МБОУ «Инсарская средняя общеобразовательная школа №1»

Факультативное занятие в 11 классе:

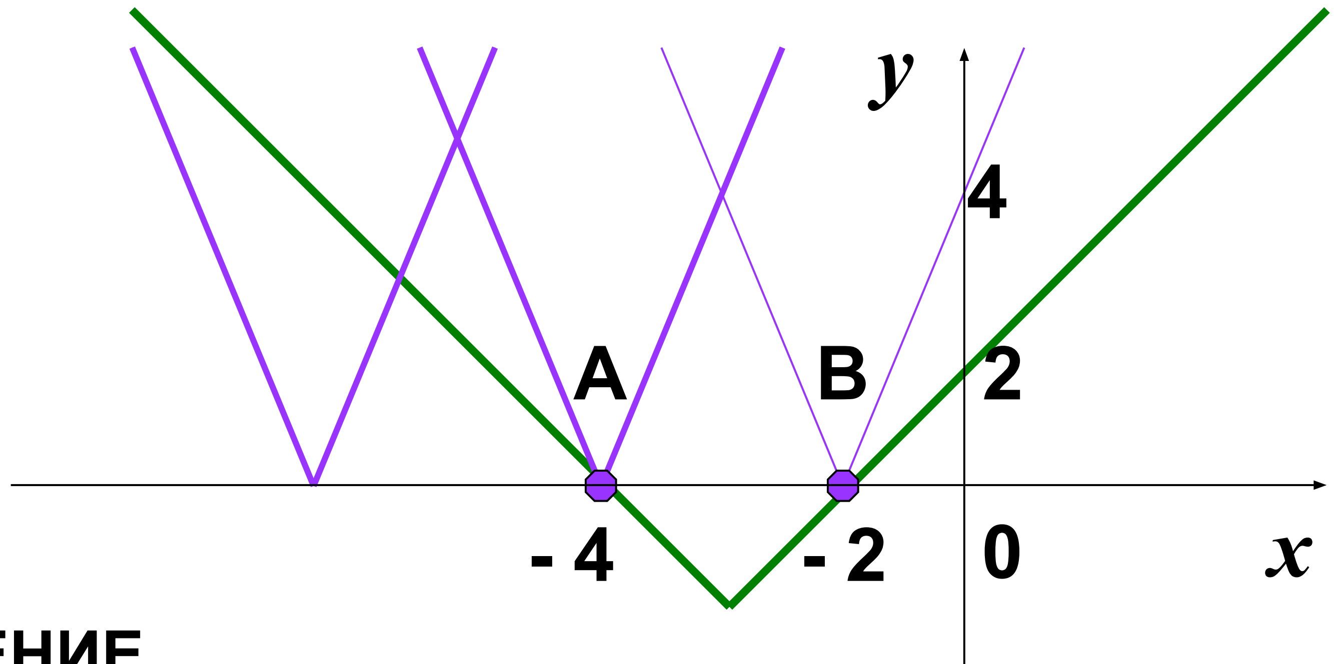
Графический подход к решению задач с параметром и модулем

подборка заданий для подготовки к ЕГЭ

Чудаева Елена Владимировна, учитель математики,

г. Инсар, Республика Мордовия

Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $|2x - a| = |x + 3| - 1$ имеет единственное решение.



РЕШЕНИЕ.

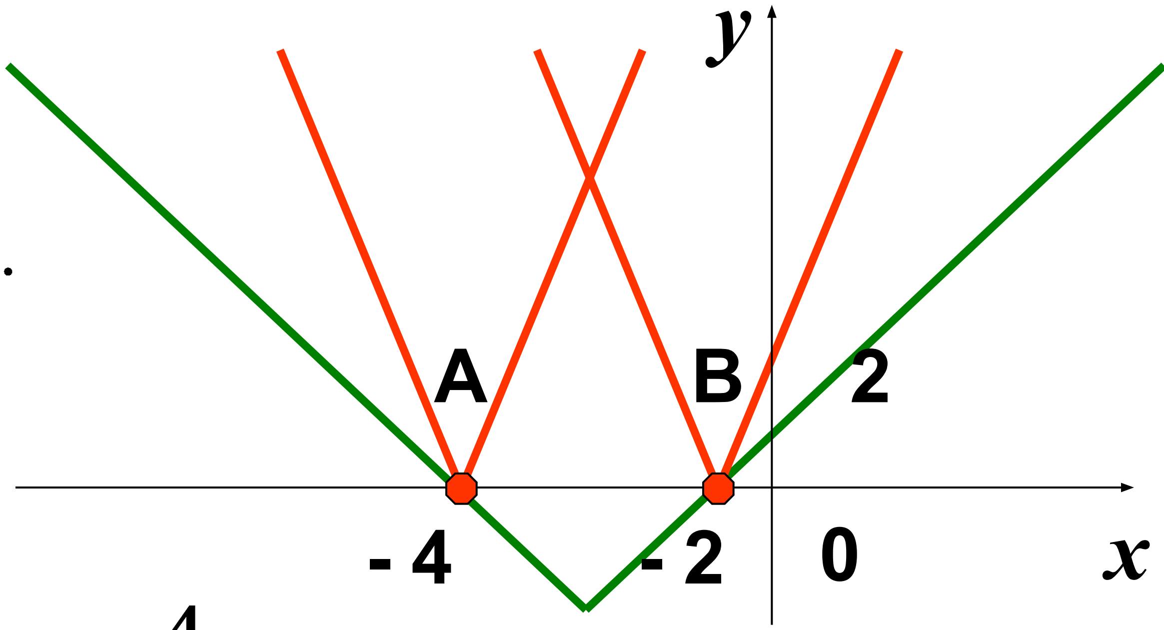
Правая часть этого уравнения задает неподвижный «уголок», левая – «уголок», вершина которого двигается по оси абсцисс.

