СГАУ лицей-интернат естественных наук

ЛИЕН

ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ естественных наук

при Саратовском государственном аграрном университете им. Н.И. Вавилова

Лекция по алгебре. Тема: логарифмические уравнения.

Преподаватель математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

Определение:

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называются **логарифмическими.**

Например:

$$1)\ \log_5 x = -2;\ 2)\ \lg(x^2+5) = \sqrt{5};$$

$$3)\ \ln(x^3-1) = \pi\ ;\ 4)\ \log_{(-x^2+x-6)} 25 = -2$$

I. Типы простейших логарифмических уравнений

Например:

$$1)\ \log_a x = b, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

имеет единственное решение

$$x = a^b$$

$$1)\ \log_3 x = 0{,}5,$$

$$x = 3^{0,5},$$

$$x = \sqrt{3}.$$

$$\textit{Ответ}: \sqrt{3}.$$

$$2)\ \log_a (f(x)) = b, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

имеет единственное решение

$$f(x) = a^b.$$

$$2)\ \ln x = 0,$$

$$x = 1.$$

$$\textit{Ответ}: 1.$$

Типы простейших логарифмических уравнений.

$$2)\ \boxed{\begin{array}{l}\log_a(f(x)) = b,\\ f(x) = a^b.\end{array}}$$

Например:

$$1)\ \log_3(2x-1) = 2,$$

$$2x-1 = 3^2,$$

$$2x = 9+1,$$

$$x = 5.$$

$$\textit{Ответ}: 5.$$

$$2)\ \log_2(x+3) = \log_2 16,$$

$$x+3 = 16,$$

$$x = 13.$$

$$\textit{Ответ}: 13.$$

$$3)\ \log_3(\log_4 x) = 0,$$

$$\log_4 x = 3^0,$$

$$x = 4.$$

$$\textit{Ответ}: 4.$$

Типы простейших логарифмических уравнений.

$$3)\ \log_a\left(f(x)\right) = g(x),$$
$$f(x) = a^{g(x)}$$

Например:

$$1)\ f(x) > 0$$

$$\log_7(x+8) = -x,$$
$$x + 8 = 7^{-x},$$

Рассмотрим функцию

Линейная функция, где $k>0$, возрастает на $\mathcal{R}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=x+8$

$$g(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$$

Показательная функция, где $0 < a < 1$, убывает на $\mathcal{R}$.

Графики этих функций могут пересекаться не более, чем в одной точке. Значит, уравнение имеет не более

Типы простейших логарифмических уравнений.

$$4)\ \log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$$

Логарифмическое уравнение равносильно каждой из следующих систем:

$$\boxed{\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad или \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}}$$

Для решения данного уравнения 1 переходят только к одной из этих систем (той, той которая проще) либо решают уравнение $f(x) = g(x)$, которое может иметь 2 корни, посторонние для исходного уравнения, и

$$4)\ \log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$$

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Например:

$$1)\ \ln\left(x^2 - 6x + 9\right) = \ln(3x + 9),$$

$$x^2 - 6x + 9 = 3x + 9,$$

$$x^2 - 9x = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 9. \end{array}\right.$$

Проверка:

$$x = 0$$

$$\ln\left(0^2 - 6\cdot 0 + 9\right) = \ln\left(3\cdot 0 + 9\right)$$

$$\ln 9 = \ln 9 - \textit{верно}\ .$$

$$x = 9,$$

$$\ln\left(9^2 - 6\cdot 9 + 9\right) = \ln\left(3\cdot 9 + 9\right),$$

$$\ln 36 = \ln 36 - \textit{верно}.$$

Ответ: *0;*

$$4)\ \log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$$

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Например:

$$2)\ \log_2\left(x^2 + x - 2\right) = 1 + \log_2 x,$$

$$\log_2\left(x^2 + x - 2\right) = \log_2 2 + \log_2 x,$$

$$\log_2\left(x^2 + x - 2\right) = \log_2 2x,$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = 2x, \\ 2x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \end{array} \right. \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Ответ: *2*.

Типы логарифмических уравнений.

II. Уравнения с неизвестным в основании логарифма

Например:

$$1)\ \log_x 5 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

Ответ: $\sqrt[3]{5}$

$$2)\ \log_{-x} 25 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x > 0, \\ -x \neq 1, \\ (-x)^{-2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \neq -1, \\ x^2 = \dfrac{1}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -0{,}2 \\ x = 0{,}2 \end{array} \right. \\ x < 0, x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -0{,}2$$

Ответ: *- 0,2*

При решении логарифмических уравнений часто используют свойства логарифмов

$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x)$$

$$\log_a (f(x))^p = p \cdot \log_a f(x)$$

что приводит к возникновению опасности потери корней заданного уравнения.

Следует пользоваться формулами в таком виде:

$$\log_a(f(x)g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$$

$$\log_a(f(x))^p = p \cdot \log_a|f(x)|$$

где p – четное число.

