

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

«Три пути ведут к знанию:

путь размышления - это путь самый

благородный,

путь подражания - это путь самый лёгкий,

и путь опыта - это путь самый горький»

Конфуций

# ВЕРНО ЛИ, ЧТО

- ... существует такое число  $t$ , что  $\sin t = -0,8$ ,  $\cos t = 0,6$ ;
- ... косинус положительного аргумента может принимать отрицательные значения;
- ... уравнение  $\cos x = \pi$  имеет множество корней;
- ... значение выражения  $(\cos x - \sin x)^2 + 2\sin x \cos x$  не зависит от значения  $x$ ;
- ...  $\operatorname{tg} 3 > 0$ ;
- ... корни уравнения  $\sin x = a$  имеют вид:  
 $x = \pm \arcsin a + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- ...  $\cos(-x) = -\cos x$ ;
- ...  $\sin 150^\circ = 0,5$ , а  $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
- ...  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$  ;
- ... уравнение  $\sin x = 1$  - особенное?

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

A1. Найдите  $\cos 2a$ , если  $\sin a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\pi < a < 3\pi/2$ .

- 1)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       3) -0,5      4) 0,5

A2. Найдите значение выражения

$$\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta \quad \text{если } \alpha = 46^\circ, \quad \beta = 74^\circ.$$

- 1) -0,5      2) 0,5      3) 1      4) -1

A3. Укажите наименьшее значение выражения  $1,5 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 3,5$

- 1) 2      2) 1      3) 2,5      4) -1

B1. Вычислите

$$\frac{2 \sin 31^\circ \cos 31^\circ}{\sin 38^\circ \sin 66^\circ + \cos 38^\circ \sin 24^\circ}$$

Ответ: 1.

A1. Найдите  $\cos a$ , если  $\sin a = \frac{12}{13}$  и  $a$  - угол II четверти.

1)  $\frac{5}{13}$

2)  $-\frac{5}{13}$

3)  $\frac{1}{13}$

4)  $-\frac{5}{12}$

A2. Найдите значение выражения  $2\sin 15^\circ(\cos 10^\circ \cos 5^\circ - \sin 10^\circ \sin 5^\circ)$

1) 1

2) 2

3) 0,25

4) 0,5

A3. Найдите наибольшее значение выражения  $3 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) - 2,5$

1) 3

2) 0,5

3) 5,5

4)  $-0,5$

B1. Найдите значение выражения  $6\sqrt{2} \operatorname{tg} a \cos^2(\pi - a)$ , если  $\sin 2a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: 2.

B1. Решение:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin 31^\circ \cos 31^\circ}{\sin 38^\circ \sin 66^\circ + \cos 38^\circ \sin 24^\circ} = \\ & = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 38^\circ \sin(90^\circ - 24^\circ) + \cos 38^\circ \sin 24^\circ} = \\ & = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 38^\circ \cos 24^\circ + \cos 38^\circ \sin 24^\circ} = \\ & = \frac{\sin 62^\circ}{\sin(38^\circ + 24^\circ)} = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 62^\circ} = 1 \end{aligned}$$

B1. Решение:

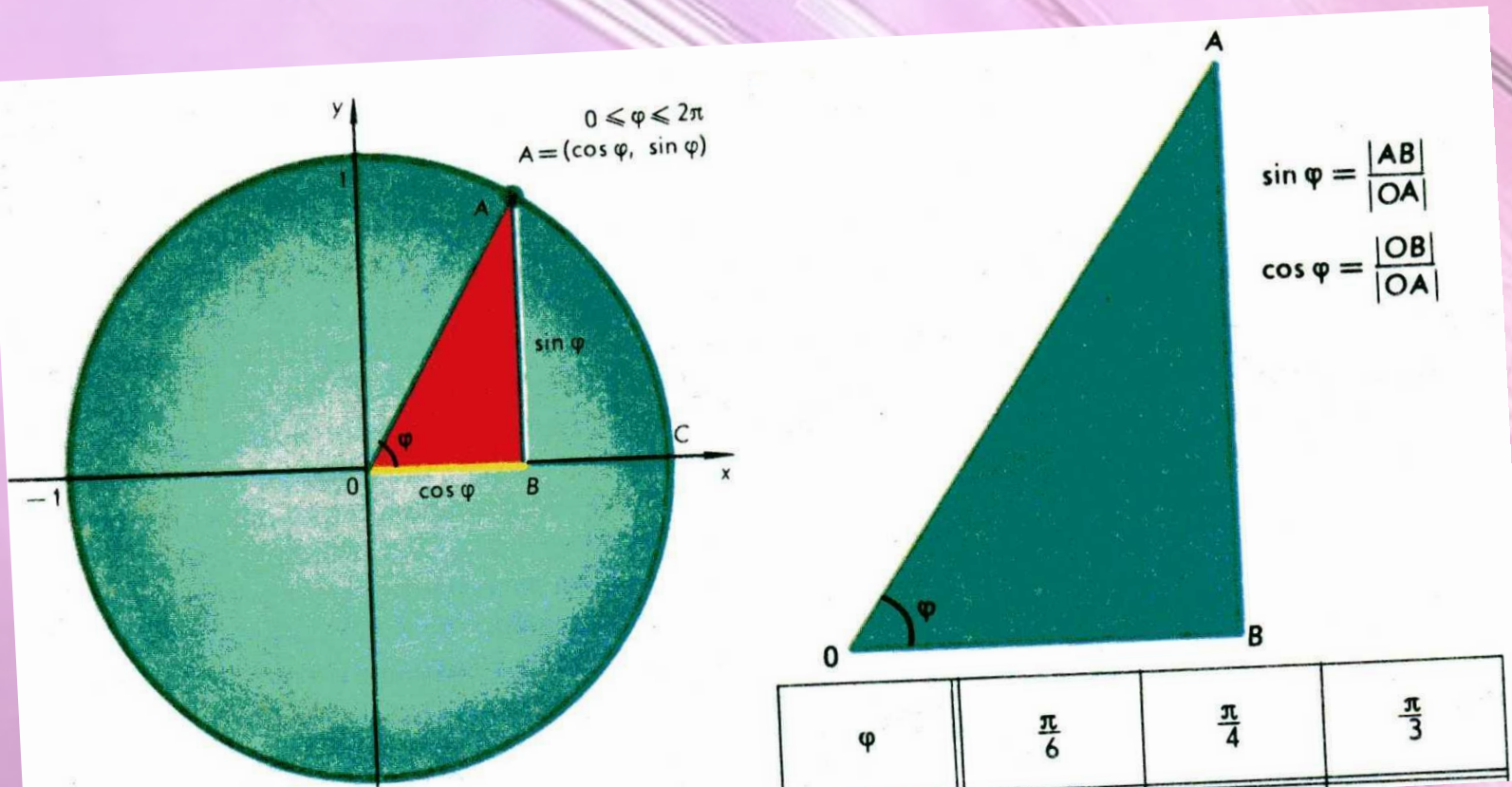
$$\begin{aligned}6\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha \cos^2(\pi - \alpha) &= 6\sqrt{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha = \\&= 3\sqrt{2} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 3\sqrt{2} \sin 2\alpha = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = 2\end{aligned}$$

# История возникновения тригонометрии

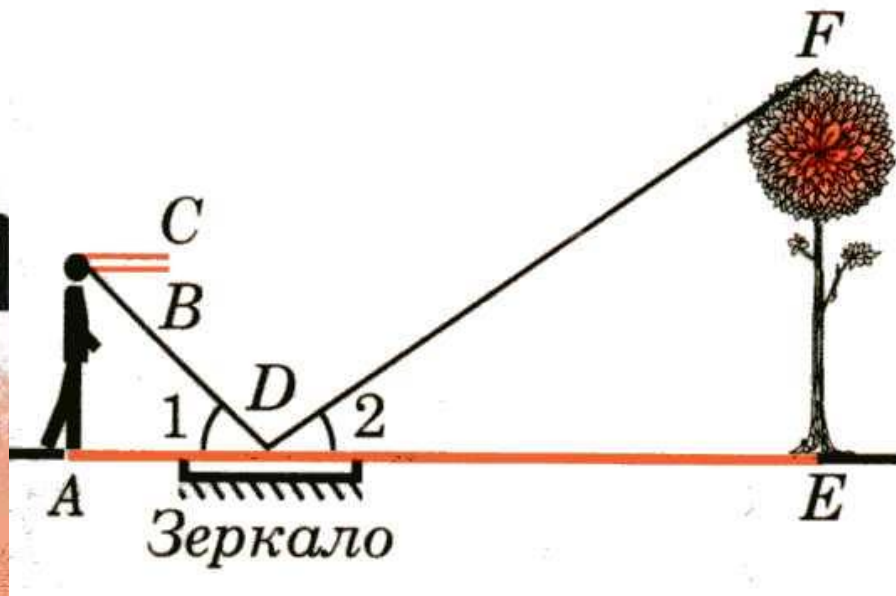
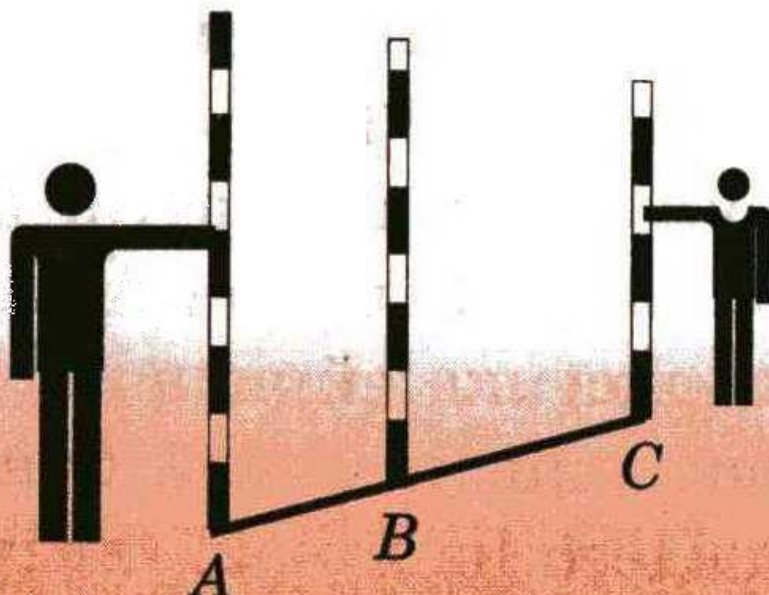
Презентацию подготовил ученик 10Б класса  
Царегородский Александр