Очевидно, что данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося «уголка» попадет в точку А, или точку В. Имеем,

$$|x+3|-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4, \quad x=-2,$$

тогда А(-4; 0), В(-2; 0) и координаты этих точек удовлетворяют уравнению $y=|2x-a|$.

$$\left[\begin{array}{l} |-8-a|=0 \\ |-4-a|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-8 \\ a=-4 \end{array}\right. .$$



Ответ: $a=-8, \quad a=-4$

Графический способ решения задач с параметром

Задачу с параметром можно рассматривать как функцию $f\,(x;\,a)$ **=0**

Схема решения:

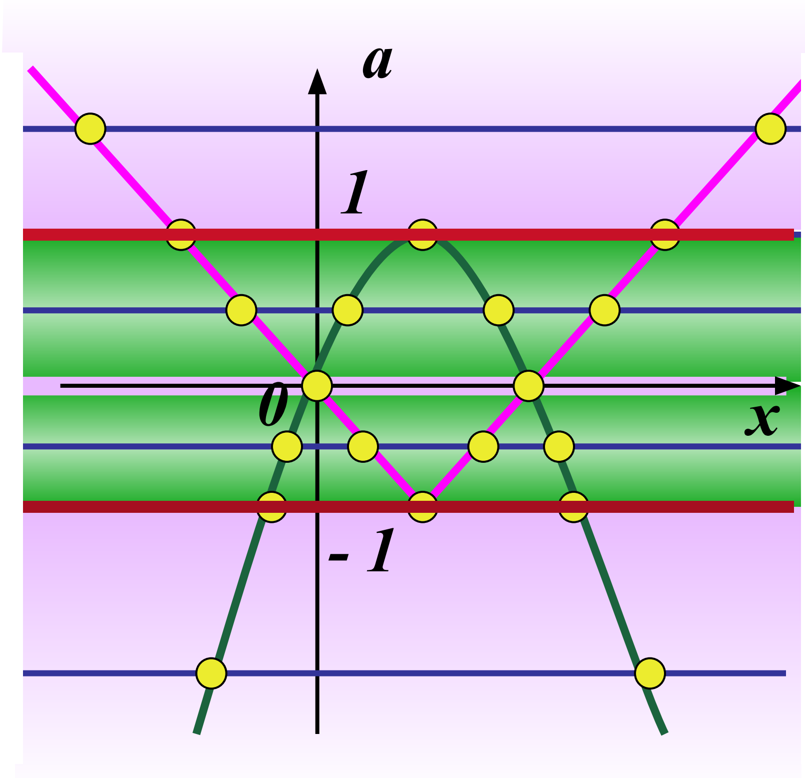
- **1. Строим графический образ**
- **2. Пересекаем полученный график прямыми параллельными оси абсцисс**
- **3. «Считываем» нужную информацию**

Найти количество корней уравнения в зависимости от параметра a

$$(a-2x+x^2)(a+1-|x-1|)=0$$

Данное уравнение равносильно совокупности следующих двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} a=2x-x^2 \\ a=|x-1|-1 \end{array}\right.$$



Количество решений данного уравнения - это число точек пересечения графика данного уравнения с горизонтальной прямой $a=a_0$. По рисунку «считываем» ответ

если $a<-1,\ a=0$ *и* $a>1$, *то два корня*

если $a=\pm 1$, *то три корня*

если $-1<a<0$ *и* $0<a<1$, *то четыре корня*

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ОБЛАСТЕЙ

(«переход» метода интервалов с прямой на плоскость)

Неравенства с одной переменной

Неравенства с двумя переменной

Метод интервалов:

- 1.ОДЗ
- 2. Корни
- 3. Ось
- 4. Знаки на

  интервалах
- 5. Ответ.