Наприм
ер:

$$1)\ \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7;$$

$$\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7;$$

$$\frac{7}{4}\log_2 x = 7;$$

$$\log_2 x = 4;$$

$$x = 16.$$

$$Ответ:\ 16$$

Например:

$$2)\ 2(\lg x-\lg 6)=\lg x-2\lg(\sqrt{x}-1);$$

$$\begin{cases} x>0, \\ \sqrt{x}-1>0, \\ \lg\dfrac{x^2}{36}=\lg\dfrac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\ x>1, \\ \dfrac{x^2}{36}=\dfrac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x(\sqrt{x}-1)^2=36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x=9, \end{cases} \Leftrightarrow x=9.$$

1) *Обе части уравнения* $\dfrac{x^2}{36}=\dfrac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}$ *разделим на* x $(т.к.\ x>0)$ *и умножим на* $36(\sqrt{x}-1)^2$ *т.к.* $x\neq 1.$

2) $x(\sqrt{x}-1)^2=36,$

$(\sqrt{x}(\sqrt{x}-1))^2=36,$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6, \\ \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=-6. \end{array}\right.$$

Поскольку $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)>0,$ *то* $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\neq -6$

Имеем $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6,$

$(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-6=0,$

Пусть $\sqrt{x}=t,$ *причем* $t>0,$

имеем $t^2-t-6=0,$

$$\begin{cases} t>0, \\ \left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=-2, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=3.$$

$$t^2=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{a}, \\ t=-\sqrt{a}. \end{array}\right.$$

Тогда $\sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9.$

Ответ: *9.*

III. <u>Метод замены переменной в логарифмическом уравнении.</u>

Пусть логарифмическое уравнение имеет вид :

$$\boxed{A \cdot \log_a^2 f(x) + B \cdot \log_a f(x) + C = 0}$$

Тогда вводят новую переменную $t = \log_a f(x)$, где t – любое число (ОДЗ уравнения: $f(x) > 0$) и получают квадратное уравнение $At^2 + Bt + C = 0$.

Пример.

Решить уравнение $\lg^2 x - \lg x^3 = -2$

Решение. $\lg^2 x - 3 \cdot \lg x + 2 = 0$, $\underline{x > 0}$

Пусть $\lg x = t$, t – любое число, тогда

уравнение примет вид $t^2 - 3 \cdot t + 2 = 0$.

Откуда $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

1) $\lg x = 1$
$x = 10$

2) $\lg x = 2$
$x = 100$

Ответ: 10; 100

IV. Решение уравнений методом приведения к одному основанию.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{5}} x - \log_5 x + \log_{5\sqrt{5}} x = 3{,}75$$

Решение.

$$2 \cdot \log_5 x - \log_5 x + \frac{2}{3} \cdot \log_5 x = 3{,}75$$

Пусть $\log_5 x = t$, t – любое число, тогда уравнение примет вид

$$2 \cdot t - t + \frac{2}{3} \cdot t = \frac{15}{4}$$

$$\frac{5}{3} \cdot t = \frac{15}{4}, \quad t = \frac{9}{4}$$

$$\log_5 x = \frac{9}{4}, \quad x = 5^{9/4}, \quad x = 25\sqrt[4]{5}$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_2 x + \log_x 2 = 2$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2$$

1) Пусть $\log_2 x = t$, $t \neq 0$,

тогда $t + 1/t = 2$,

$t^2 - 2t + 1 = 0$,

$(t - 1)^2 = 0$,

$t = 1$.

2) Имеем,

$\log_2 x = 1$,

то $x = 2$.

Ответ: 2.

V. Решение уравнений методом логарифмирования.

Пример. Решить уравнение

$$x^{\log_3 3x} = 9$$

Решение.

Так как логарифмическая функция определена при x > 0, то обе части уравнения положительны. Логарифмируем обе части уравнения по основанию 3, имеем

$$\log_3 x^{\log_3 3x} = \log_3 9$$

$$\log_a (f(x))^p = p \cdot \log_a |f(x)|.$$

$$(\log_3 3x) \cdot \log_3 x = 2$$

$$(\log_3 3 + \log_3 x) \cdot \log_3 x = 2$$

$$(1+\log_3 x)\cdot\log_3 x = 2$$

$$\log_3^2 x + \log_3 x = 2$$

Пусть $\log_3 x = t$, t – любое число, тогда
$t^2 + t - 2 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.

1) $\log_3 x = 1$
$x = 3$

2) $\log_3 x = -2$
$x = 1/9$

Ответ: **3; 1/9**

Домашнее задание.

1) Разобрать и выучить лекцию.
2) Никольский, 10 кл., п.6.2, №6.11(у)
№ 6.13(а,г), 6.14(б,в), 6.16(б,г),
6.17(а,б), 6.18(а), 6.19(в)