- Тригонометрия - математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.
- Trigonon - «треугольник» и metreo - «измеряю».



- Тригонометрия возникла из практических нужд человека. С её помощью можно определять расстояние до недоступных предметов и существенно упрощать процесс геодезической съёмки местности для составления географических карт



# Возникновение



- Тригонометрические функции возникли в Древней Греции в связи с исследованиями в астрономии и геометрии.
- Отношения сторон в прямоугольном треугольнике встречались уже в III веке до нашей эры в работах Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского и др.

- Древнегреческий астроном Птолемей (II в.) вывел соотношения между хордами в круге, которые равносильны формулам:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$



- Также важный шаг в развитии тригонометрии был сделан индийскими учёными, которые заменили хорды синусами. Благодаря этому новшеству тригонометрия постепенно превратилась из раздела астрономии в самостоятельную математическую дисциплину. Помимо синуса были введены и другие тригонометрические функции, и для них были составлены таблицы.

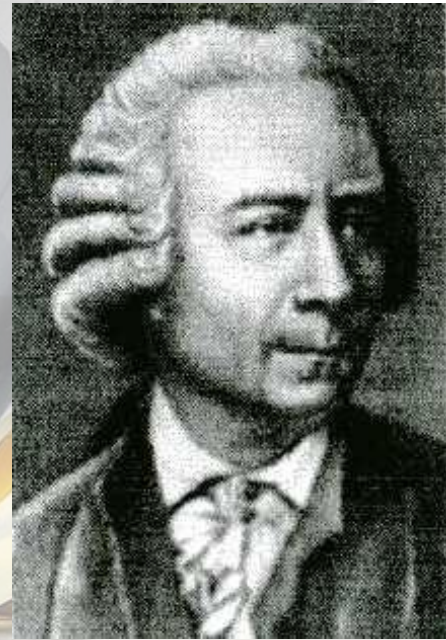


- Современную форму теории тригонометрических функций и вообще тригонометрии придал Л. Эйлер Он ввёл в математику привычные нам формулы тригонометрии на плоскости:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