Метод областей:

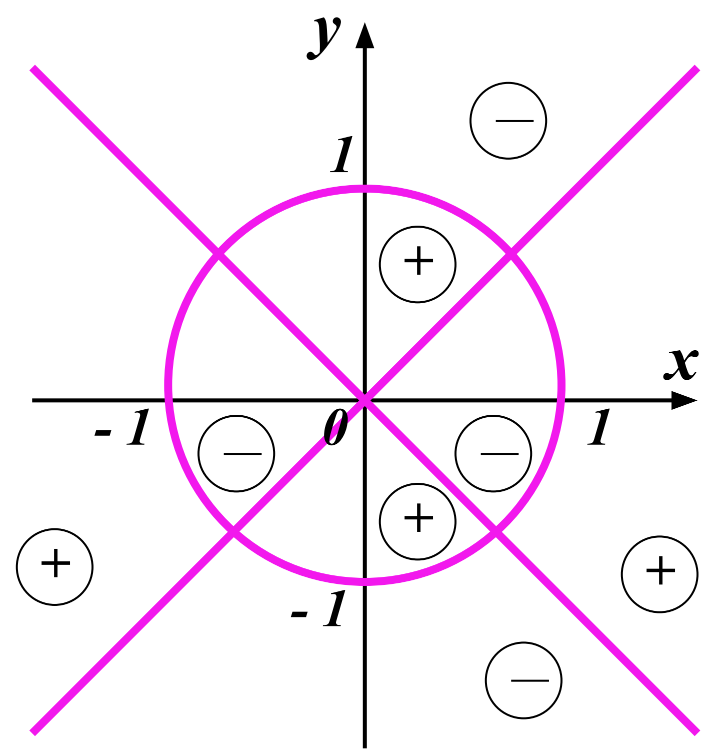
- 1. ОДЗ
- 2. Граничные линии
- 3. Координатная плоскость
- 4. Знаки в областях
- 5.Ответ по рисунку.

На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \le 0$

$$Найдем \quad ОДЗ: \quad x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 1$$

Граничные линии: $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow |y| = |x| \quad и \quad x^2 + y^2 = 1$

Строим граничные линии.
Они разбивают плоскость на восемь областей, определяя знаки подстановкой в отдельных точках, получаем решение.



МЕТОД ОБЛАСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Графический прием ⟵ **Ключ решения:** ⟶ Свойства функций

Параметр – «равноправная» переменная ⇒ отведем ему координатную ось т.е. задачу с параметром будем рассматривать как функцию $f\,(x\,;\,a) > 0$

Общие признаки задач подходящих под рассматриваемый метод

- В задаче дан один параметр a и одна переменная x
- Они образуют некоторые аналитические выражения $F\,(x;a),\ G\,(x;a)$
- Графики уравнений $F(x;a)=0, G(x;a)=0$ строятся несложно

Схема решения:

- 1.Строим графический образ
- 2.Пересекаем полученный график прямыми перпендикулярными параметрической оси
- 3.«Считываем» нужную информацию

Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых множество решений неравенства $\left(p-x^2\right)\left(p+x-2\right)<0$ **не содержит ни одного решения неравенства** $x^2 \le 1$

Применим обобщенный метод областей.

Построим граничные линии

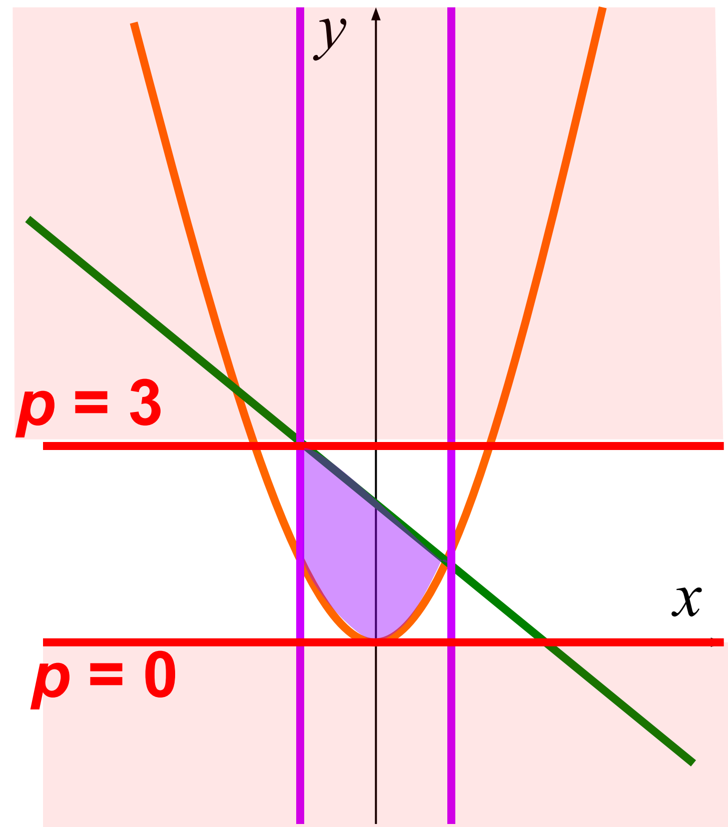
$$p = x^2 \text{ и } \quad p = 2 - x$$

Определим знаки в полученных областях, и получим решение данного неравенства.

