Тема урока:
Введение в комбинаторику.

Цель урока:

1) понятие комбинаторных задач

2)основные методы решения комбинаторных задач

Автор: учитель математики
Богданова С.В.

Эпиграф урока:

«Число , место и комбинация – три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи».

Дж. Сильвестр

Что такое комбинаторика?

***Комбинаторика** – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.*

Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например конструктору, разрабатывающему новую модель механизма, ученому-агроному, **планирующему распределение с/х культур на нескольких полях, химику, изучающему строение органических молекул, имеющих данный атомный состав.**

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.

После первых работ, выполненных в 16в. Итальянскими учеными Дж.Кардано, Н.Тартальей и Г.Галилеем, такие задачи изучали французские математики Б.паскаль и П.Ферма. Первым рассмотрел комбинаторику как самостоятельная ветвь науки немецкий философ и математик Г.Лейбниц, опубликовавший в 1666г. Работу «Об искусстве комбинаторики». Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат Л.Эймеру.

Фигурные числа.

В древности для облегчения вычислений часто использовали камешки. При этом особое внимание уделялось числу камешков, которые можно было разложить в виде правильной фигуры. Так появились квадратные числа, сконструированы треугольные и пятиугольные числа.

Квадратное число находится по формуле:

Nкв.=п х п

Треугольное число находится по формуле:

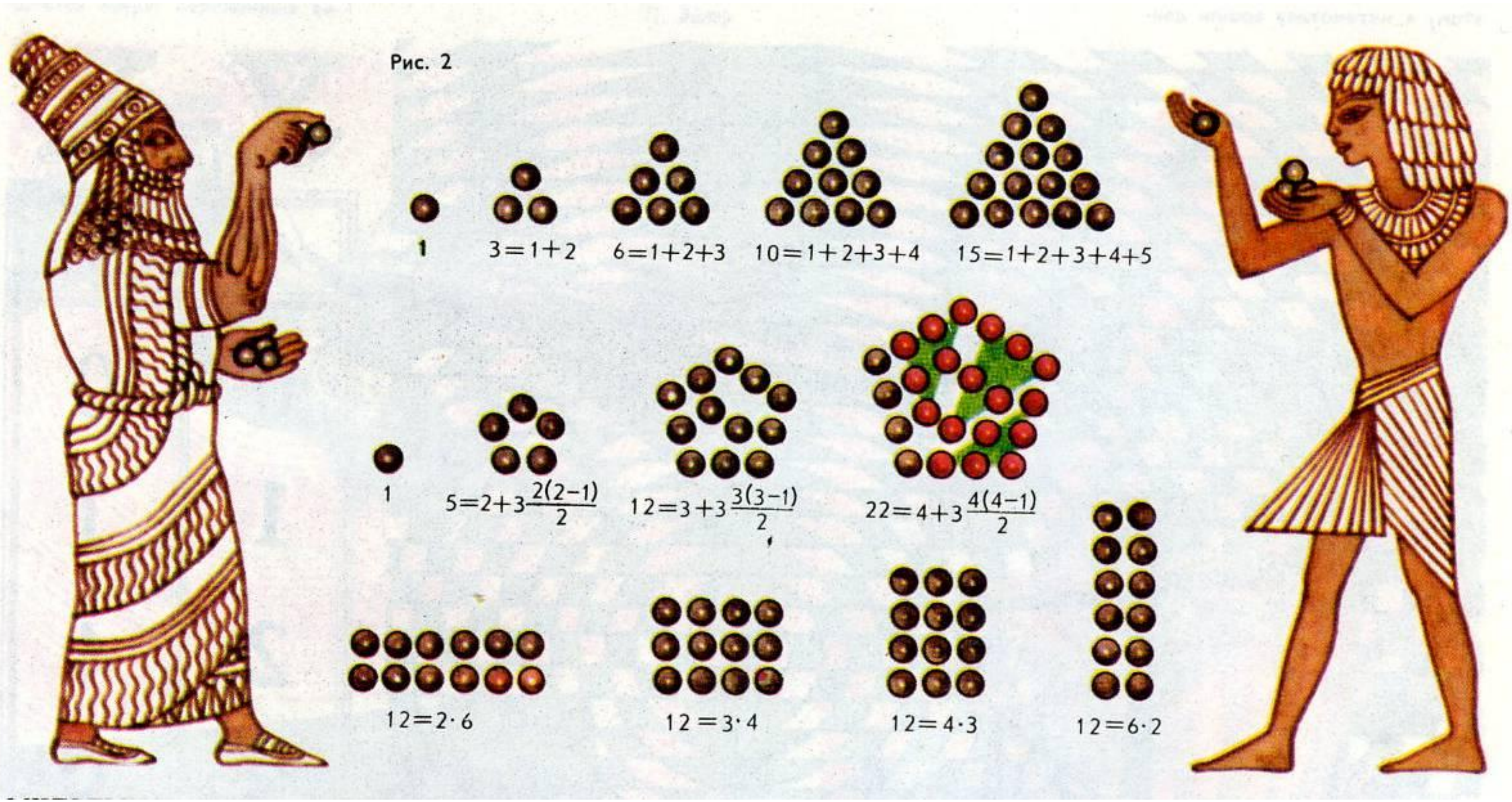
Nтр.=п(п-1):2

Пятиугольные числа находятся по формуле:

Nпят.=п+3п(п-1):2

Все составные числа древние математики представляли в виде прямоугольников.

Фигурные числа.



Квадратные числа

Магические и латинские квадраты.

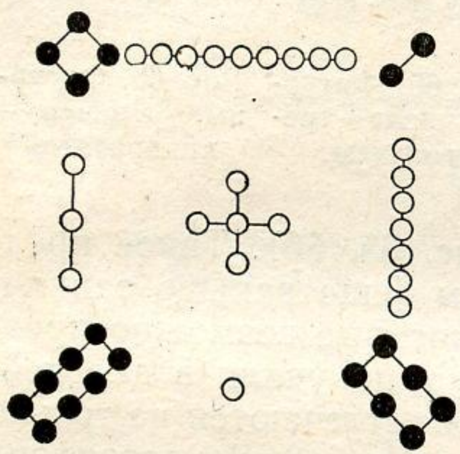
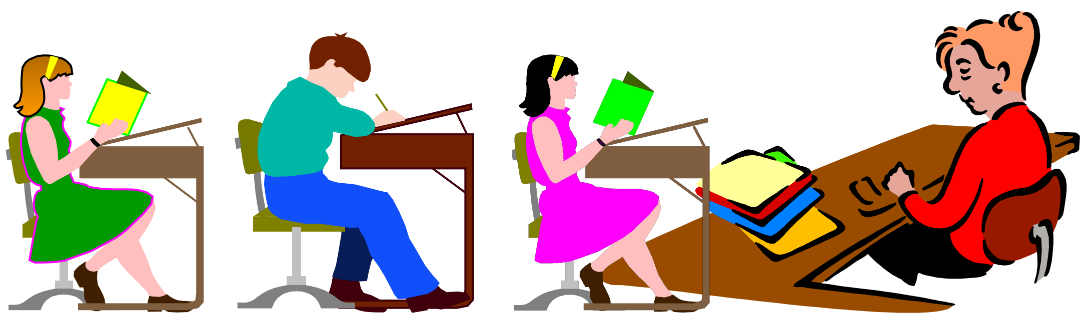


Рис. 69. Девятиклеточный старинный магический квадрат.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 71. Древнеиндийский магический квадрат.



Методы решения комбинаторных задач

- 1. Правило суммы.
- 2. Правило произведения
- 3. Таблицы.
- 4. Графы (деревья).
- 5. Формулы.

Правило суммы

- ***Если элемент А может быть выбран к1 способами, а элемент В – к2 способами, причем выборы А и В являются взаимно исключающими, то выбор «либо А, либо В» может быть осуществлен к1+к2 способами.***
- ***Задача 1. Сколько существует способов выбрать кратное двум или трем число из множества чисел : 2,3,4,15,16,20,21, 75,28 ?***
- ***Решение:*** к1=5 –кратное 2 (2,4,16,20,28),
- к2=4 – кратное 3 (3,15,21,75)
- к1+к2 = 5+4 = 9

Правило произведения

Если элемент А может быть выбран к1 способами, а элемент В – к2 способами, то выбор «А и В» может быть осуществлен к1хк2 способами

Задача2. а) ***Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9?***

Решение: N = 5х5 = 25 (Если не сказано, что элемент не повторяется, то выборка с повторениями)

б) Сколько среди них чисел, кратных 5?

Решение: Число кратно 5, если оканчивается цифрой 5 или 0. В нашем случае – 5.

