

Фильтры, АЧХ которых равна единице на всех частотах, называются:

- a) Фазовыми
- b) Все пропускающими
- c) Рекурсивными
- d) Нерекурсивными
- e) Адаптивными

Преобразования

Оконное преобразование Фурье.

Области применения и ограничения оконного преобразования Фурье.

Вейвлет-преобразования:

Масштабирующие функции. Ортогональное, непрерывное и дискретное вейвлет-преобразование.

Преобразования

- Пусть $f(t)$ – сигнал непрерывного времени. Тогда его преобразование в общем виде можно представить:

$$f(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(u)} du = F(v),$$

где $g(u)$ – анализирующая функция, а т.к. в общем случае она может быть комплекснозначной, то черта над ней – обозначение комплексного сопряжения.

Функция $F(v)$ – преобразование сигнала $f(t)$ (или преобразованный сигнал).

Преобразование Фурье

В случае если параметром анализирующей функции является циклическая частота сигнала ω , а анализирующая функция имеет вид $\exp(-i\omega t)$, преобразование является преобразованием Фурье, и преобразованный сигнал зависит от ω :

$$F(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа позволяет расширить приложение Фурье-преобразования, в частности, в область анализа и синтеза систем обработки данных, в том числе с использованием вейвлетов.

Любая функция представима в виде интеграла Фурье, если только она абсолютно интегрируема.

Абсолютно интегрируемая функция должна быть затухающей, т. е. $f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Однако, для целого ряда важных в теории анализа и, особенно, теории систем, функций это условие не выполняется, в частности, для функций типа единичного скачка или незатухающих гармонических колебаний. Чтобы сделать в этих случаях преобразование Фурье возможным, умножают незатухающую функцию на экспоненту $\exp(-\sigma t)$, выбрав $\sigma > 0$ таким, чтобы уже функция $f_0(t) = f(t)\exp(-\sigma t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда условие абсолютной сходимости выполняется для функции $f(t)\exp(-\sigma t)$:

при некоторых постоянных

$\sigma_{\min} < \sigma < \sigma_{\max}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

В этом случае для функции $f(t)$, "взвешенной" экспонентой $e^{-\sigma t}$, справедливы прямое и обратное преобразования Фурье.

Если ввести новые обозначения, $s = \sigma + j\omega$, то после некоторых математических преобразований получим

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) \cdot e^{st} ds$$

Т.е. прямое и обратное преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа – это Фурье-преобразование

функции $f(t)e^{-\sigma t}$, где экспоненциальный вес функций $e^{-\sigma t}$ "улучшает" функцию $f(t)$ таким образом, чтобы преобразование Фурье стало возможным. При этом интеграл $F(s)$ может сходиться не при всех значениях s .

Свойства преобразования Лапласа аналогичны свойствам преобразования Фурье.

Преобразование Лапласа позволяет значительно облегчить решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые описывают класс линейных систем.

Лапласов образ выхода линейной системы связан с Лапласовым образом входа $F(s)$ соотношением:

$$Y(s) = H(s)F(s) \quad \text{где} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot s^k}$$

носит название передаточной функции системы.

Передаточная функция характеризует конструктивные особенности системы и поэтому, как правило, известна уже на этапе проектирования.

Z -преобразование – обобщение дискретного во времени преобразования Фурье.

Оно эффективно применяется для решения разностных уравнений и исследования дискретных систем, в частности, цифровых фильтров.

Ряд

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n}$$

сходится только тогда, когда последовательность $f[n]$ абсолютно суммируемая. Однако часто это не так, поэтому, чтобы расширить класс дискретных функций, представимых рядами, $f[n]$ умножают на степенную функцию r^{-n} ($r > 0$) такую, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]r^{-n} < \infty$$

где r – модуль некоторой новой комплексной переменной

$$z = r \cdot e^{-j \cdot \arg(z)}$$

Z-преобразование может быть представлено в виде:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \cdot z^{-n}$$

Свойства z -преобразования аналогичны свойствам преобразования Фурье.

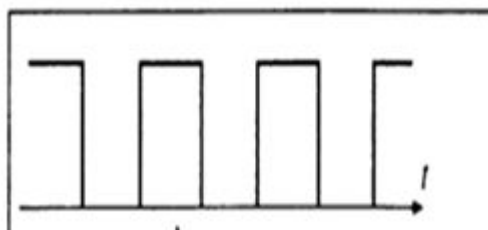
Применение z -преобразований значительно облегчает решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, которыми описывается целый класс дискретных систем. Оно позволяет ввести понятие передаточной функции дискретной системы, анализ которой дает возможность судить о ее свойствах, вводить корректирующие элементы для изменения характеристик системы.

Преобразование Фурье обладает рядом замечательных свойств, например:

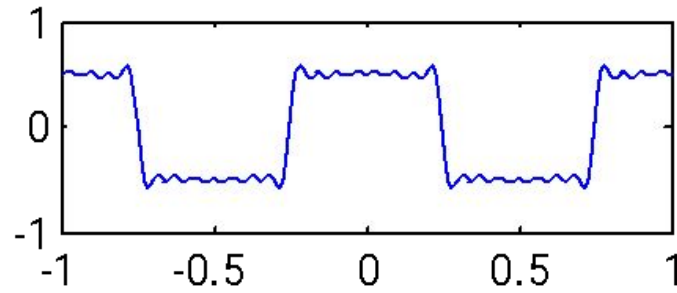
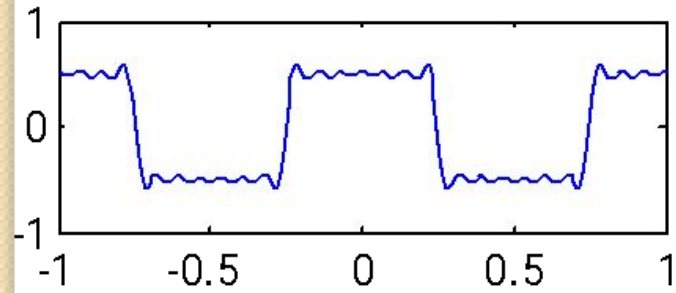
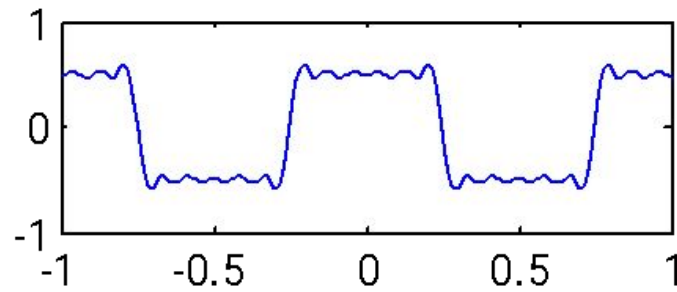
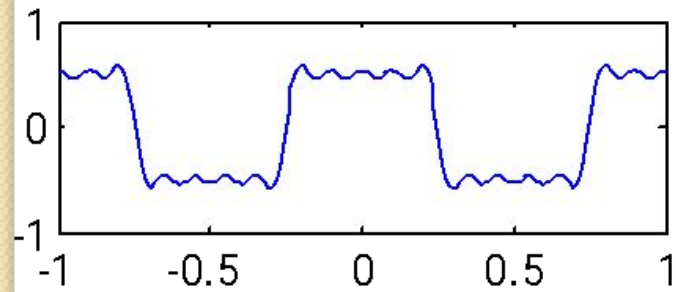
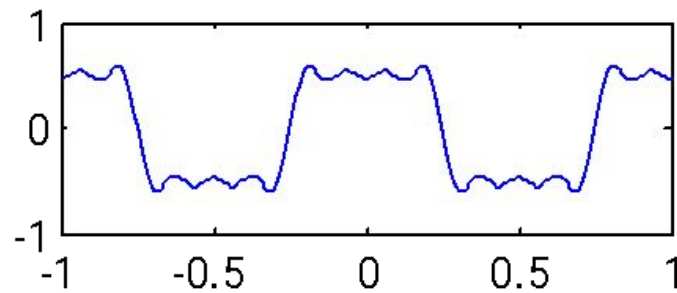
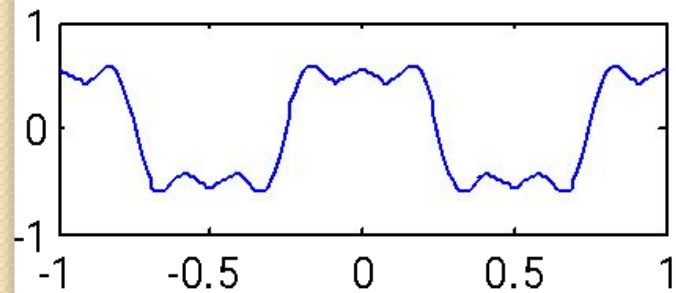
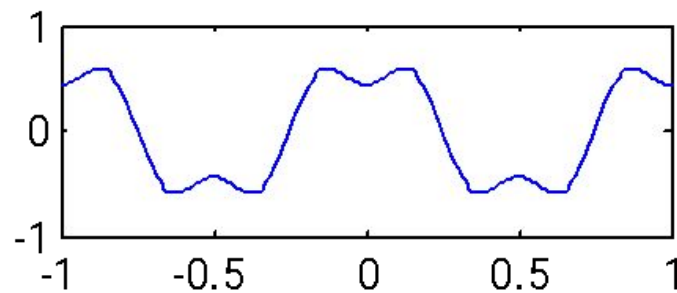
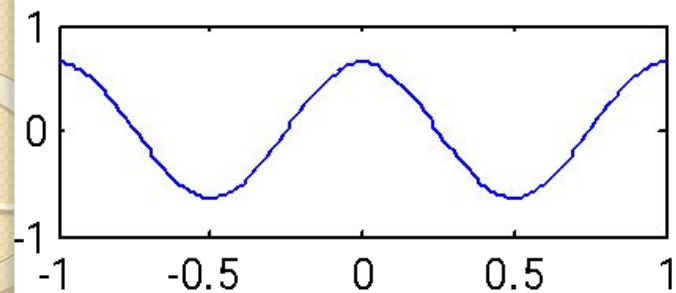
- Областью определения преобразования является пространство $L^2(\mathbb{R})$ интегрируемых с квадратом функций (в частности, гармонических), а многие физические процессы в природе можно считать функциями, принадлежащими этому пространству.
- Для применения преобразования разработаны эффективные вычислительные процедуры типа быстрого преобразования Фурье (БПФ). Эти процедуры входят в состав всех пакетов прикладных математических программ и реализованы аппаратно в процессорах обработки сигналов.

Основные недостатки преобразования Фурье:

- Ограниченная информативность анализа нестационарных сигналов и практически полное отсутствие возможностей анализа их особенностей (сингулярностей), т.к. в частотной области происходит «размазывание» особенностей сигналов (разрывов, ступенек, пиков и т.п.) по всему частотному диапазону спектра.
- Гармонические базисные функции разложения не способны отображать перепады сигналов с бесконечной крутизной типа прямоугольных импульсов, т.к. для этого требуется бесконечно большое число членов ряда.



Пример: Последовательность прямоугольных импульсов



- При ограничении же числа членов ряда Фурье в окрестностях скачков и разрывов при восстановлении сигнала возникают осцилляции (явление Гиббса).
- Преобразование Фурье отображает глобальные сведения о частотах исследуемого сигнала и не дает представления о локальных свойствах сигнала при быстрых временных изменениях его спектрального состава.

Преобразование Фурье не имеет возможности анализировать частотные характеристики сигнала в произвольные моменты времени.

В практике обработки информации чаще всего приходится иметь дело с *нестационарными процессами*, в которых информативным является сам факт *изменения частотно-временных характеристик сигнала*.

Например, спутниковые изображения Земли, рентгенограммы внутренних органов, речь, музыка, турбулентные поля различной природы и пр.

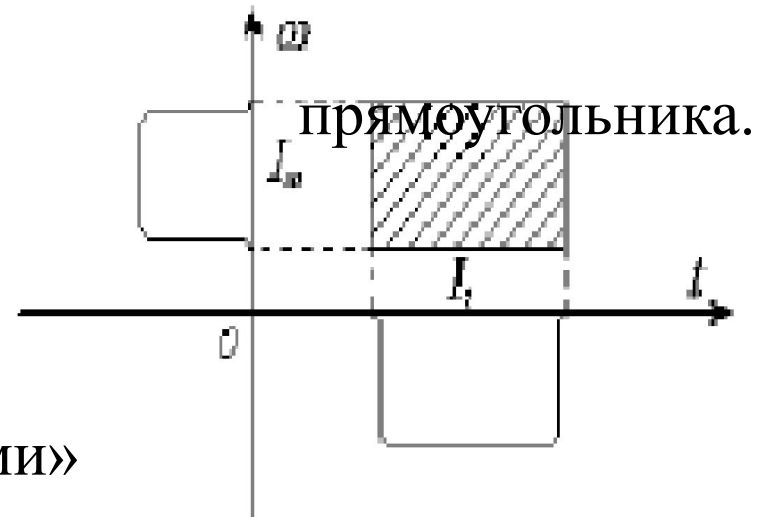
Для выполнения такого анализа требуются базисные функции, обладающие способностью выявлять в анализируемом сигнале как его частотные, так и временные характеристики, т.е. обладающие свойствами частотно - временной локализации.

Плоскость частота-время

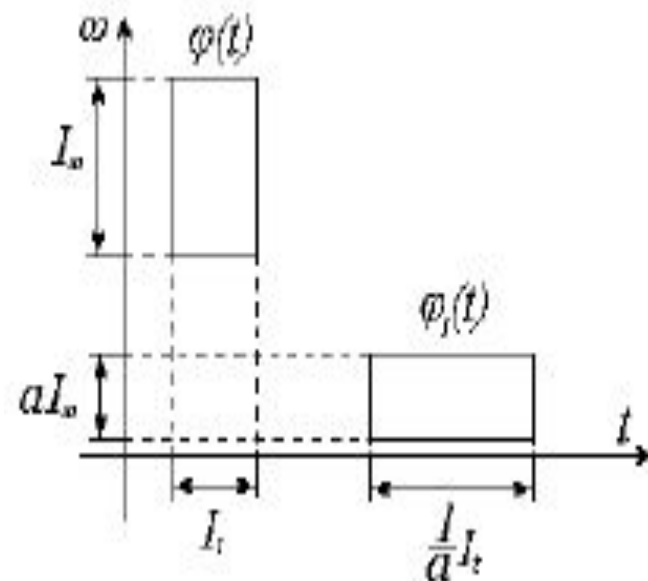
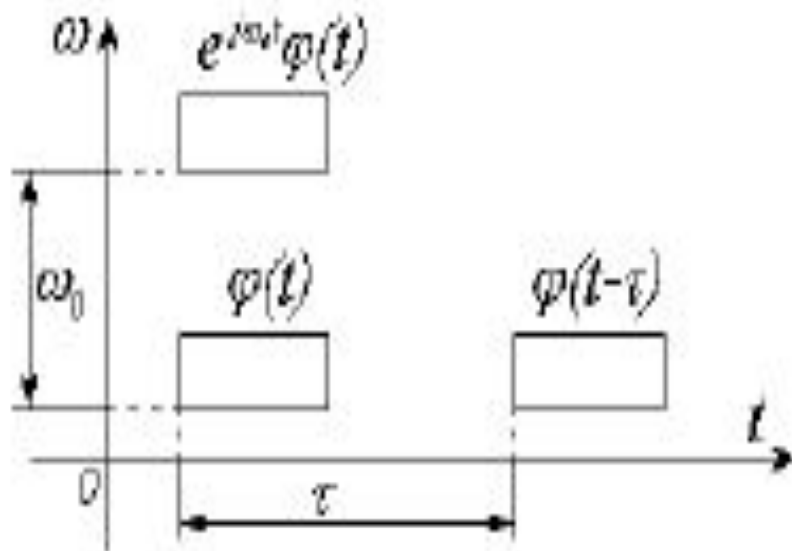
Для анализа и сравнения частотно-временных локализационных свойств различных базисов используют плоскость «частота-время». Любая функция $\phi(t)$ может характеризоваться интервалом I_t на временной оси и интервалом I_ω в Фурье области, в которых содержится 90% ее энергии, сосредоточенной около центра тяжести функции. Тогда в этой