Осталось из полученного множества исключить решения неравенства $x^2 \le 1$

По рисунку легко считываем ответ

$$p \le 0,\ p \ge 3$$



Ответ: $p \le 0,\ p \ge 3$

Сколько решений имеет система в зависимости от параметра *а*?

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

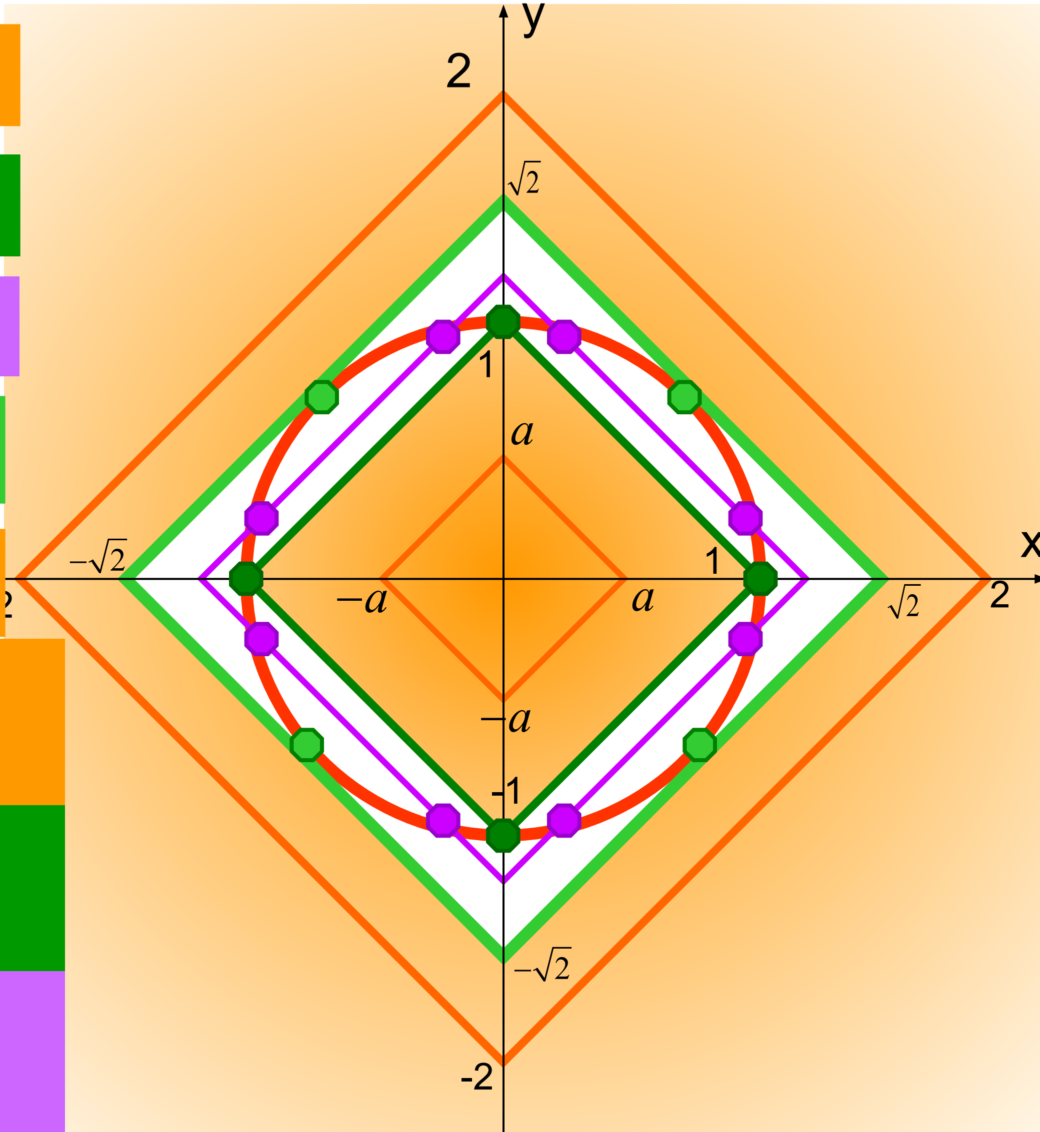
решений нет при $a<1$

4 решения при $a=1$

8 решений при $1<a<\sqrt{2}$

4 решения при $a=\sqrt{2}$

решений нет при $a>\sqrt{2}$



Ответ:

решений нет, если $a<1$ или $a>\sqrt{2}$

4 решения, если $a=1$ или $a=\sqrt{2}$

8 решений, если $1<a<\sqrt{2}$

При каких положительных значениях параметра *а*, система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} \big|4-|x-2|\big|-|y|=0 \\ x^2+y^2=a^2+4(x-1) \end{cases}$$

Запишем систему в виде: $\begin{cases} \big|4-|x-2|\big|=|y| \end{cases}$.

решений нет при $a<2\sqrt{2}$

Построим графики обоих уравнений.

ния:

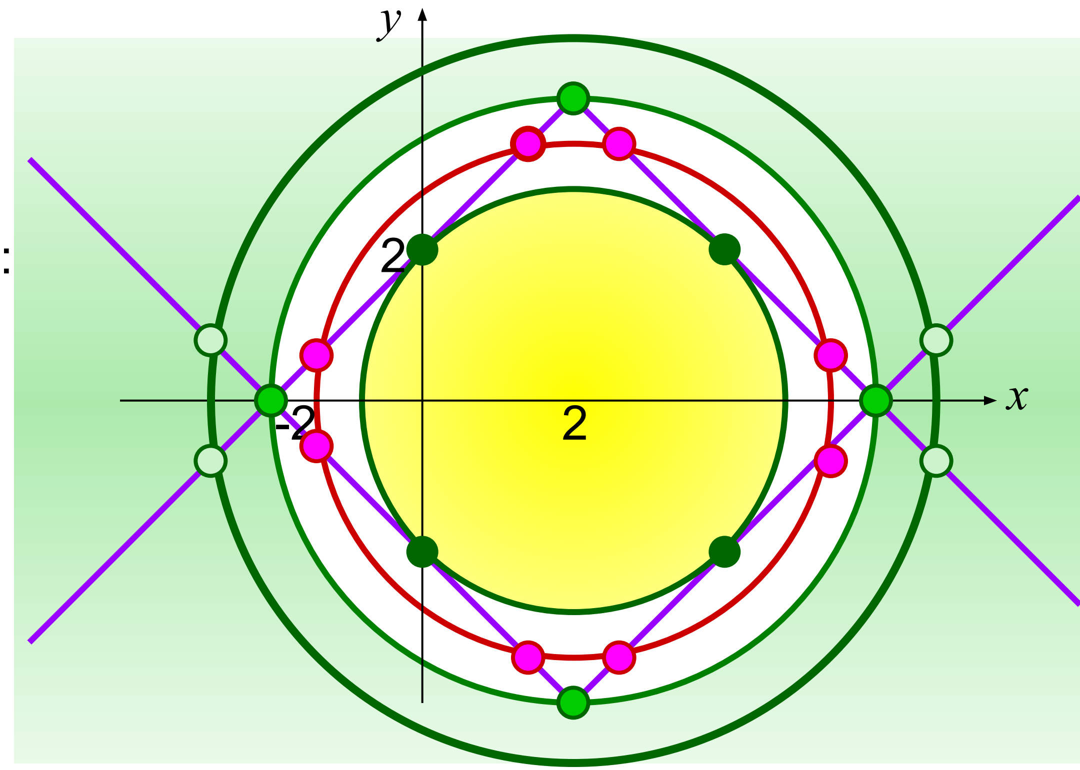
4 решения при $a=2\sqrt{2}$

$y=\big|4-|x-2|\big|$ и симметрично

8 решений при $2\sqrt{2}<a<4.$ си

Второе уравнение задает семейство

4 решения при $a\geq 4$ и



Итак:

при $a<2\sqrt{2}$ решений нет; при $a=2\sqrt{2}$ и $a\geq 4$ система имеет 4 решения; система имеет 8 решений при $2\sqrt{2}<a<4.$

Ответ: $a=2\sqrt{2}$ 4 $a\geq$

Задачи, взятые из материалов ЕГЭ прошлых лет

При каких значениях параметра a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x?

