

# МАТЕМАТИКА



**ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ**  
естественных наук  
при Саратовском государственном аграрном  
университете им. Н.И. Вавилова

## Уравнения: равносильные уравнения, уравнения следствия уравнения, содержащие знак модуля

Лекцию подготовили: Спицына Татьяна, Суворова Ольга

Руководитель: Калугина Екатерина Евгеньевна

# ЛЕКЦИЯ № 3

Литература В помощь учащимся  
лицея – интерната при СГАУ им. Н.  
И. Вавилова «Сборник задач по  
математике Часть I»

**Уравнения:**

**равносильные уравнения,**

**уравнения следствия,**

**уравнения, содержащие**

**знак модуля.**

# План

## ТЕМА

- ◆ **Равносильные уравнения**
- ◆ **Уравнения следствия**
- ◆ **Определение модуля действительного числа**
- ◆ **Алгоритмы решения уравнений, содержащих знак модуля:**  
 $|f(x)| = a, a \in \mathbb{R}$

# Определ

ение

Выражение, состоящее из чисел, переменных, знаков арифметических и алгебраических операций, скобок, знака равенства, называется уравнением

$$2x + 3 = -5$$

$$\sqrt{x+4} = 3$$

$$\log_2(3x - 4) = 2$$

$$-x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$2^{2x} + 2^x - 6 = 0$$

$$\frac{2}{1-x} + \frac{3}{1-x^2} = \frac{5}{1+x}$$

$$\sin 2x + \cos x = 0$$

# Определ

Корнем уравнения называется такое значение переменной, при подстановке которого в уравнение оно обращается в истинное равенство.

Решить уравнение это значит найти все его корни или доказать что таковых нет.

Приме  $2x + 3 = -5$

Решен

$2x + 3 = -5,$

$2x = -8,$

$x = -4.$

Ответ: - 4.

Приме  $-x^2 + 3x - 4 = 0$

Решен

$-x^2 + 3x - 4 = 0,$

$x^2 - 3x + 4 = 0,$

$D = b^2 - 4ac;$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = 9 - 16 = -7;$

$D < 0$

Ответ: уравнение корней не имеет.

## Определе ние

Уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают или они не имеют решений.

### Пример

1 уравнение  $x^2 + 2x + 5 = 0$ .

2 уравнение  $2x^2 + 1 = 0$ .

Корни 1 уравнения:      Корни 2 уравнения:

нет      нет  
Уравнения равносильны, так они  
решений не имеют.

# Определе

Пусть даны 2 уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $p(x) = q(x)$

Если любой корень 1 уравнения является корнем 2 уравнения, то 2 уравнение называют уравнением следствием 1 уравнения.

## Пример

1 уравнение  $x^2 = 1$ .

2 уравнение  $\sqrt{x} = 1$ .

Корни 1  $x = \pm 1$ .

Корни 2  $x = 1$ .

2 уравнение является уравнением следствием 1 уравнения.