плоскости функцию $\phi(t)$ можно изобразить в виде

Локализованные по времени и частоте функции называют «частотно-временными атомами»

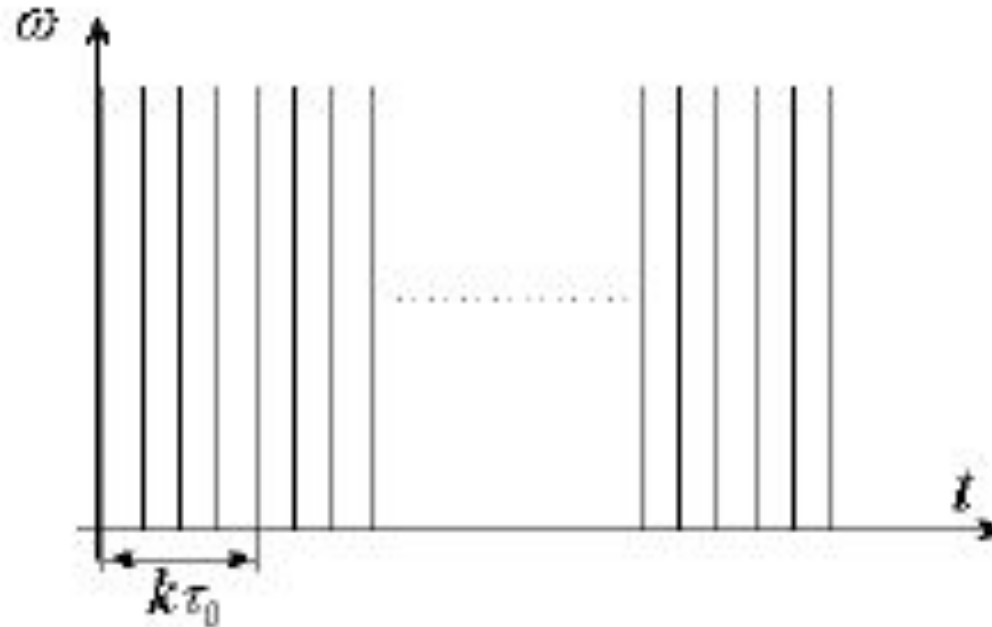


Смещение функции на τ от исходного состояния вызовет перемещение прямоугольника параллельно оси t .
 Модуляция этой функции комплексной экспонентой $j\omega_0 t$ сдвигает прямоугольник параллельно оси ω .
 Масштабирование функции (ее сжатие или растяжение) приводит к развороту прямоугольника.

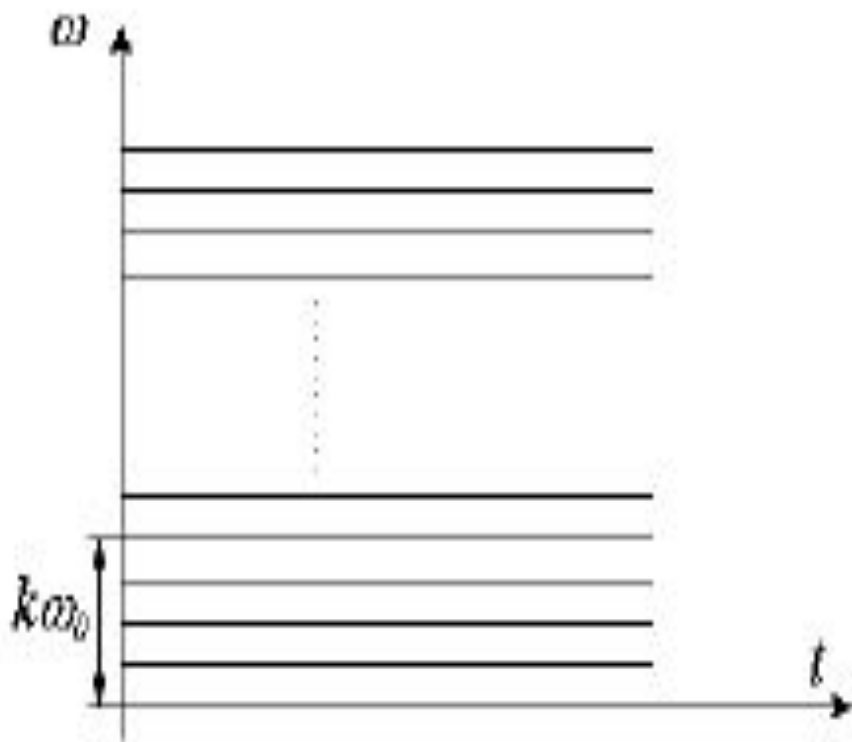


Рассмотрим δ -функцию Дирака и Фурье-базис.

δ -Функция является идеальным базисом для временного анализа сигналов. Результатом такого анализа являются отсчеты, которые можно рассматривать как временной спектр сигнала. На плоскости время-частота δ -функция $\delta(t - k\tau_0)$ выглядит как показано на рисунке:



Базисные функции $\exp(j\omega t)$ Фурье-анализа, наоборот, обладают хорошей частотной локализацией, в то время как во временной области они имеют бесконечную протяженность:



Ограниченное во времени Фурье-преобразование

Локальность преобразования Фурье достигается путем ограничения анализируемого сигнала с помощью движущегося окна. Результатом такого анализа будет функция двух переменных – положения окна τ и частоты ω :

- $$F(\omega, \tau) = \int f(t) w(t-\tau) e^{-i\omega t} dt$$

Спектральный анализ в окне данных производится вычислением скалярного произведения сигнала и базисной функции