Решение. Рассмотрим сумму данных выражений

$$\log_a(\cos^2 x+1)+\log_a(\cos^2 x+5)=1.$$

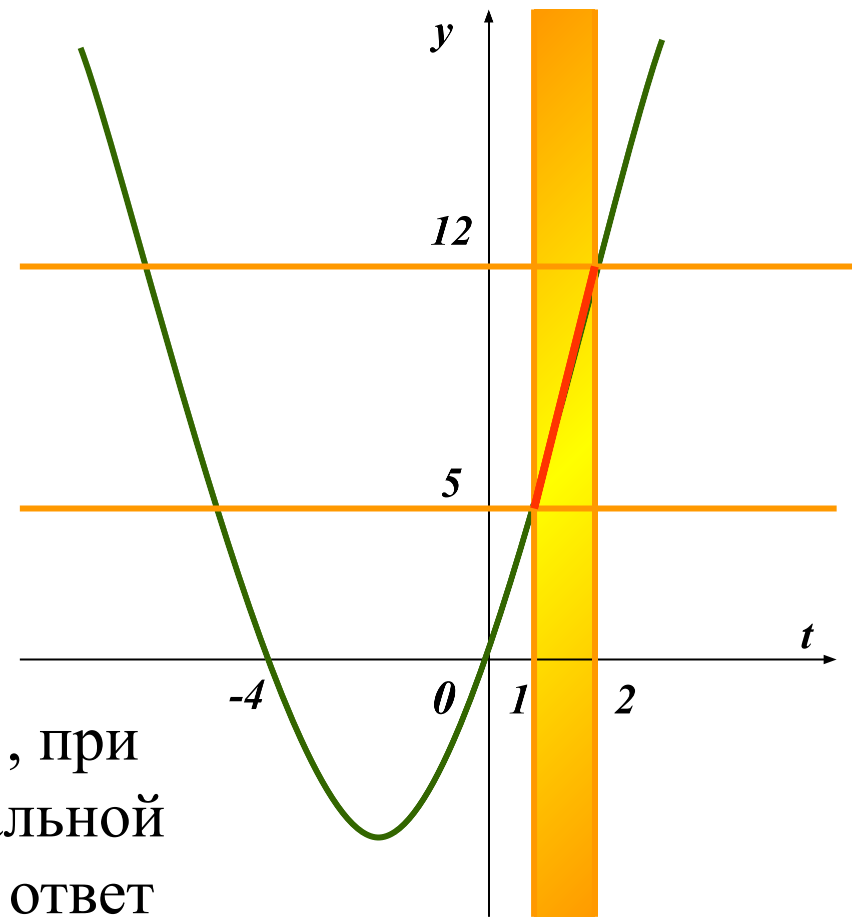
Пусть $t=\cos^2 x+1,\quad t\in[1;2]$ тогда уравнение примет вид

$$\log_a t\cdot(t+4)=1 \iff$$

$$\iff t^2+4t=a\ ,(a>0, a\neq 1)\ .$$

Построим в прямоугольной системе координат график параболы $y(t)=t^2+4\cdot t,$

и прямые $y=a,$ учитывая ОДЗ: $t\in[1;2]$.



Сумма данного выражения равна 1, при пересечения параболы с горизонтальной прямой . По рисунку «считываем» ответ

Ответ: $a\in[5;12]$

Найдите все значения параметра *a*, при которых количество корней уравнения $(5-a)x^3-4x^2+x=0$ равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a^2$ и $y=5-|x-1|$