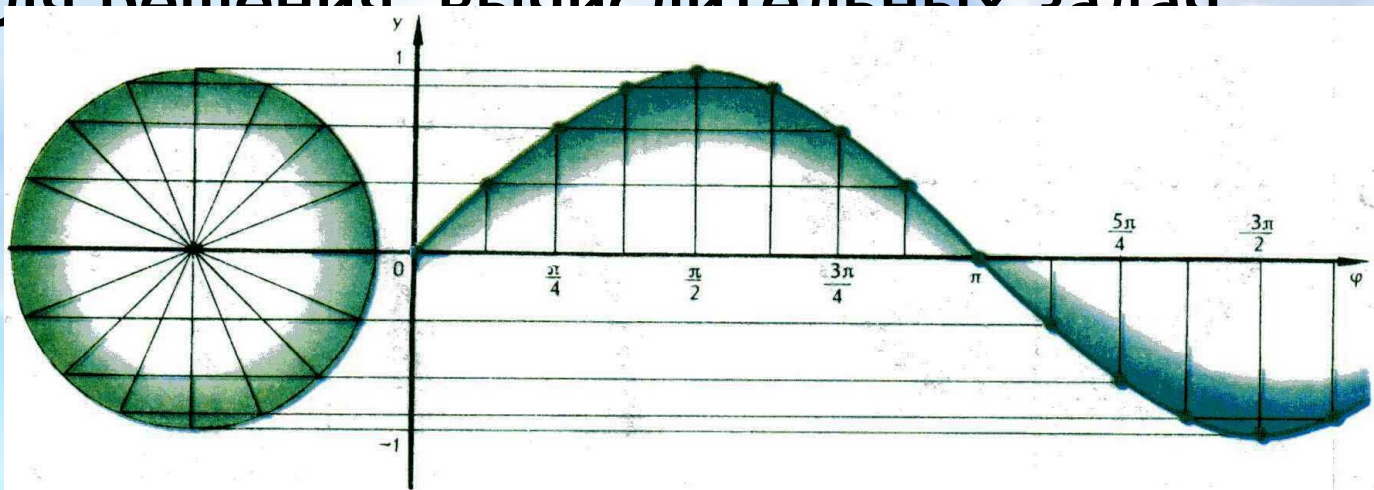
$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

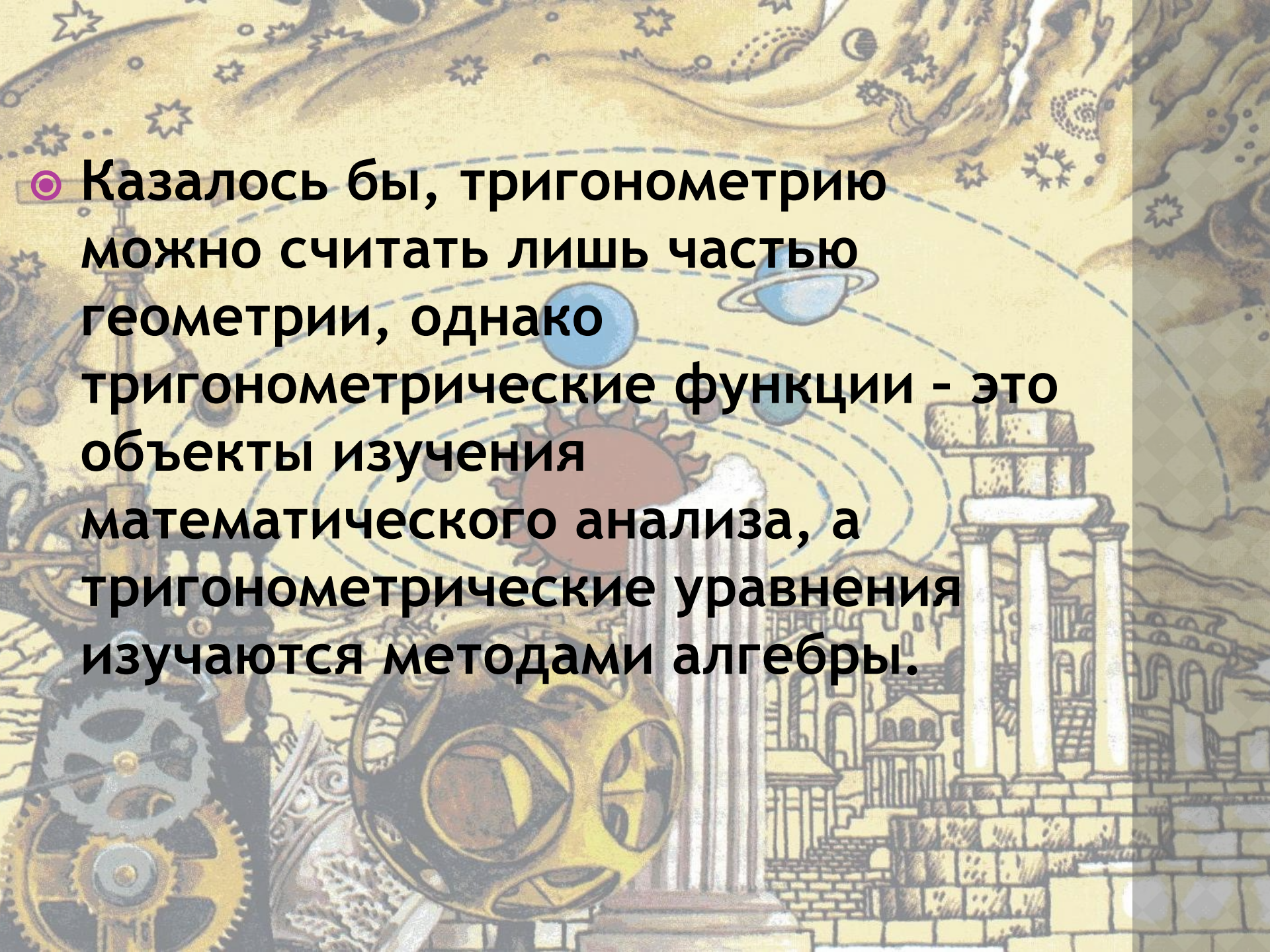
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