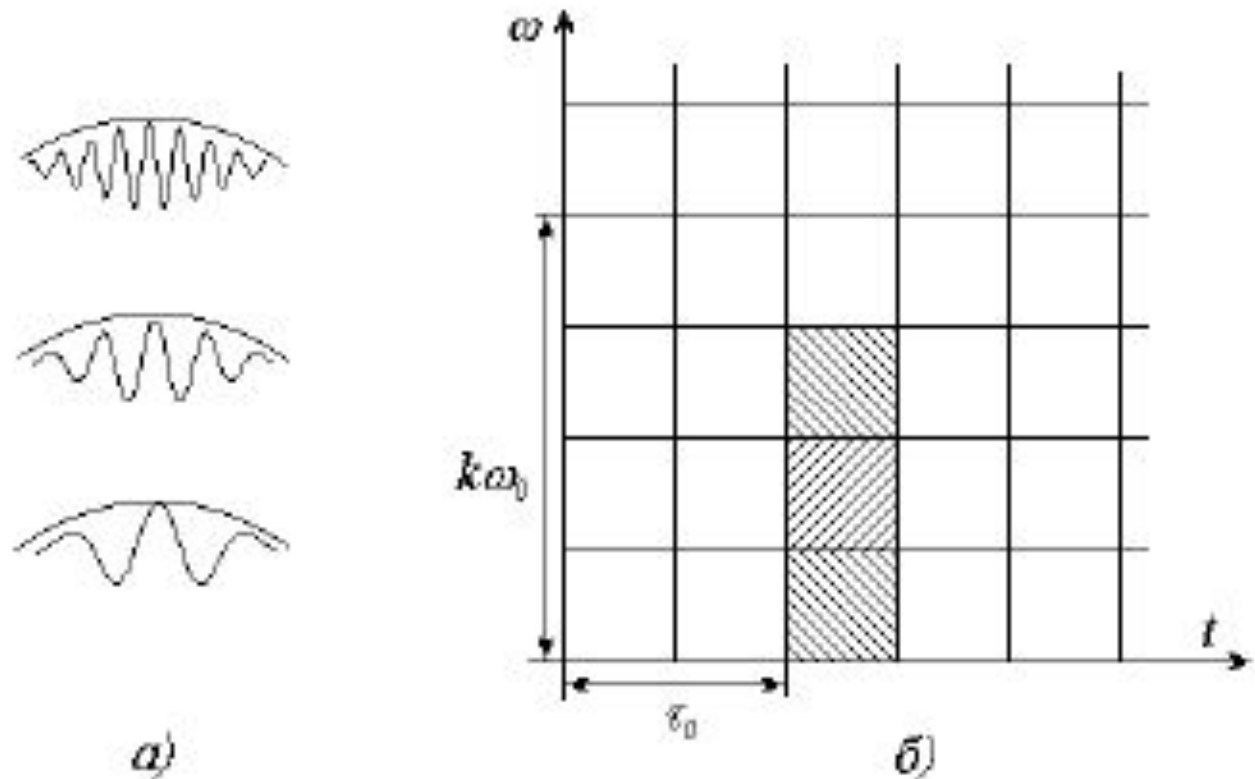
$$g_{\tau}(\omega, t) = w(t - \tau)e^{j\omega t},$$

т.е.

$$F(\omega, \tau) = \langle g_{\tau}(\omega, t), f(t) \rangle$$

Таким образом в спектральный анализ, кроме частоты, вводится еще один параметр – время.

Ограниченное во времени преобразование Фурье на плоскости время-частота



При сдвиге окна или изменении частоты модуляции ширина прямоугольника сохраняется неизменной. Это вызвано тем обстоятельством, что при всех этих операциях ширина самого окна не изменяется

$$g_{\tau}(\omega, t) = e^{jk\omega_0 t} w(t - \tau_0) \text{ при сдвиге } \tau_0$$

и $k = 1, 2, 3$ (вещественная часть);

Оконное преобразование Фурье

Частичным решением проблемы частотно-временного разрешения является *оконное преобразование Фурье* с движущейся по сигналу оконной функцией, имеющей компактный носитель.


Временной интервал сигнала разделяется на подинтервалы и преобразование выполняется последовательно для каждого подинтервала в отдельности. Тем самым осуществляется переход к частотно-временному (частотно-координатному) представлению сигналов, при этом в пределах каждого подинтервала сигнал считается стационарным.

● Оконное преобразование выполняется в соответствии с выражением:

$$F(\omega, \tau) = \int f(t) w(t-\tau) e^{-i\omega t} dt$$

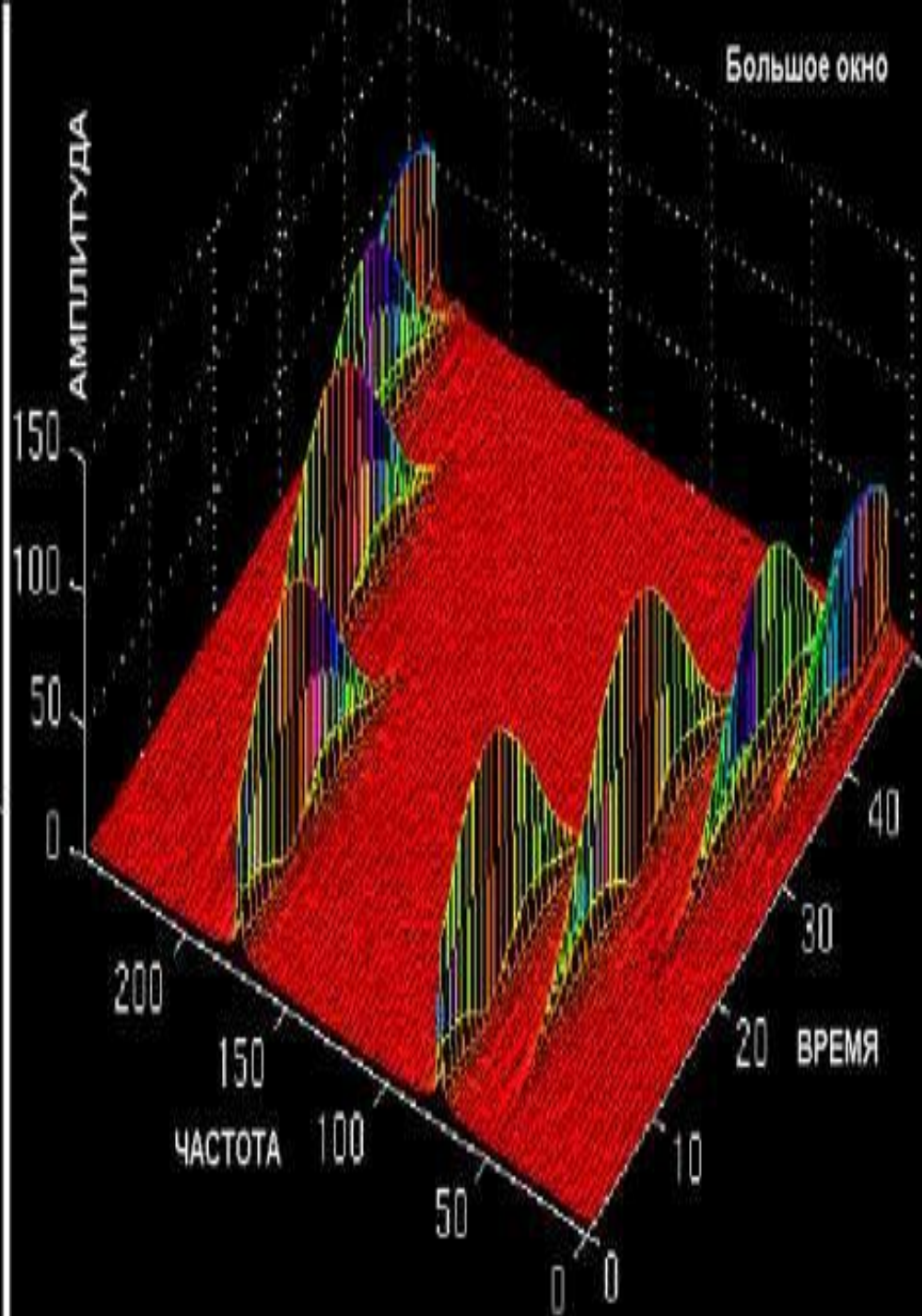
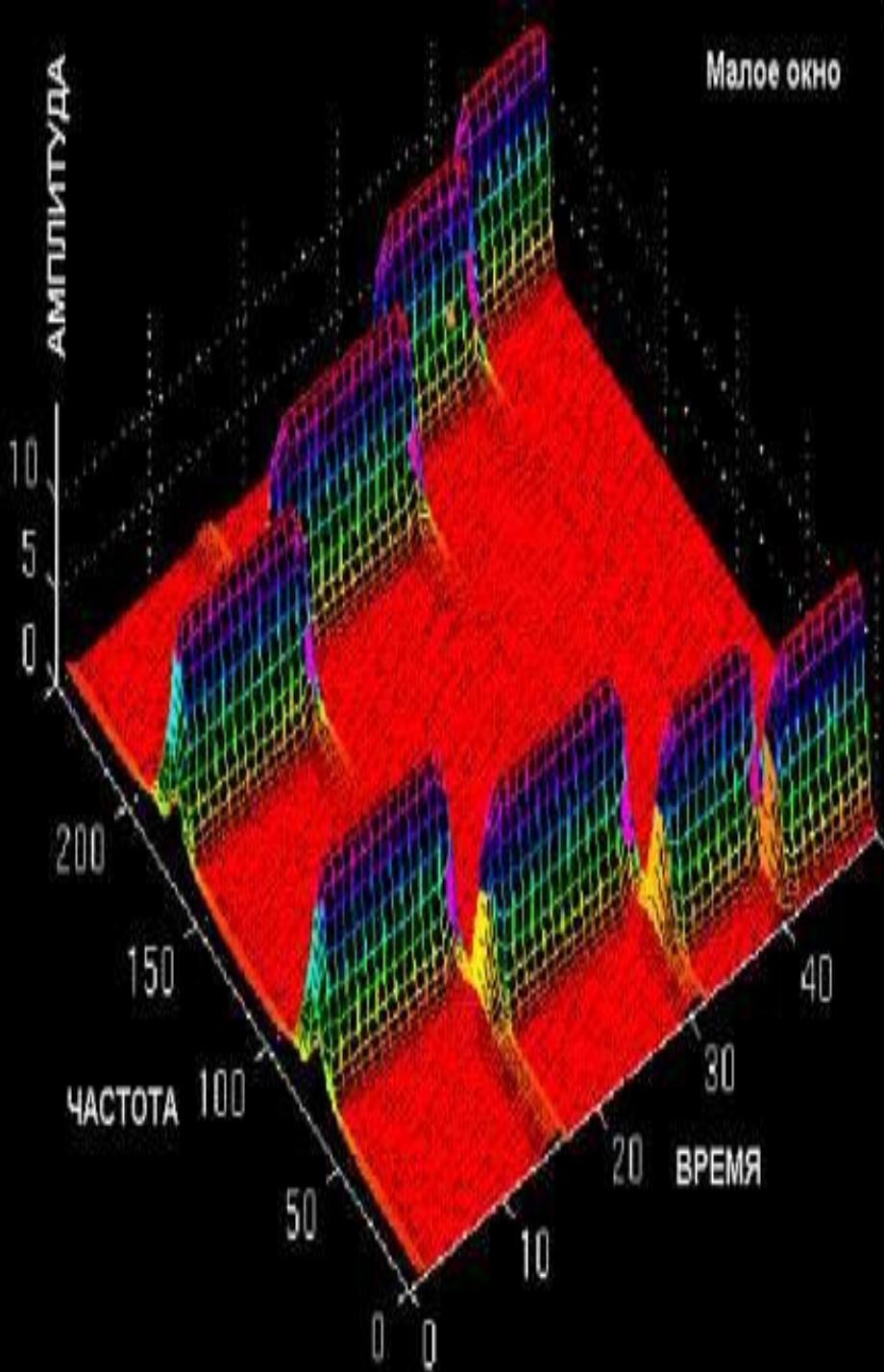
Функция $w(t-\tau)$ представляет собой функцию окна сдвига преобразования по координате t , где параметром τ задаются фиксированные значения сдвига.