# **Задание № 1.**

**Среди предложенных уравнений выберите:  
а) пару равносильных уравнений;  
б) уравнение и уравнение следствие.**

$$2x^2 + 3 = 0$$

$$4x - 5 = 11$$

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

**Равносильные  
уравнения**

$$2x^2 + 3 = 0$$

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

**Уравнение и  
уравнение  
следствие**

$$4x - 5 = 11$$

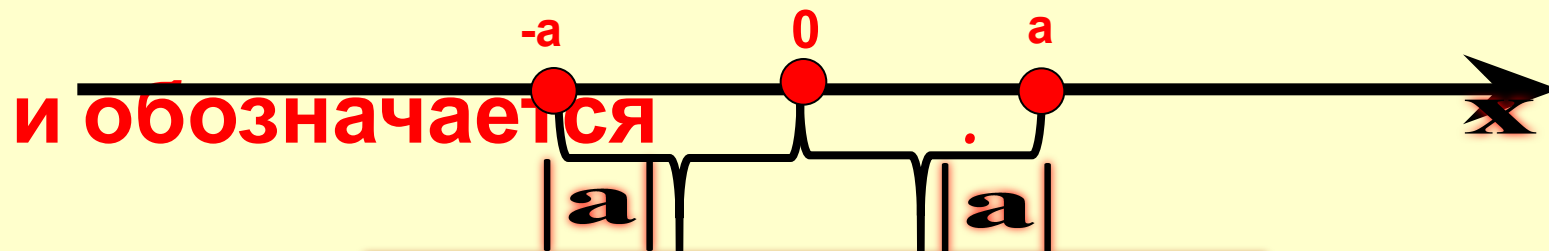
$$x^2 - x - 12 = 0$$





# Определ

Абсолютной величиной числа  $a$  (модулем действительного числа) называется расстояние от точки, изображающей данное число на координатной прямой, до начала отсчёта



$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

# Основные свойства

## модуля

1	$ \mathbf{a}  \geq \mathbf{0}$	6	$ \mathbf{a} + \mathbf{b}  \leq  \mathbf{a}  +  \mathbf{b} $
2	$ \mathbf{a}  =  -\mathbf{a} $	7	$ \mathbf{a} + \mathbf{b}  =  \mathbf{a}  +  \mathbf{b} , \mathbf{ab} \geq \mathbf{0}$
3	$ \mathbf{a}  \geq \mathbf{a}$	8	$ \mathbf{a}  +  \mathbf{b}  = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
4	$ \mathbf{ab}  =  \mathbf{a}  \mathbf{b} $	9	$ \mathbf{a} - \mathbf{b}  =  \mathbf{a}  +  \mathbf{b} , \mathbf{ab} \leq \mathbf{0}$
5	$\left  \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \right  = \frac{ \mathbf{a} }{ \mathbf{b} }, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	10	$ \mathbf{a}  -  \mathbf{b}  \geq \mathbf{0}, \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 \geq \mathbf{0}$

# Определе

## ние

Уравнения, содержащие знак модуля, называются уравнениями, содержащими знак модуля.

$$|x - 5| = 4$$

$$|x^2 - 5x + 4| = 10$$

$$|x - 2| + |x + 1| = 6$$

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0$$

$$x|5 - 2x| + 1 = 2x - 7$$

$$\frac{|x - 2|}{x + 4} + 25 = 3$$

# Алгоритм решения

## уравнения $|f(x)| = a, a \in \mathbf{R}$

**Если**  $a < 0$

$$|f(x)| = a$$

**Уравнение корней не имеет**

**и**

**Если**  $a = 0$

$$|f(x)| = 0$$

$$f(x) = 0$$

**и**

**Если**  $a > 0$

$$|f(x)| = a$$

**I**

**способ**

$$\begin{cases} f(x) \geq 0; \\ f(x) = a; \\ f(x) < 0; \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