На первой позиции фиксируем одну из пяти цифр, на второй – 5.

N= 5х1 =5

в) Сколько среди них чисел, кратных 11?

Решение: Двузначное число кратно 11, если обе его цифры одинаковы.

N= 5

г) Сколько среди них чисел, кратных 3?

Решение: Число кратно 3, если сумма его цифр делится на 3. Составим всевозможные пары:

1 -1 **3 -3** 5 – 5 7 – 7 **9 -9**
1 -3 3 -5 **5 – 7** 7 – 9
1 -5 3 -7 5 -9
1 -7 **3 – 9**
1 – 9

Таких пар 15. Среди них 5 пар, сумма которых делится на 3, причем три пары допускают перестановку, т.е. могут образовать по два разных числа. Всего 5+3=8 различных двузначных чисел.

Правило произведения

- *Задача 3*. ***Сколько существует способов занять 1-ое, 2-ое и 3-е места на чемпионате по футболу, в котором участвуют***
  а) 10 команд
- ***Решение:*** N=10x9x8=720
- ***б)*** 11 команд?
- ***Решение:*** N=11x10x9x8=990
- ***Задача 4.*** Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр **0, 1,2,3,4**, если
- ***а)*** цифры не повторяются?
- ***Решение:*** На первом месте одна из 4-х цифр (0 не может быть), на 2-ом – одна из оставшихся 4-х:
- N=4x4= 16
- ***б)*** цифры могут повторяться
- ***Решение***: На 1-ом месте может быть одна из 4-х цифр, на 2-ом – одна из 5 (0 входит):
- N=4x5= 20

Правило произведения

- *Задача 5*. ***Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде четырех горизонтальных полос, одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный, зеленый. У каждой страны свой, отличный от других, флаг.***
- ***а)***Сколько всего стран могут использовать такую символику?
- ***Решение***: Цвет верхней полосы можно выбрать одним из 4 способов, второй полосы – одним из трех оставшихся, цвет 3 полосы – одним из 2 оставшихся, а 4 – одним способом. По правилу произведения N=4x3x2x1=24
- ***б***) Сколько стран могут использовать такую символику с верхней белой полосой?
- ***Решение:*** Если фиксировать цвет белой полосы, то цвета следующих полос можно выбрать 3x2x1 = 6 способами.
- ***в***) Сколько всего стран могут использовать такую символику с нижней белой полосой?
- ***Решение***: Если фиксировать цвет нижней полосы, то цвета трех расположенных над ней полос можно выбрать 3x2x1 = 6 способами.
- ***г)*** Сколько стран могут использовать такую символику с синей и красной полосами, расположенными рядом?
- ***Решение***: Две полосы, всегда расположенные рядом, можно рассматривать как одну полосу, тогда полос останется 3, из них можно составить 3x2x1=6 разных флагов. Но две полосы (синюю и красную) можно «склеить» по-разному: синяя, а под ней красная, или красная, а под ней синяя. Поэтому общее количество вариантов по правилу суммы равно 6+6=12

Правило произведения

- *Задача 6*. В клетки квадратной таблицы 2х2 произвольно ставят крестики и нолики.
- ***а)*** Сколькими способами можно заполнить эту таблицу?
- ***Решение***: Для заполнения первой клетки есть 2 способа (крестик или нолик); для заполнения каждой последующей – тоже 2 способа; общее количество способов заполнить таблицу по правилу произведения равно 2х2х2х2=16.
- ***б)*** В скольких случаях в левой нижней клетке будет стоять крестик?
- ***Решение***: Если в левой нижней клетке фиксируем крестик, то остальные 3 клетки можно заполнить 2х2х2=8 различными способами.
- ***в)*** В скольких случаях в верхней левой и нижней правой будут разные значки?
- ***Решение***: Если в верхней клетке – крестик, а нижней – нолик, то остальные клетки можно заполнить 2х2=4 способами. Если в верхней клетке – нолик, в нижней – крестик, то еще 4 способа заполнения. Всего 4+4=8 способов.