При сдвиге окон с равномерным шагом значения τ принимаются равными $k\tau$.



Результатом оконного преобразования является *семейство спектров*, которым отображается изменение спектра сигнала по интервалам сдвига окна преобразования. Это позволяет выделять на координатной оси и анализировать особенности нестационарных сигналов.

Размер носителя оконной функции $w(t)$ обычно устанавливается соизмеримым с интервалом стационарности сигнала.



В качестве окна преобразования может использоваться простейшее прямоугольное окно (при этом $w(t)=1$ в пределах окна и 0 за его границами), а также специальные весовые окна (Бартлетта, Гаусса, и пр.), обеспечивающие малые искажения спектра при вырезке оконных отрезков сигналов, т.е. нейтрализующие явление Гиббса.

Частотно-временное оконное преобразование Фурье

- Функция оконного преобразования может быть переведена в вариант с независимыми переменными и по времени, и по частоте:

$$F(t, \omega) = \int_{\tau} f(t - \tau)w(\tau) \exp(-i\omega t) d\tau$$

Иначе говоря, спектральный анализ в окне данных производится вычислением скалярного произведения сигнала и базисной функции, таким образом в спектральный анализ, кроме частоты, вводится еще один параметр – время.

- Координатная разрешающая способность оконного преобразования определяется шириной оконной функции и, в силу принципа неопределенности

$$\text{Гейзенберга } (\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}),$$

обратно пропорциональна частотной разрешающей способности: $\Delta \omega \sim \frac{1}{\Delta t}$

Хорошая разрешающая способность по времени подразумевает небольшое окно времени, которому соответствует плохая частотная разрешающая способность и наоборот.

Оптимальным считается ОПФ с гауссовым окном, которое получило название *преобразование Габора* (Gabor).

Гаусово окно имеет вид:

$$g_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

$\alpha > 0$ – некоторое фиксированное число.

Хотя эта функция имеет некомпактный носитель, она экспоненциально убывает на бесконечности. Ширину окна можно охарактеризовать стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\alpha}$, считая α дисперсией. Таким образом, ширина окна равна $2\sqrt{\alpha}$.

Формула:

$$F_G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_{\alpha}(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$$

известна преобразованием Габора функции $f(t)$

- Итак, частотно-временной анализ предназначен для выявления локальных частотно-временных возмущений сигнала.

Вследствие кратковременности таких возмущений, сам сигнал может рассматриваться как заданный в пространстве интегрируемых с квадратом функций, т.е. для одномерных сигналов – на всей действительной оси $\mathbb{R}(-\infty, \infty)$ с нормой $\|s(t)\|^2 < \infty$

ОПФ не обладает свойством изменять свой масштаб при необходимости изучения более мелких деталей спектра, т.е. свойством масштабируемости

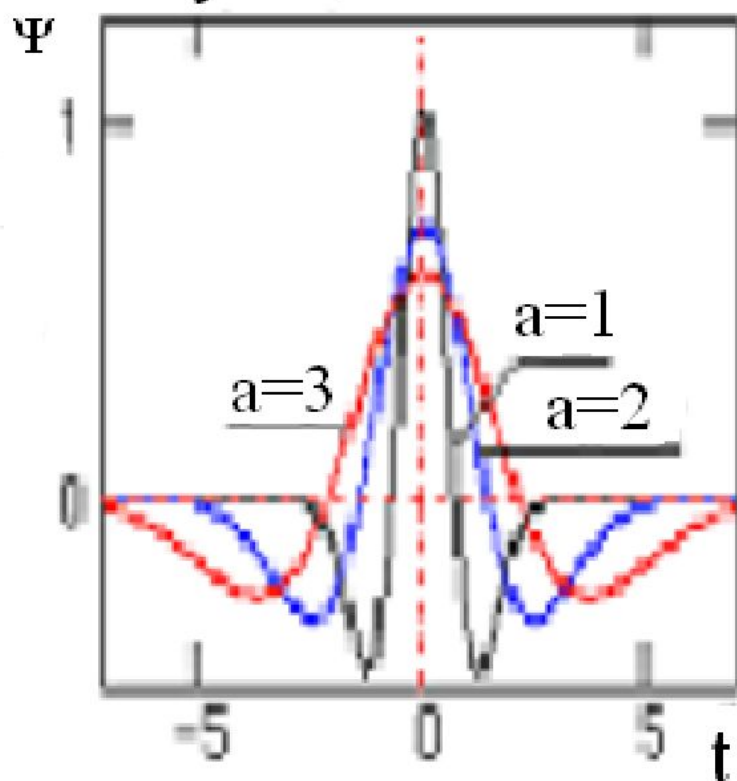
Вейвлетные преобразования

Вейвлет-преобразование обладает свойством масштабируемости.