1 решение при $|a|=2\sqrt{2}$

задает неподвижный

2 решения при $2\sqrt{2}<|a|<3\sqrt{2}$

3 решения при $|a|=3\sqrt{2}$

задаёт семейство

4 решения при $3\sqrt{2}<|a|<\sqrt{26}$

3 решения при $|a|=\sqrt{26}$

радиусом

2 реш. при $a<-\sqrt{26}, a>\sqrt{26}$

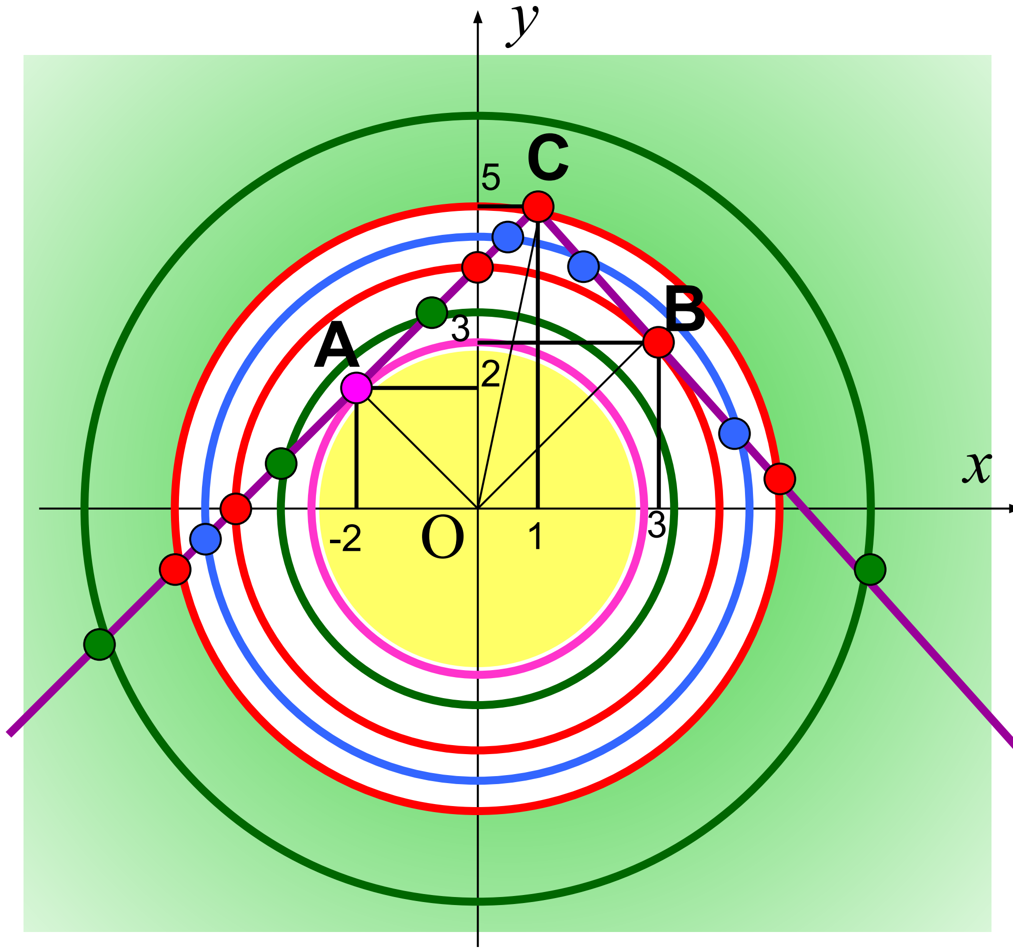
Построим эскизы этих линий и определим из рисунка количество их общих точек.

$$a_1=OA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

$$a_2=OB=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

$$a_3=OC=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$$

нет решение при $|a|<2\sqrt{2}$



Запишем первое уравнение в виде $x\cdot\left(\left(5-a\right)x^2-4x+1\right)=0$

Заметим, что $x = 0$ – корень не зависимо от параметра a.

Уравнение $\left(5-a\right)x^2-4x+1=0$ может иметь 0, 1 или 2 решения в зависимости от параметра a и дискриминанта $D=4\left(a-1\right)$

	одно решение	Два решения	Три решения
первое уравнение	$a<1$	$a = 5$; $a = 1$	$a>1$
совокупность линий	$a=2\sqrt{2}$ $a=-2\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}<a<-2\sqrt{2},$ $2\sqrt{2}<a<3\sqrt{2},$ $a<-\sqrt{26},\ \ a>\sqrt{26}$	$a=-3\sqrt{2},\ a=-\sqrt{26}$ $a=3\sqrt{2},$ $a=\sqrt{26}$

Осталось заметить, что условие задачи выполняется только в трех точках при $a=-2\sqrt{2},\ a=3\sqrt{2}\ \ a=\sqrt{26}$

Ответ: $a=-2\sqrt{2},\ a=3\sqrt{2}\ \ a=\sqrt{26}$

Найти все положительные значения параметра a при каждом из которых данная система $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \le 0 \\ x^2 - a^2 = -y^2 \end{cases}$ **имеет хотя бы одно решение.**

Решение.

