5, \\ x = 1. \end{cases}$$

ОТВЕТ:

-5 ; 1.

ТИП

Показательные уравнения, сводящиеся к уравнениям относительно функции одного аргумента.

ПРИМЕР

$$2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$$

Решение

$$\begin{aligned}2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} &= 1280, \\2^{12x-1} - (2^2)^{6x-1} + (2^3)^{4x-1} - (2^4)^{3x-1} &= 1280, \\2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} &= 1280, \\2^{12x-4}(2^3 - 2^2 + 2 - 1) &= 1280, \\2^{12x-4} \cdot 5 &= 1280, \\2^{12x-4} &= 256, \\2^{12x-4} &= 2^8, \\12x - 4 &= 8, \\12x &= 12, \\x &= 1.\end{aligned}$$

ОТВЕТ:

1.

ТИП

Показательные уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.

ПРИМЕР

$$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$$

Решение

$$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0,$$

$$3^{2(x^2-1)} - 36 \cdot 3^{x^2-1-2} + 3 = 0,$$

$$3^{2(x^2-1)} - 36 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0,$$

$$\left(3^{x^2-1}\right)^2 - 4 \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0,$$

Пусть $t = 3^{x^2-1}$, $t > 0$, тогда

$$t^2 - 4t + 3 = 0,$$

ТИП

Показательные уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.

ПРИМЕР

$$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 3, \\ t = 1, \\ t > 0; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} t = 3, \\ t > 0, \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = 1. \end{array} \right. \\ t = 1, \\ t > 0; \end{array} \right.$$

Вернемся
к переменной x

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x^2-1} = 3, \\ 3^{x^2-1} = 1; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 1, \\ x^2 - 1 = 0; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x^2 = 2, \\ x^2 = 1; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2}, \\ x = \pm 1. \end{array} \right.$$

ОТВЕТ:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2}, \\ x = \pm 1. \end{array} \right.$$

ТИП

Однородные показательные уравнения первой и второй степени.

ПРИМЕР 1

$$2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$$

Решение

$$2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2},$$

$$2^{x^2-1} + 2^{x^2+2} = 3^{x^2-1} + 3^{x^2},$$

$$2^{x^2-1} (1 + 2^3) = 3^{x^2-1} (3 + 1),$$

$$2^{x^2-1} \cdot 9 = 3^{x^2-1} \cdot 4; \quad 3^{x^2-1} \cdot 9 > 0, \text{ при } x \in \mathbb{R}$$

ТИП

Однородные показательные уравнения первой и второй степени.

ПРИМЕР 1

$$2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$$

Решение

$$\frac{2^{x^2-1} \cdot 9}{3^{x^2-1} \cdot 9} = \frac{3^{x^2-1} \cdot 4}{3^{x^2-1} \cdot 9},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1} = \frac{4}{9},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$x^2 - 1 = 2,$$

$$x^2 = 3,$$

$$x = \pm\sqrt{3}.$$

ОТВЕТ:

$$x = \pm\sqrt{3}$$

ТИП

Однородные показательные уравнения первой и второй степени.

ПРИМЕР 2

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$$

Решение

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x,$$

$$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot (2 \cdot 3)^x = 0,$$

$$\frac{3 \cdot 2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{5 \cdot 2^x 3^x}{3^{2x}} + \frac{2 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = 0; 3^{2x} > 0, \text{ при } x \in \mathbf{R}$$

ТИП Однородные показательные уравнения первой и второй степени.

ПРИМЕР 2

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$$

Решение

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0. \quad \text{Пусть } \left(\frac{2}{3}\right)^x = t, t > 0, \text{ тогда}$$

$$3t^2 - 5t + 2 = 0,$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3}, \\ t = 1, \\ t > 0; \end{array} \right. & \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3}, \\ t > 0, \\ t = 1, \\ t > 0; \end{array} \right. & \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3}, \\ t = 1. \end{array} \right. \end{cases}$$

**Вернёмся
к переменной X**

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1; \end{array} \right. & \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 0. \end{array} \right. \end{cases}$$

ОТВЕТ: 0 ; 1

ТИП

Показательные уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.