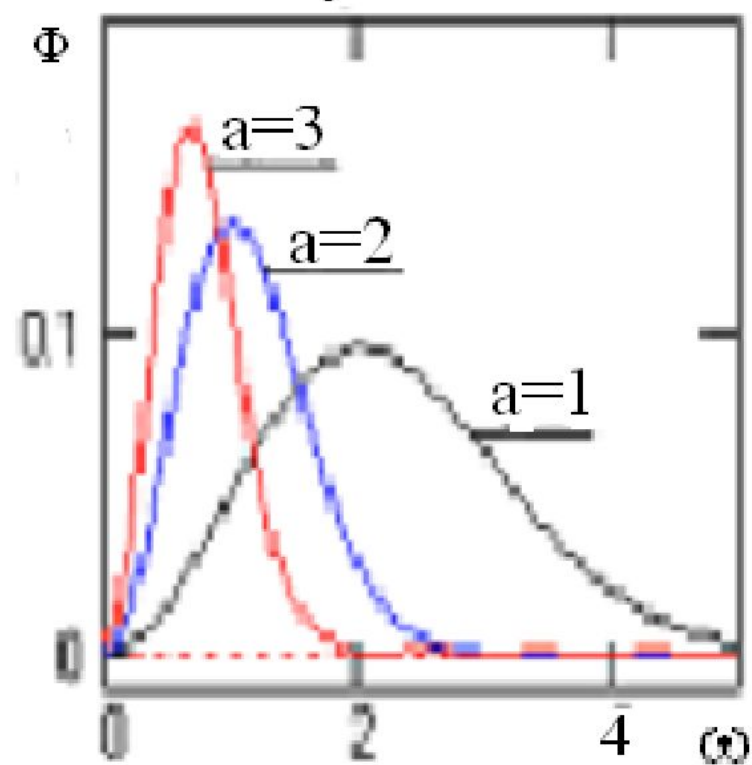
В отличие от преобразования Фурье, при вейвлет-преобразовании не осуществляется поиск циклических частот, а определяются размеры деталей a в некоторое время t .

Вместо выражения «размеры деталей» обычно, правда, употребляется термин «коэффициенты масштабирования».

Функции вейвлетов



Спектр вейвлетов

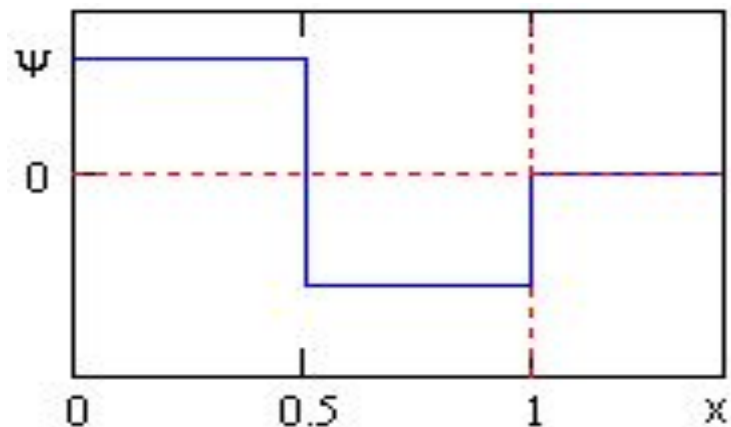


Термин "вейвлет" (wavelet) в переводе с английского означает "маленькая (короткая) волна".

Вейвлеты - это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, которые локальны во времени и по частоте, и в которых все функции получаются из одной базовой (порождающей) посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени.

Вейвлет-преобразования рассматривают анализируемые временные функции в терминах колебаний, локализованных по времени и частоте.

Пример такого всплеска – вейвлет Хаара, известный еще с начала прошлого века:



Базисные функции, которые получили название ***вейвлетов***, также должны принадлежать пространству интегрируемых с квадратом функций и быстро убывать при $t \rightarrow \infty$.

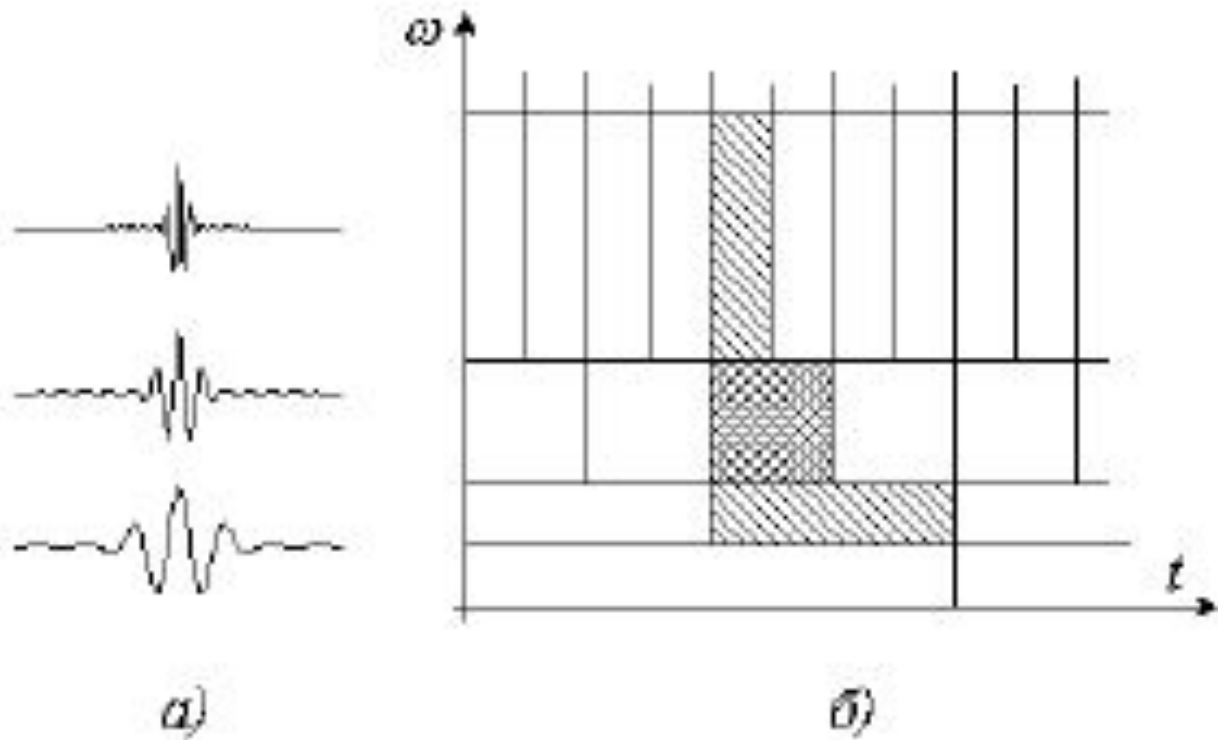
Тогда чтобы перекрыть такими базисными функциями все возможные временные положения сигнала, необходимо, чтобы они (базисные функции) представляли собой набор смещенных во времени функций.

