Уравнения

Иррациональные

Логарифмические

Показательные

Иррациональные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня, называется *иррациональным уравнением*.

Решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком корня, основано на следующих основных теоремах:

$$f(x)=g(x)$$
$$f^2(x)=g^2(x)$$

$$\sqrt{f(x)}=g(x)$$
$$\begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

$$f(x)=g(x)$$
$$f^3(x)=g^3(x)$$
$$X\in R$$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$$
$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

Если уравнение без нахождения ООУ

Необходима проверка!

Примеры:

$$1).\sqrt{2x+5}=x-1$$

$$2).\sqrt{2x^2-x-6}=\sqrt{x-1}$$

$$3^*).\sqrt[3]{x^2-x+6}=x$$

$$4^*).\sqrt{x+5-\sqrt{x+3}}-\sqrt{\sqrt{x+3}+x-2}=1$$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- <u>Показательными уравнениями</u>,

называется уравнение вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

а - положительное число, а $\neq 1$

- Решение уравнений, содержащих неизвестное в показатели степени, основано на следующей теореме

$$\left[\begin{array}{l} a^{f(x)} = a^{f(x)} \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{array}\right. \qquad f(x) = g(x)$$

- ***<u>Основные методы</u>:***

а) *Метод введение новой переменной*

б) Метод разложения на множители

в) Если левая и правая части уравнения - произведения, положительные на области определения уравнения, то логарифмируем обе части уравнения по любому удобному основанию.

Примеры:

$$1)\ 2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$$

$$2)\ 2^{2-x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - \frac{1}{2^{x+2}} + \sqrt{\frac{1}{4^{x-1}}} = 84$$

$$3)\ 12 \cdot 4^{x} - 35 \cdot 6^{x} + 18 \cdot 9^{x} = 0$$

$$4)\ (\sqrt{11})^{x} \cdot \frac{1}{121} = 11^{1-\frac{x^2}{2}}$$

$$5).\ 3^{x} = 4^{x-2} \cdot 2^{x}$$

Логарифмические уравнения

- **Решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком логарифма, основано на следующих теоремах:**

$$\log_a f(x) = g(x)$$

$$f(x) = a^{g(x)}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_a (f(x))^{2n} = g(x)$$

$$2n \cdot \log_a |f(x)| = g(x)$$

ПРИМЕРЫ:

$$1)\ \log_3(4x-1)=2-\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x+1}$$

$$2)\ \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2^{x+2}-4^x)=-4$$

$$3)\ 2\cdot\log_2 x+5=3\cdot\log_x 2$$

$$4)\ \log_{9x^2}(6+2x-x^2)=\frac{1}{2}$$

$$5)\ x^{\lg x-3}=0{,}01$$

Проверь себя

$$\sqrt{x+5-\sqrt{x+3}}-\sqrt{\sqrt{x+3}+x-2}=1$$

Пусть $\sqrt{x+3}=t\geq 0$

$t^2=x+3$

$x=t^2-3$

Подставим вместо x выражение t^2-3 в исходное уравнение получаем :

$$\left(\sqrt{t^2-3+5-t}\right)^2=\left(1+\sqrt{t+t^2-3-2}\right)^2$$

$$t^2-t+2=1+2\sqrt{t+t^2-5}+t^2+t-5$$

$$-2t+6=2\sqrt{t^2+t-5}$$

$$3-t=\sqrt{t^2+t-5}$$

$$\begin{cases}9-6t+t^2=t^2+t-5\\0\leq t\leq 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}t=2\\0\leq t\leq 3\end{cases}$$

$$\sqrt{x+3}=2$$

$$x+3=4$$

$$x=1$$

Ответ 1

$$\sqrt[3]{x^2 - x + 6} = x \qquad x \in R$$

$$x^2 - x + 6 = x^3$$

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$$

$$P_3(1) = 1 - 1 + 1 - 6 = -5$$

$$P_3(-1) = -1 - 1 - 1 - 6 = -9$$

$$P_3(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x - 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - 2x^2} & x^2 + x + 3 \\ -\;x^2 + x & \\ \underline{x^2 - 2x} & \\ -\;3x - 6 & \\ \underline{3x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 3) = 0$$

$(x - 2) = 0$ $\qquad\qquad$ $(x^2 + x + 3) = 0$

$x = 2$ $\qquad\qquad$ Д ⊠ 0 корней нет

Ответ 2

Проверь себя

$12\cdot 4^x - 35\cdot 6^x + 18\cdot 9^x = 0$

Функция $y = 9^x$ положительна при любых действительных значениях x,

поэтому разделим обе части уравнения на 9^x.

$$12\cdot\frac{4^x}{9^x} - 35\cdot\frac{6^x}{9^x} + 18 = 0$$

$$12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 35\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 18 = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t$$

$$12\cdot t^2 - 35\cdot t + 18 = 0$$

$$D = 361$$

$t_1 = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $t_2 = \frac{9}{4}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{9}{4}$

$x = 1$ $\qquad$ $x = -2$

Ответ 1; - 2

Проверь себя

$$3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$$

$$\log_2\left(3^x\right) = \log_2\left(4^{x-2} \cdot 2^x\right)$$

$$x \cdot \log_2 3 = (x-2)\log_2 4 + x\log_2 2$$

$$x \cdot \log_2 3 = 2x - 4 + x$$

$$x \cdot \log_2 3 - 3x = -4$$

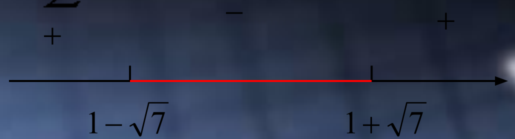
$$x(\log_2 3 - 3) = -4$$

$$x = \frac{-4}{\log_2 3 - 3}$$

Ответ $\dfrac{-4}{\log_2 3 - 3}$

Проверь себя

$$\log_{9x^2}\left(6+2x-x^2\right)=\frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} 6+2x-x^2 > 0 \\ 9x^2 \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{9x^2} = 6+2x-x^2$$

$$\left|3x\right| = 6+2x-x^2$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = 6+2x-x^2 \\ 3x = -6-2x+x^2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -3 \text{ не удовл.} \\ x = 2 \\ x = 6 \text{ не удовл.} \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Ответ $-1; 2$

Проверь себя

$x^{\lg x-3}=0{,}01$

Прологарифмируем обе части уравнение по основанию 10

$x > 0 \ (*)$

$x \neq 1$

$\lg x^{\lg x-3}=\lg 0{,}01$

$(\lg x-3)\cdot \lg x=-2$

$\lg x=t$

$(t-3)\cdot t=-2$

$t^2-3t+2=0$

$t=2 \qquad \mathrm{t}=1$

$\mathrm{lgx}=2 \qquad \mathrm{lgx}=1$

$\mathrm{x}=100 \qquad \mathrm{x}=10$

Ответ $\quad 10;100$