ПРИМЕР 1

$$5^x + 5^{1-x} - 6 = 0$$

Решение

$$5^x + 5^{1-x} - 6 = 0,$$

$$5^x + \frac{5}{5^x} - 6 = 0. \quad \text{Пусть } 5^x = t, t > 0, \text{ тогда}$$

$$t + \frac{5}{t} - 6 = 0,$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0,$$

**Вернёмся
к переменной x**

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 1, \\ t = 5, \\ t > 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 1, \\ t > 0, \\ t = 5, \\ t > 0; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 5. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 5^x = 1, \\ 5^x = 5; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

ОТВЕТ: 0 ; 1.

ТИП

Показательные уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.

ПРИМЕР 2

$$2 - \frac{1}{3^x - 1} - \frac{5}{3^x + 3} = 0.$$

Решение

$$2 - \frac{1}{3^x - 1} - \frac{5}{3^x + 3} = 0. \quad \text{Пусть } 3^x = t, t > 0, \text{ тогда}$$

$$2 - \frac{1}{t - 1} - \frac{5}{t + 3} = 0,$$

$$\frac{2(t - 1)(t + 3) - (t + 3) - 5(t - 1)}{(t - 1)(t + 3)} = 0,$$

$$\frac{t^2 - t - 2}{(t - 1)(t + 3)} = 0,$$

$$\frac{(t + 1)(t - 2)}{(t - 1)(t + 3)} = 0,$$

$$\begin{cases} (t + 1)(t - 2) = 0, \\ (t - 1)(t + 3) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -1, \\ t = 2, \\ t \neq 1, t \neq -3; \end{cases} \quad \begin{cases} t = -1, \\ t = 2. \end{cases}$$

ТИП

Показательные уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.

ПРИМЕР 2

$$2 - \frac{1}{3^x - 1} - \frac{5}{3^x + 3} = 0.$$

Решение

Т.к. $t > 0$, то $\begin{cases} t = -1, \\ t = 2, \\ t > 0; \end{cases} \begin{cases} t = -1, \\ t > 0, \\ t = 2, \\ t > 0; \end{cases} \quad t = 2.$

Вернёмся к переменной x

$$3^x = 2,$$

$$x = \log_3 2.$$

ОТВЕТ:

$$\log_3 2$$

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 1

$$2^x + 5^x = 7^x$$

Решение

$$2^x + 5^x = 7^x,$$

$$\frac{2^x}{7^x} + \frac{5^x}{7^x} = \frac{7^x}{7^x}, \quad 7^x > 0, \text{ при } x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 1

$$2^x + 5^x = 7^x$$

Решение

Введём функции

$$f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x \quad \text{и} \quad g(x) = 1.$$

Функция

$$f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x \text{ убывает на } \mathbb{R}, \text{ как сумма}$$

убывающих на \mathbb{R} . Функция

постоянна на \mathbb{R} .

$$g(x) = 1$$

Горизонтальная прямая

может пересечь график

$$g(x) = 1$$

функции

$$f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x \text{ не более чем в одной точке.}$$

Следовательно, уравнение

имеет не более

$$2^x + 5^x = 7^x$$

одного корня. Корнем уравнения является $x=1$.

Проверим это.

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 1, \quad 1 = 1.$$

ОТВЕТ:

1

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 2

$$3^{x-2} = \frac{9}{x}$$

Решение

$$3^{x-2} = \frac{9}{x}.$$

**Легко определить и проверить,
что $x=3$ - корень данного уравнения.**

$$x = 3, \quad 3^{3-2} = \frac{9}{3}, \quad 3 = 3.$$

**Покажем, что других корней уравнение
иметь не может.**

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 2

$$3^{x-2} = \frac{9}{x}$$

Решение

Справедливы следующие утверждения:

Если функция $f(x)$ возрастает (убывает)

на множестве I , то уравнение $f(x) = b$

не может иметь на I более одного корня.