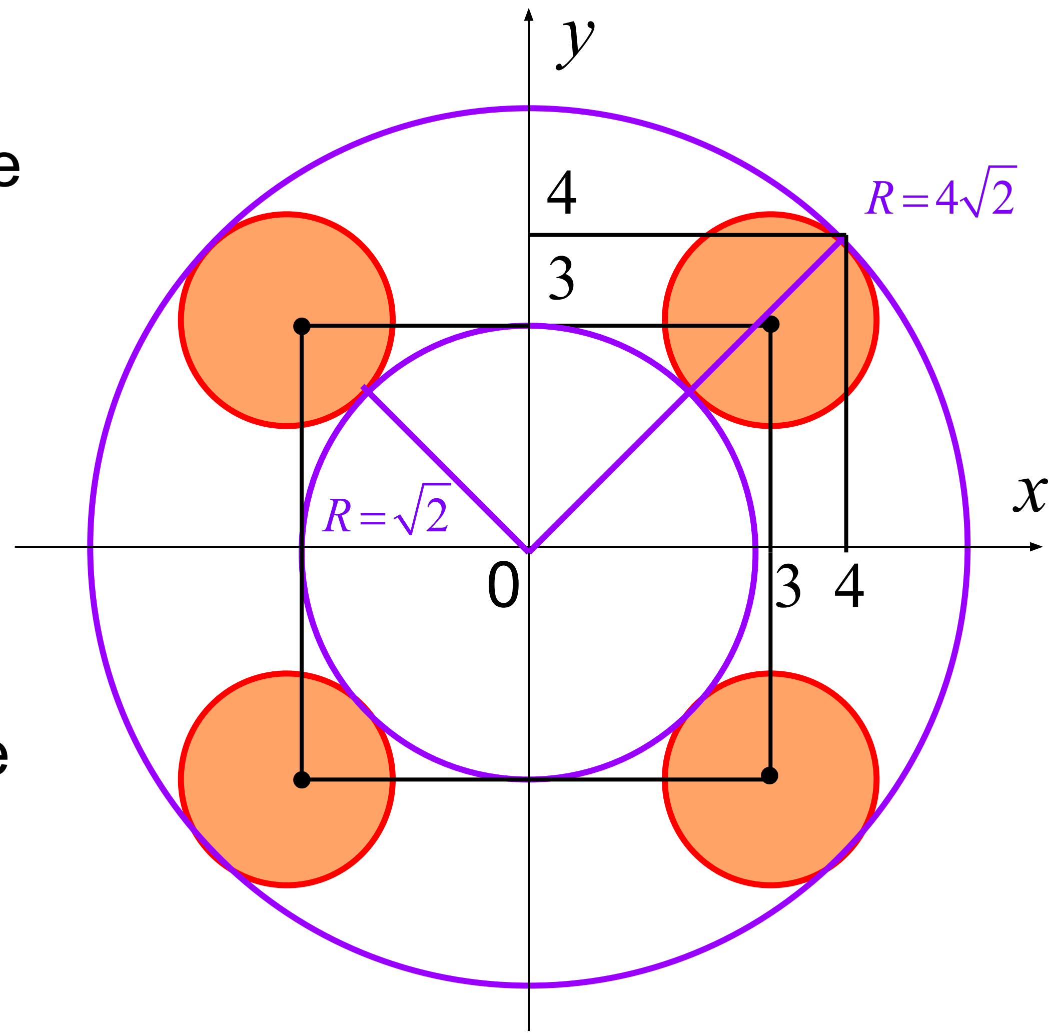
Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \le 2 \\ x^2 + a^2 = \quad ^2 \end{cases}$$

Построим графический образ соответствий, входящих в систему.

Очевидно, что условие задачи выполняется при

Ответ: $\sqrt{2} \le a \le 4\sqrt{2}$



Найдите все значения параметра а, для которых при каждом х из промежутка (4;8] значение выражения $\log_2^2 x - 8$ <u>не равно</u> значению выражения $(2a-1)\log_2 x$

Решим задачу при условии равенства данных выражений.

Введем новую переменную $\log_2 x = t, t \in (2;3]$

тогда уравнение примет вид: $t^2 - 8 = (2a-1)t$

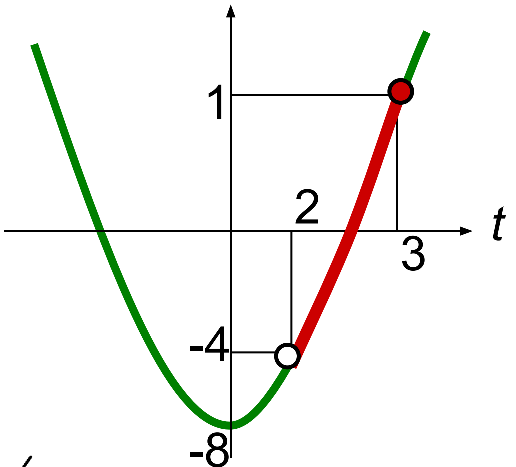


График левой части – парабола $f(t)$,
график правой части – прямая $g(t)$.

$$f(2) \neq 2^2 - 8 = -4, \quad g(2) \neq (2a-1)\cdot 2 = -4, \quad a \neq -\tfrac{1}{2}$$

$$f(3) = 3^2 - 8 = 1, \quad g(3) = (2a-1)\cdot 3 = 1, \quad a = \tfrac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$$

Значит условие исходной задачи выполняется при

$$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$$

Литература

Анимация с сайта: http://badbad-girl.narod.ru/zelenie.html

Задачи для решения из книг:

1. Внеурочная работа по математике в контексте реализации инновационных технологий. Дидактические материалы для организации деятельности обучаемых: учеб. пособие ⁄ авт.-сост.: А.Т. Лялькина, Е.В. Чудаева и др. – Саранск, 2007

2. П.И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М.С. Якир. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2003.

3. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. – 6-е изд., - М.: Рольф, 2002.

4. Экзаменационные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. ЕГЭ – 2007. Составитель: Клово А.Г. – 2006.