**II**

**способ**

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

**Пример**

$$2|x| - 3 = 0$$

**Решение**

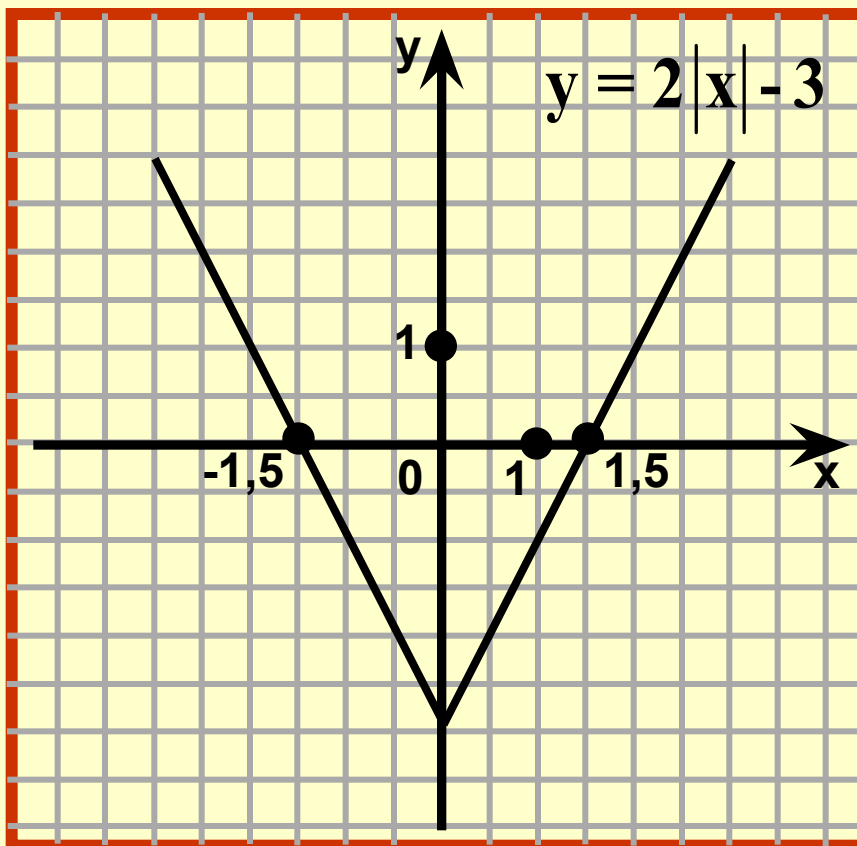
**це**

$$2|x| - 3 = 0,$$

$$2|x| = 3,$$

$$|x| = 1,5,$$

$$x = \pm 1,5.$$



**Ответ:  $\pm 1,5$ .**

**Пример**

$$3|x - 1| - 5 = 1$$

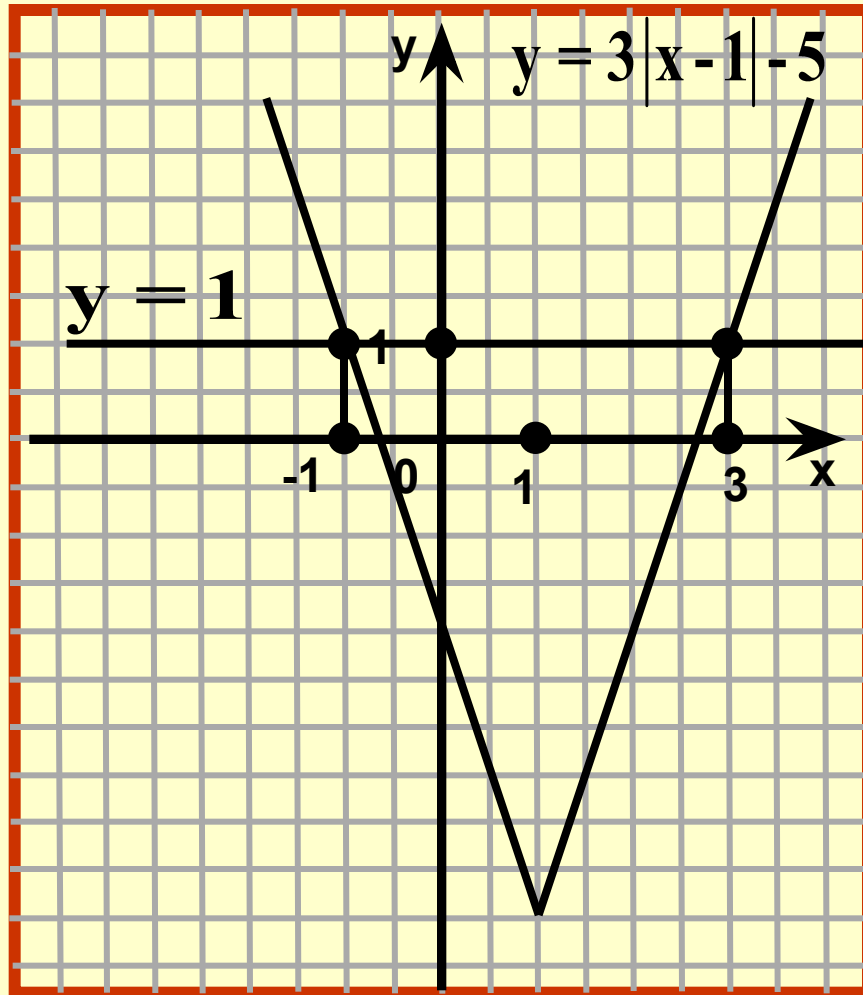
**Решен**

$$3|x - 1| - 5 = 1,$$

$$|x - 1| = 2,$$

$$\begin{cases} x - 1 = 2, \\ x - 1 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ x = -1. \end{cases}$$