Если функция $f(x)$ возрастает на I , а функция

$g(x)$ убывает на I , то уравнение $f(x) = g(x)$

не может иметь на I более одного корня.

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 2

$$3^{x-2} = \frac{9}{x}$$

Решение

Введём функции $f(x) = 3^{x-2}$ и $g(x) = \frac{9}{x}$.

Показательная функция $f(x) = 3^{x-2}$ ($a = 3, 3 > 1, a > 1$)
возрастает на R .

Функция $g(x) = \frac{9}{x}$ (обратная пропорциональность)
убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$.

Таким образом, на $(-\infty; 0)$ и на $(0; \infty)$ уравнение имеет
не более одного корня, т. е. $x = 3$ - единственный корень
данного уравнения.

ОТВЕТ:

3

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 3

$$(x - 3)^{x^2 + x} = (x - 3)^{7x - 5}$$

Решение

Прежде всего, заметим, что функция $y = f(x)^{g(x)}$ не является показательной функцией.

Существуют две точки зрения, оценивающие область определения данной функции.

1

$$f(x) > 0$$

2

$$\begin{aligned} & \text{a) } f(x) > 0; \\ & \text{b) } \begin{cases} f(x) < 0, \text{ если } g(x) \in \mathbb{Z}, \\ f(x) = 0, \text{ если } g(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 3

$$(x - 3)^{x^2 + x} = (x - 3)^{7x - 5}$$

Решение

Решим данное уравнение, придерживаясь второй точки зрения.

Вначале проверим, какие из решений совокупности

$$\begin{cases} x - 3 = 0, \\ x - 3 = -1, \\ x - 3 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ x = 2, \\ x = 4; \end{cases}$$

являются корнями данного уравнения.

Проверка. $x = 2$ $(2 - 3)^{4+2} = (2 - 3)^{14-5},$
 $(-1)^6 = (-1)^9,$
 $1 = -1.$

Проверка показала, что $x=2$ не является корнем уравнения.

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 3

$$(x - 3)^{x^2 + x} = (x - 3)^{7x - 5}$$

Решение

$$\begin{aligned}x = 3 \quad (3 - 3)^{9+3} &= (3 - 3)^{21-5}, \\ 0^{12} &= 0^{16}, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Проверка показала, что $x=3$ является корнем уравнения.

$$\begin{aligned}x = 4 \quad (4 - 3)^{16+4} &= (4 - 3)^{28-5}, \\ 1^{20} &= 1^{23}, \\ 1 &= 1.\end{aligned}$$

Проверка показала, что $x=4$ является корнем уравнения.

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 3

$$(x - 3)^{x^2 + x} = (x - 3)^{7x - 5}$$

Решение

Теперь установим, какие из корней уравнения

$x^2 + x = 7x - 5$ удовлетворяют исходному уравнению.

$$x^2 + x = 7x - 5,$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ x = 1. \end{cases}$$

Проверка. $x = 1$ $(1 - 3)^{1+1} = (1 - 3)^{7-5}$

$$(-2)^2 = (-2)^2.$$

Проверка показала, что $x=1$ является корнем уравнения.

ТИП

Показательные нестандартные уравнения.

ПРИМЕР 3

$$(x - 3)^{x^2 + x} = (x - 3)^{7x - 5}$$

Решение

$$x = 5$$

$$(5 - 3)^{25 + 5} = (5 - 3)^{35 - 5},$$

$$2^{30} = 2^{30}.$$

Проверка показала, что $x=5$ является корнем уравнения.

Замечание: если придерживаться первой точки зрения, то корни $x=1$ и $x=3$ следует исключить.

ОТВЕТ: 5 ; 4 ; 3 ; 1



Домашнее задание:

ВНИМАНИЕ! ЗАПИСАТЬ! ВЫПОЛНИТЬ!



Выполнил:

Бобров Р.С.

**РУКОВОДИТЕЛИ:
КАЛУГИНА Е.Е.
НЕСТЕРЕНКО В.В.**