- Удобнее всего, если этот набор образуется из одной и той же "*материнской*" функции $\psi(t)$ (*прототипа*), сдвинутой по оси t , т.е. $\{\psi(t - b)\}$.

● Чтобы обеспечить частотный анализ, базисная функция должна иметь еще один аргумент – масштабный коэффициент, который является аналогом частоты в Фурье-анализе. Тогда базисные функции для частотно-временного анализа будут иметь вид:

$$\psi\left(\frac{t}{a} - \frac{b}{a}\right) = \psi\left(\frac{t - b}{a}\right)$$

$a, b \in \mathbb{R}$.



- Вейвлет-преобразование на плоскости «время-частота»
- а) пример базисных вейвлет-функций при различных масштабах
 $(a - 2^k, k = 0, 1, 2);$
- б) изображение функции на плоскости «время-частота»

Базисные функции для частотно-временного анализа должны обладать следующими свойствами:

- **Ограниченность**, т.е. принадлежность к пространству интегрируемых с квадратом функций;
- **Локализация**. Базисные функции вейвлет-анализа, в отличие от преобразования Фурье, должны быть локализованы, т.е. определены на конечном интервале как во временной, так и в частотной областях.

● **Нулевое среднее.** Равенство нулю нулевого момента, т.е. график исходной функции должен осциллировать (быть знакопеременным) вокруг нуля на оси времени и иметь нулевую площадь :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

или, что иногда необходимо – равенство нулю всех моментов до m -го порядка включительно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0$$

Это – вейвлеты m -го порядка, позволяющие анализировать более тонкую структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся его составляющие.

В случае анализа Фурье каждой частоте соответствует всего *одна* гармоническая составляющая.

В случае вейвлет-анализа каждой частоте соответствует *множество* сдвинутых друг относительно друга функций.

Если сигнал имеет особенности, например разрыв, то на его наличие укажут относительно высокие значения амплитуд при высоких частотах Фурье-представления этого сигнала.

При вейвлет-представлении высокие амплитуды будут только у тех вейвлетов, экстремумы которых окажутся вблизи точки разрыва, т.е. можно не только определить наличие особенности, но и ту точку, в которой она имеет место.

Примеры материнских вейвлетов

- Наиболее распространенные вещественные базисы конструируются на основе производных функции Гаусса

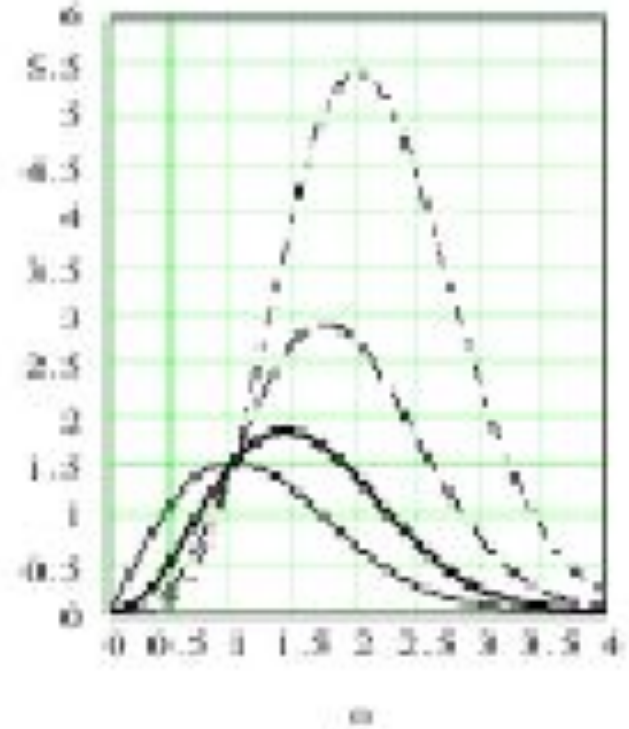
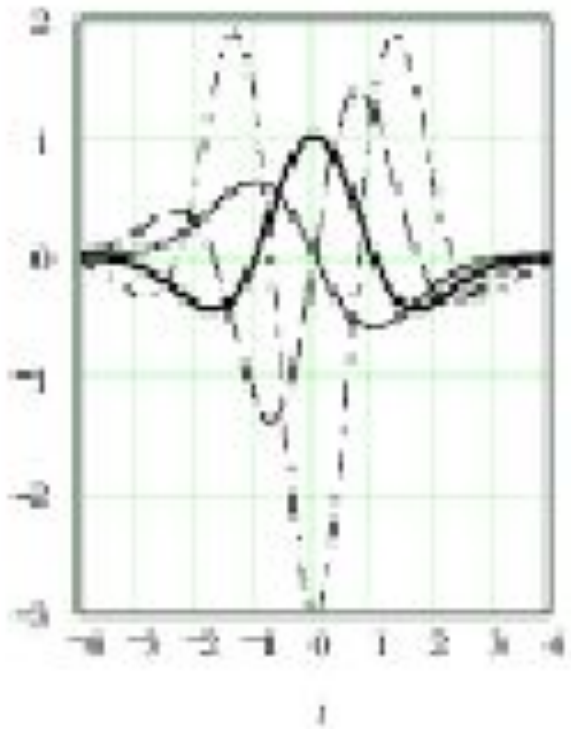
$$g_0(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Это обусловлено тем обстоятельством, что функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях.


Примеры материнских вейвлетов

Вейвлеты первых четырех порядков

Гауссианов и модули их спектральной плотности:



- При $n=1$ получаем вейвлет первого порядка, называемый WAVE-вейвлетом с равным нулю нулевым моментом.
- При $n=2$ получаем МНАТ-вейвлет, называемый «мексиканская шляпа» (mexican hat – похож на сомбреро). У него нулевой и первый моменты равны нулю. Он имеет лучшее разрешение, чем WAVE-вейвлет.



Это небольшой перечень типов вейвлетов, описываемых аналитически в явном виде. Однако большинство типов вейвлетов не имеют аналитического описания в виде одной формулы, а задаются итерационными выражениями, легко вычисляемыми компьютерами. Примером таких вейвлетов являются функции Добеши (Daubechies).

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная плотность $\psi(\omega)$
Вещественные непрерывные базисы		
Гауссовы: – первого порядка, или WAVE-вейвлет, – второго порядка, или МНАТ-вейвлет «мексиканская шляпа» – <u>mexican hat</u>), – n -го порядка,	$-t \exp(-t^2 / 2)$ $(1 - t^2) \exp(-t^2 / 2)$ $(-1)^v \frac{d^v}{dt^v} [\exp(-t^2 / 2)]$	$(j\omega) \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2 / 2)$ $(j\omega)^2 \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2 / 2)$ $(-1)^v (j\omega)^v \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2 / 2)$
DOG – <u>d</u> ifference of <u>g</u> aussians	$e^{-t^2/2} - 0,5e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi} (e^{-\omega^2/2} - e^{-2\omega^2})$
LP-Littlewood & Paley	$(\pi t)^{-1} (\sin 2\pi t - \sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$