**Ответ: -1;3.**

**Приме**

$$|x| + 2 = 0.$$

**Решен**

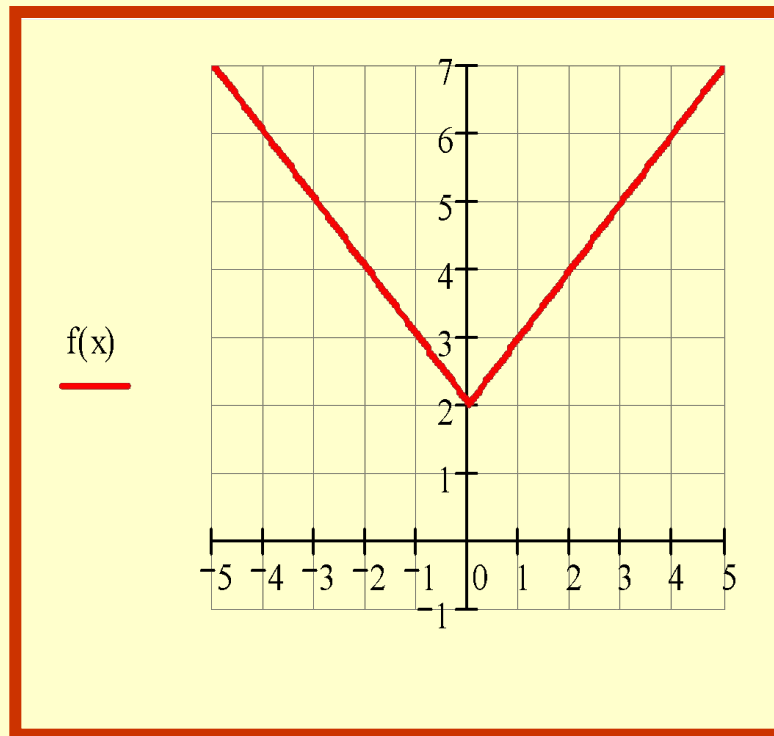
$$|x| + 2 = 0.$$

**Так как**

$$|x| + 2 > 0$$

**пр  $x \in \mathbb{R}$ , то**

**уравнение  
корней не  
имеет.**



**Ответ: уравнение  
корней не  
имеет.**

**Пример**

$$|x^2 + x + 1| = 0.$$

**Решен**

$$|x^2 + x + 1| = 0.$$

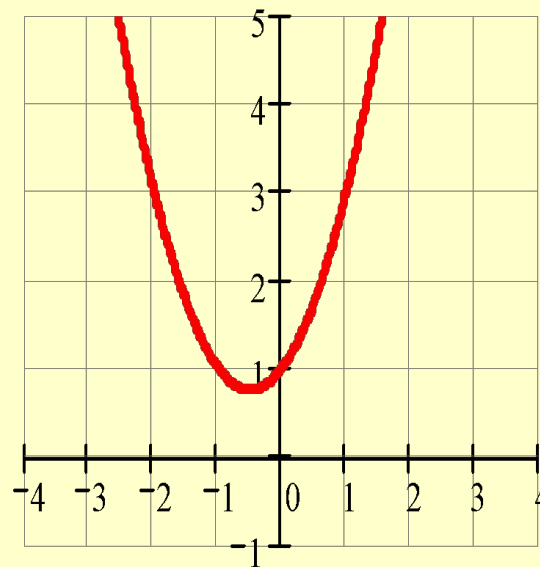
**Так как**

$$x^2 + x + 1 > 0$$

**пр  $x \in \mathbf{R}$ , то**

**и уравнение  
корней не  
имеет.**

$f(x)$



**Ответ: уравнение  
корней не  
имеет.**



**Пример**

$$||x| - 2| = 2$$

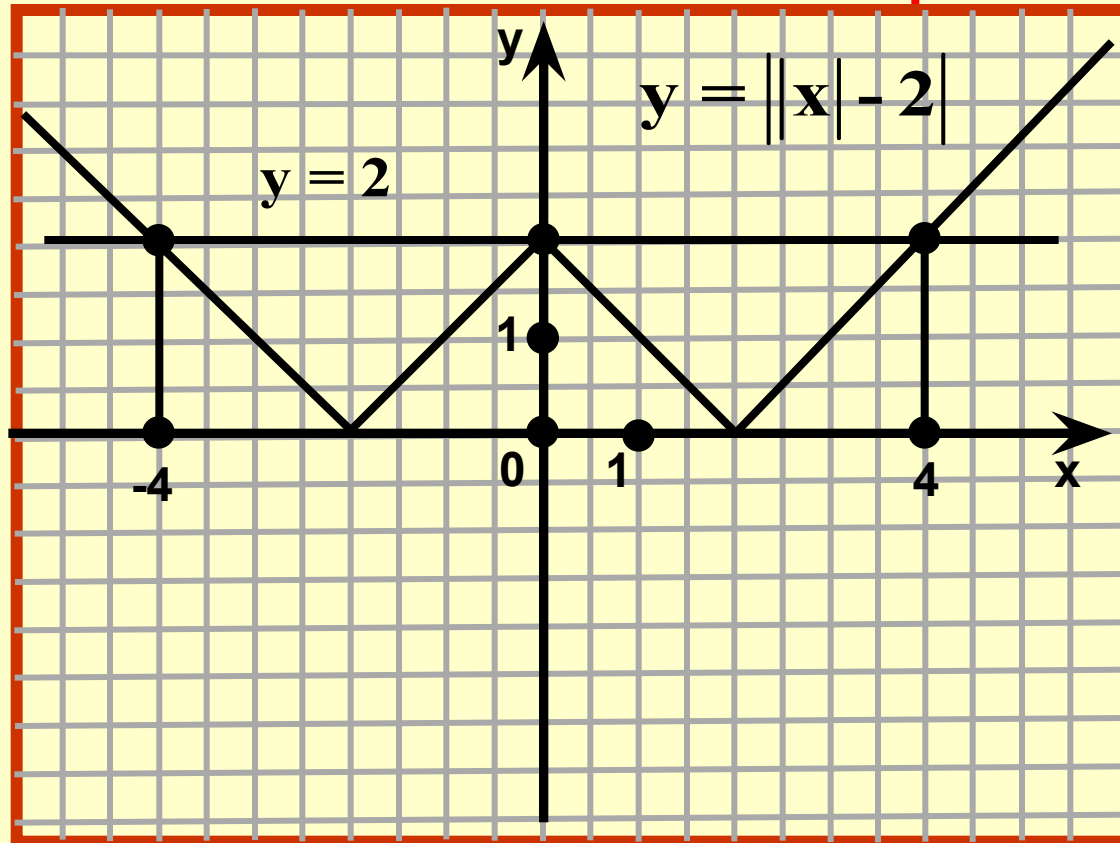
**Решен**

$$||x| - 2| = 2,$$

$$\left[ \begin{array}{l} |x| - 2 = 2, \\ |x| - 2 = -2; \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} |x| = 4, \\ |x| = 0; \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4, \\ x = 0. \end{array} \right.$$



**Ответ:**  $\pm 4; 0.$

**Пример**

$$|x^2 - x - 1| = 1.$$

**Решен**

$$|x^2 - x - 1| = 1,$$

$$\left[ \begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 1, \\ x^2 - x - 1 = -1; \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ x^2 - x = 0; \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ x^2 - x = 0; \end{array} \right.$$