Правило произведения

- *Задача 7*. ***Сколькими способами можно посадить шестерых школьников на скамейку так, чтобы Коля и Оля оказались рядом?***
- ***Решение***: Будем считать, что на скамейке 6 пустых мест. Посадить Колю можно шестью способами, после чего Олю посадить рядом с ним одним или двумя способами. Это зависит от того, куда мы посадили Колю – на крайнее место или нет.
- Пусть Коля сидит на краю. Место на краю можно выбрать 2 способами, после чего Олю можно посадить одним способом, после чего оставшиеся 4 места можно занять 4х3х2х1 способами, значит, всего 2х1х4х3х2х2=48 способов
- Коля сидит где-то в середине. Место для Коли можно выбрать 4 способами, Олю можно посадить 2 способами, значит, всего
- 4х2х4х3х2х1=192 способами.
- По правилу сложения 48+192= **240** способов.

Правило произведения

- Задача 8. ***Из цифр 1,2,3,5 составили все возможные четырехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких чисел, которые больше 2000, но меньше 5000?***
- ***Решение***: Выбор 1-ой цифры – 2 способа (3,4), 2-ой цифры – 3 способа, третьей – 2 способа, четвертой -1. По правилу произведения N=2x3x2x1=12 чисел.
- ***Задача 9. На входной двери дома установлен домофон, на котором нанесены цифры 0,1,2,…9.Каждая квартира получает кодовый замок из двух цифр типа 0-2, 3-7 и т.п. Хватит ли кодовых замков для всех квартир, если в доме 96 квартир? (код 0-0 не существует)***
- ***Решение:*** Выбор 1-й цифры – 10 вариантов, 2-й –10 вариантов.
- Всего 10x10 – 1 = 99 вариантов
- Ответ: хватит.

Правило произведения

- *Задача 10*. ***В контрольной работе будет 5 задач – по одной из каждой пройденной темы. Задачи будут взяты из общего списка по 10 задач в каждой теме, а всего было пройдено 5 тем. При подготовке к контрольной работе Вова решил только по 8 задач в каждой теме. Найдите:***
- ***а) общее число всех возможных вариантов контрольной работы***
- ***Решение***: Каждая задача может быть выбрана 10 способами. По правилу произведения N=10х10х10х10х10=**100000**
- ***б)число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все 5 задач***
- ***Решение***: N=8х8х8х8х8=**32768**
- ***в) число тех вариантов, в которых Вова не сможет решить ни одной задачи***
- ***Решение***: N=2х2х2х2х2=**32**
- ***г) число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все задачи, кроме первой.***
- ***Решение***: N=2х8х8х8х8=**8192**

Правило произведения

- *Задача 11.* ***Три вершины правильного 10-угольника покрасили в рыжий цвет, а остальные – в черный. Сколько можно провести отрезков с разноцветными концами?***
- ***Решение:*** Первую рыжую вершину можно соединить отрезком с любой из 10 – 3 = 7 черных вершин, после этого вторую рыжую вершину можно соединить отрезком с любой из 6 оставшихся черных вершин, а третью рыжую – с любой из 5 оставшихся черных вершин. Общее число вариантов (отрезков с разноцветными концами) по правилу произведения равно:
- 7x6x5=**210**
- *Задача 12*. ***Сколько ребер имеет полный граф (каждая вершина соединена с каждой), если количество его вершин 12?***
- ***Решение***: Первую вершину можно выбрать из 12, вторую – из 11; всего 12x11=132 пары. Но они учитывают порядок выбора (каждая пара входит дважды). Поэтому количество ребер равно 12x11:2=**66**

Таблицы вариантов

- *Задача 13*. ***Составляя расписание уроков на понедельник для 7а класса, завуч хочет первым уроком поставить либо физику, либо алгебру, а вторым – либо русский язык, либо литературу, либо историю. Сколько существует вариантов составления расписания на первые два урока?***
- ***Решение:*** Составим таблицу вариантов:
- Всего существует 2х3 = 6 вариантов

2 урок / **1 урок**	русский	литература	история
физика	Физика русский	Физика литература	Физика история
алгебра	Алгебра русский	Алгебра литература	Алгебра история

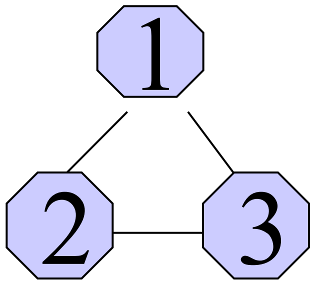
Таблицы вариантов

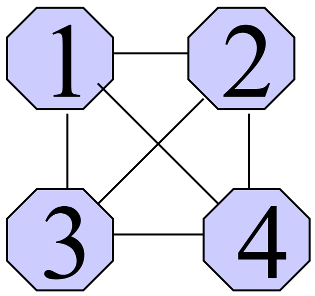
- *Задача 14.* ***Сколько двузначных чисел, кратных 3, можно получить из цифр 1,3,5,7,9?***
- ***а) цифры не повторяются -***
- 6 вариантов (15,39,57,51,75,93)
- ***б) цифры могут повторяться*** – 8 вариантов (еще 33,99)