- Тригонометрию в средней школе изучают до сих пор по Эйлеру.

- **Общепринятые понятия тригонометрии, а также обозначения и определения тригонометрических функций сформировались в процессе долгого исторического развития. Благодаря введению новых понятий, а также в результате разработки и усовершенствования математической символики, тригонометрия приобрела совершенный вид, наиболее удобный для решения вычислительных задач.**





○ Казалось бы, тригонометрию можно считать лишь частью геометрии, однако тригонометрические функции - это объекты изучения математического анализа, а тригонометрические уравнения изучаются методами алгебры.



# Использованная литература

- Энциклопедический словарь юного математика/Сост. А.П.Савин.-М.: Педагогика, 1989.
- Интернет-ресурсы.

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Задание	Алгоритм решения	Базовые знания	Конкретные шаги решения
<p>Найдите наибольший отрицательный корень уравнения <math>\sin 3x \cos 5x - \cos 3x \sin 5x = 0,5</math></p>	<p>Применим формулу синуса разности.</p> <p>Воспользуемся формулой корней уравнения <math>\sin x = a</math>.</p>	<p><math>\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y</math></p> <p><math>x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,</math> <math>n \in \mathbb{Z}</math></p>	<p><math>\sin 3x \cos 5x - \cos 3x \sin 5x = 0,5</math></p> <p><math>\sin(3x - 5x) = 0,5</math> <math>\sin 2x = -0,5</math></p> <p><math>2x = (-1)^n(-\pi/6) + \pi n</math> <math>x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}</math> <math>n \in \mathbb{Z}</math></p> <p>При <math>n = 0</math> <math>x = -\frac{\pi}{12}</math></p> <p>Ответ: <math>-\frac{\pi}{12}</math></p>

## Задание

## Алгоритм решения

## Базовые знания

## Конкретные шаги решения

Найдите сумму наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корня уравнения  $\sin 2x \cos 2x = -0,5$

Умножим обе части уравнения на 2.

Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента.

Применим формулу корней уравнения  $\sin x = -1$ .

Найдём наибольший отрицательный корень и наименьший положительный корень уравнения.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x \cos 2x = -0,5$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = -1$$

$$\sin 4x = -1$$

$$4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При } n = 0 \quad x = -\frac{\pi}{8}$$

$$\text{При } n = 1 \quad x = \frac{3\pi}{8}$$

$$-\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4}$$

## Задание

## Алгоритм решения

## Базовые знания

## Конкретные шаги решения

Сколько корней уравнения  $\sin 2x + \sin 6x = 0$  принадлежат промежутку  $[-180^\circ; 180^\circ]$  ?

Применим формулу суммы синусов

Воспользуемся условием равенства произведения 0 и формулами корней уравнений  $\sin x = 0$ ;  $\cos x = 0$

Оценим корни уравнения

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$x = \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x \sin 6x &= 0 \\ 2 \sin 4x \cos 2x &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin 4x = 0 \quad \cos 2x = 0$$

$$\begin{cases} 4x = \pi n \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$$

$$x =$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi \leq \frac{\pi n}{4} \leq \pi$$

$$-4 \leq n \leq 4$$

Ответ: 9 корней.

## ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Пособие «Математика ЕГЭ - 2009, часть I»  
стр. 204, В - №3, задания 1,2,3,6 - уровень А,  
задания 1 - 8 - уровень В,  
задачник - № 27.56 а), 28.33 а) - уровень С.

«Три пути ведут к знанию:  
путь размышления - это путь самый  
благородный,  
путь подражания - это путь самый лёгкий,  
и путь опыта - это путь самый горький»  
Конфуций