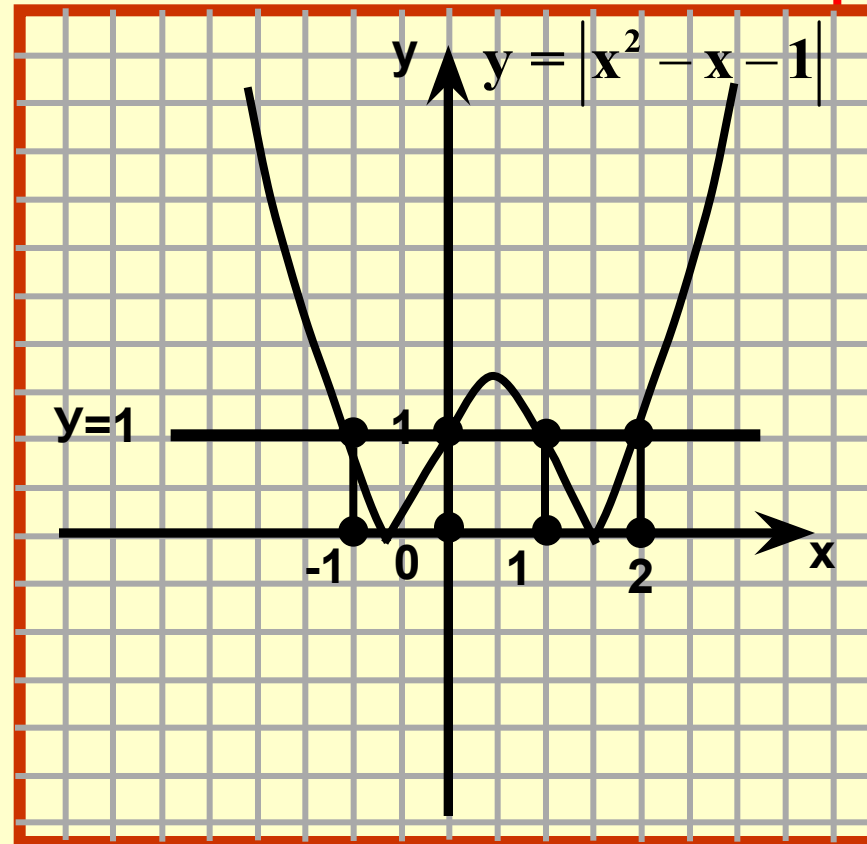
$$\left[ \begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ x^2 - x = 0; \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \\ x = 0, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \\ x = 0, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \\ x = 0, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \\ x = 0, \\ x = 1. \end{array} \right.$$



**Ответ:  $\pm 1; 0; 2.$**

**Пример**

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0. (\text{ЦТ 2003 г})$$

**Решение**

**ие**

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0. \quad \text{Так как } x^2 = |x|^2.$$

$$\text{Тогда } |x|^2 - 2|x| - 3 = 0. \quad \text{Пусть } |x| = t, t \geq 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t = -1, \\ t = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0, \\ t = -1, \\ t \geq 0, \\ t = 3; \end{cases} \quad t = 3.$$

**Вернёмся к переменной**

$$x \quad |x| = 3,$$

$$x = \pm 3.$$

**Ответ:  $\pm 3$ .**

**Пример**

$$x|x| - 7x + 12 = 0.$$

**Решен**

$$x|x| - 7x + 12 = 0,$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ -x^2 - 7x + 12 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x = 3; x = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ x = \frac{-7 \pm \sqrt{97}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 7x - 12 = 0; \end{cases}$$

$$x = 3,$$

$$x = 4,$$

$$x = \frac{-7 - \sqrt{97}}{2}.$$

**Ответ:**  $\frac{-7 - \sqrt{97}}{2}; 3; 4.$

**Пример**

**9  
Решение**

**ие**

$$x^2 - 5x \frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0 \quad (\text{ЦТ 2004 г})$$

$$x^2 - 5x \frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0,$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x-2 > 0, \\ x^2 - 5x - 14 = 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x-2 < 0, \\ x^2 + 5x - 14 = 0; \end{array} \right. \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 2, \\ x = -2; x = 7; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 2, \\ x = -7; x = 2; \end{array} \right. \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} x = 7, \\ x = -7. \end{array} \right.$$

**Ответ:  $\pm 7$ .**

# Домашнее

1) *Материал лекции.*

2) *М.Л.Галицкий «Сборник задач по алгебре для 8-9 классов» §1 п. 6.*

*В помощь учащимся лицея-интерната при СГАУ им. Н.И. Вавилова «Сборник задач по математике. Часть I.» §5 стр. 74 ; 84.*

3) *М.Л.Галицкий «Сборник задач по алгебре для 8-9 классов» §5 №5.7;5.8.*

*В помощь учащимся лицея-интерната при СГАУ им. Н.И.*

*Вавилова «Сборник задач по*