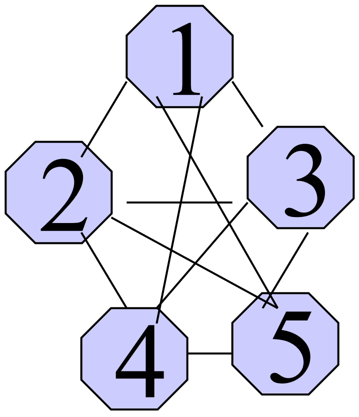
1 / 2	1	3	5	7	9
1	1 - 1	1-3	1-5	1-7	1-9
3	3-1	3-3	3-5	3-7	3-9
5	5-1	5-3	5-5	5-7	5-9
7	7-1	7-3	7-5	7-7	7-9
9	9-1	9-3	9-5	9-7	9-9

Подсчет вариантов с помощью графов

- *Задача 15*. ***При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько было рукопожатий, если друзей:***
- **а) трое б) четверо в) пятеро**
- N=3 N=6 N=10



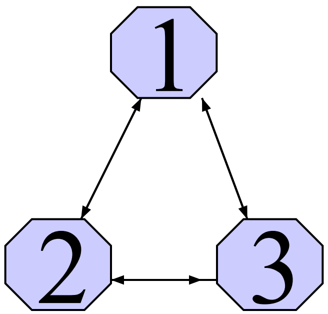


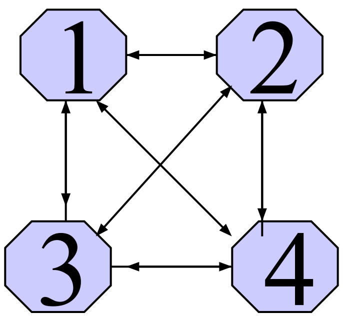


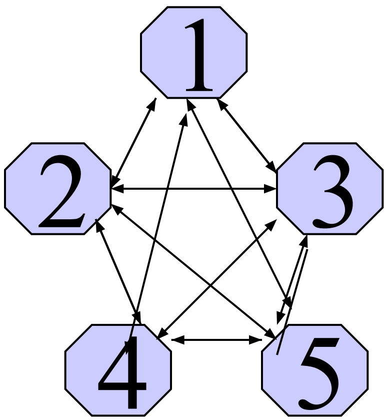
Построение графов

Задача 16. ***По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали:***

А) 3 человека ***б) 4 человека*** ***в) 5 человек***





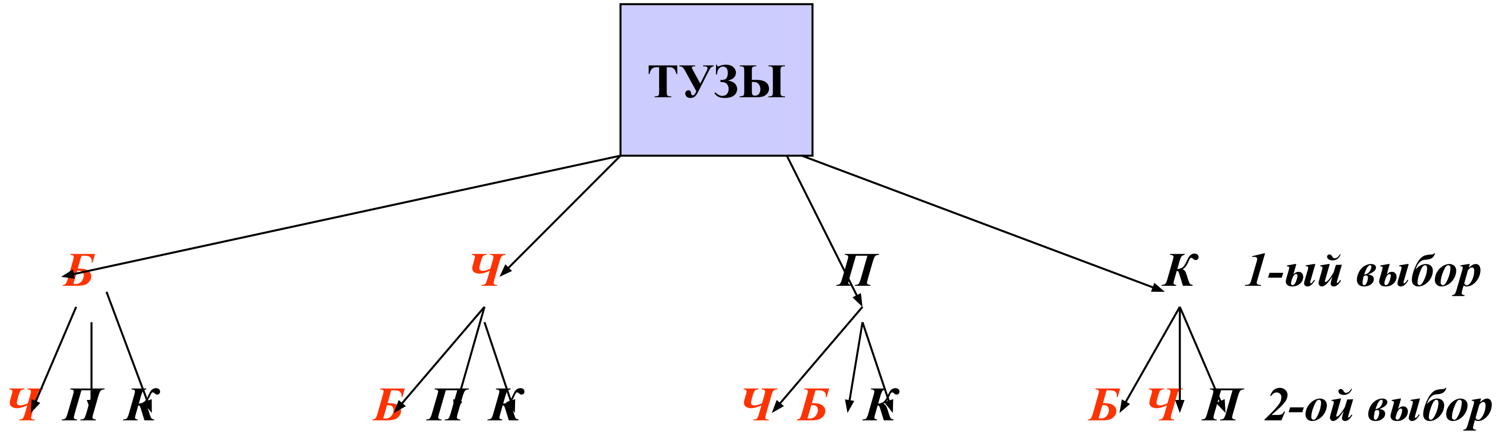


3 ребра, 6 стрелок ***6 ребер, 12 стрелок*** ***10 ребер, 20 стрелок***

N=6 ***N=12*** ***N=20***

Граф-дерево

- *Задача 17*. **Из 4-х тузов поочередно выбирают два.**
- ***А) Нарисуйте дерево возможных вариантов (12 вариантов)***
- ***Б) В скольких случаях среди выбранных будет бубновый туз? (6)***
- ***В) В скольких случаях вторым выбранным будет туз пик? (3)***
- ***Г) В скольких случаях тузы будут разного цвета? (8)***



Граф-дерево

- *Задача 18*. ***Маше на день рождения подарили 3 букета цветов: из роз (р), астр (а) и гвоздик (г). В доме было 2 вазы: хрустальная (х) и керамическая (к). Маша пробовала устанавливать каждый букет в каждую вазу. Перечислить все полученные сочетания букета с вазой.***

Исходы: **к-г, к-а, к-р, х-г, х-а, х-а** – всего 6 вариантов

Виды выборок

- Перестановки
- Размещения
- Сочетания

без повторений

- Размещения с повторениями (строки)
- Перестановки с повторениями
- Сочетания с повторениями

условные объекты

- Разбиения
- Подмножества

частные случаи размещений и перестановок с повторениями

Формулы комбинаторики

Факториал числа

Произведение ***n*** первых натуральных чисел называется факториал числа ***n*** и обозначается ***n!***

$5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120;$

$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$

Перестановка без повторений.

Даны цифр: 1,2,3,4,5,6,7. Сколько различных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1234567, 2354167, 7546321.

Перестановка-упорядоченное множество.

Число перестановок из ***n*** элементов вычисляют по формуле $P_n=n!$.

По условию $n=7$

Так из 7 цифр можно $7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$ различных чисел.

Перестановка с повторениями.

Даны цифр: 1,2,2,3,3,3,4,. Сколько различных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1223334, 4232331,2233314.

Некоторые числа при перестановке одинаковых цифр не меняется. Число таких перестановок вычисляется по формуле

$P_n=n!/(n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!)$.

По условию $n=7$, $n_1=2$, $n_2=3$

Получаем $7!/(2!\cdot3!)=5040/12=420$ различных чисел.

Формулы комбинаторики.

Сочетание.

Имеется 7 цветных карандашей. Выбирается 3 карандаша. Сколько существует способов выбрать 3 карандаша, чтобы не было повторяющихся наборов? Выборка из трёх карандашей – это сочетание из 7-ми по 3 элемента в каждом.

Сочетание-неупорядоченная выборка из данного множества элементов.

Число сочетаний из n элементов по m в каждом находим по формуле: $\boldsymbol{C_n = n!/(m! \cdot (n-m)!)}$.

Пример. В классе обучается 20 человек. Сколько существует способов выбрать актив, состоящий из 4 человек?

Решение. Находим число сочетаний из 20 элементов по 4 в каждом: $20!/(4! \cdot 16!)=17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20/24=4845$ способов выбрать актив.

Размещение.

Буквы алфавита записаны на карточках. Выбирается 4 карточки и затем из набора составляют различные слова. Под словом будем понимать порядок следования букв. Например:

плот, лотп, ллот- разные слова. Каждое полученное слово-это размещение.

Размещение –упорядоченная выборка из данного множества элементов.

Число размещений из n элементов по m в каждом находим по формуле: $\boldsymbol{A_n = n!/(n-m)!}$.

Сколько слов можно получить в предложенной задаче? По формуле получаем решение $32!/(32-4)!=32!/28!=29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32=863040$ слов можно получить.