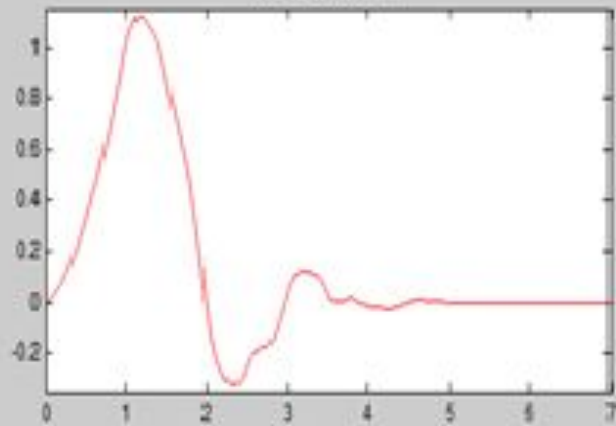
Вещественные дискретные

НААР-вейвлет	$\geq \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases}$	$ie^{j\omega t/2} \frac{\sin^2 \omega/4}{\omega/4}$
ГНАТ-вейвлет, или «французская шляпа» (French hat – похож на цилиндр)	$\geq \begin{cases} 1, & t \leq 1/3, \\ -1/2, & 1/3 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$	$\frac{4 \sin^3 \omega/3}{3 \omega/3}$
Комплексные		
Морле (Morlet)	$e^{j\omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul) (чем больше n , тем больше нулевых моментов имеет вейвлет)	$\Gamma(n+1) \frac{j^n}{(1-j)^{n+1}}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} (\omega)^n e^{-\omega}$

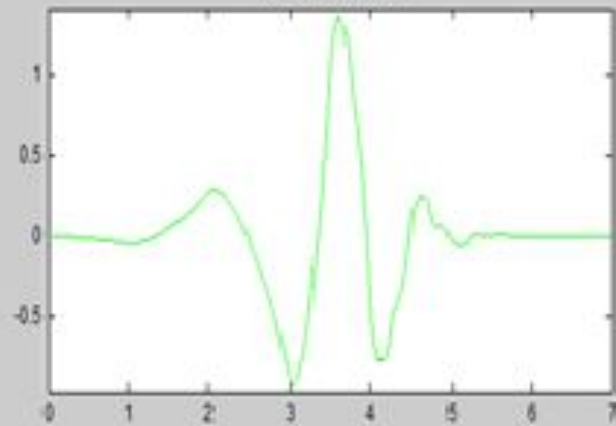
- В настоящее время выбор вейвлетов довольно обширен. Только в пакете Wavelet Toolbox 2.0/2.1 (MATLAB 6) представлено полтора десятка материнских вейвлетов; при этом для ряда из них дано ещё множество вариантов. Для получения справки по какому-либо типу вейвлета при работе в командном режиме MATLAB достаточно исполнить команду *waveinfo* ('*type*'), указав тип вейвлета.
- Для просмотра же вейвлетов достаточно исполнить команду *wavemenu* и в появившемся окне со списком разделов вейвлет-преобразований нажать кнопку **Wavelet Display**. Нажатие этой кнопки выводит окно просмотра вейвлетов, в котором имеется возможность просмотра: общей информации о вейвлетах, о выбранном вейвлете (с именем 'Name') и информации о нем.

db Wavelet -> db4

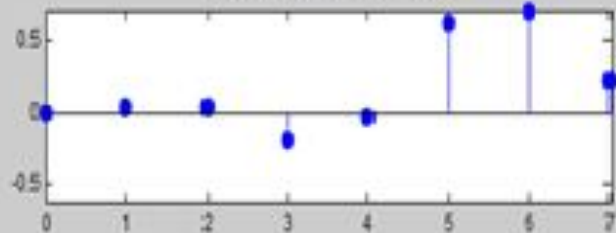
Scaling function phi



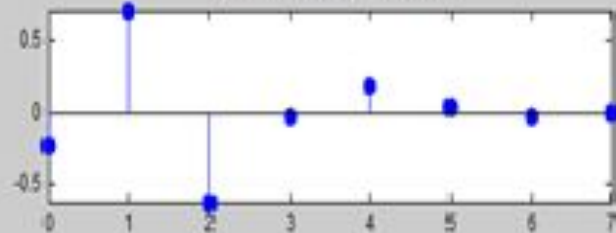
Wavelet function psi



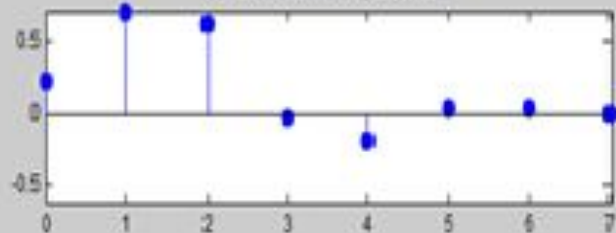
Decomposition low-pass filter



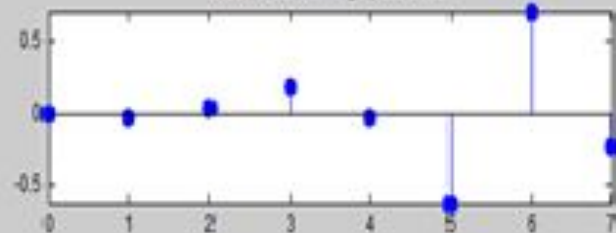
Decomposition high-pass filter



Reconstruction low-pass filter



Reconstruction high-pass filter



Wavelet db 4

Refinement 12

Display

Information on:

Daubechies Family (DB)

All Wavelet Families

X+ Y+ XY+
X- Y- XY-

Center On X Y

Info X+ Y+

History < > << >>

View Axes

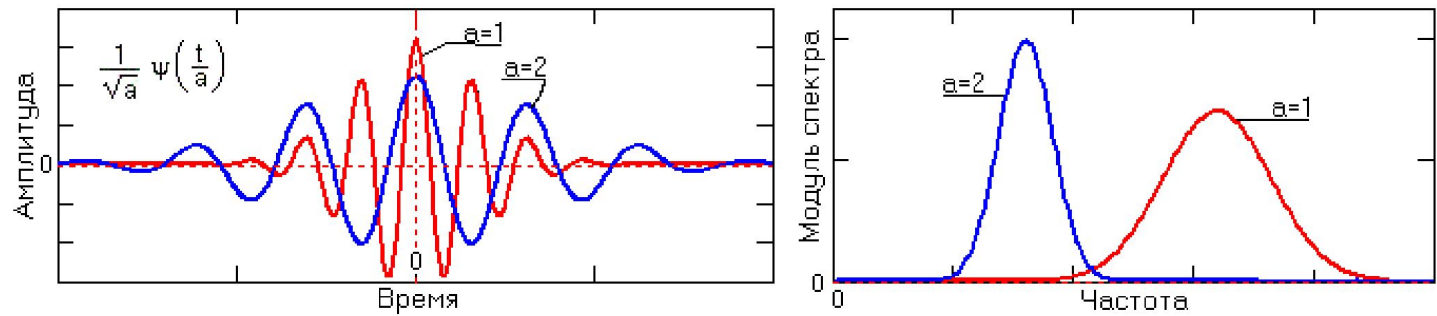
Close

ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В основе вейвлет-преобразований, в общем случае, лежит использование двух непрерывных, взаимозависимых и интегрируемых по независимой переменной функций:

- **Вейвлет-функции $\psi(t)$** , как $\rho\psi$ -функции времени с нулевым значением интеграла и частотным фурье-образом $\Psi(\omega)$. Этой функцией, которую обычно и называют *вейвлетом*, выделяются локальные особенности сигнала. В качестве вейвлетов обычно выбираются функции, хорошо локализованные и во временной, и в частотной области.
- **Масштабирующей функции $\phi(t)$** , как временной $\rho\phi$ -функции с единичным значением интеграла, которой выполняется грубое приближение (аппроксимация) сигнала.

Пример временного и частотного образа функции



Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП, CWT-Continuous Wavelet Transform).

Допустим, что мы имеем функции $s(t)$ с конечной энергией в пространстве интегрируемых с квадратом функций ($L^2(\mathbb{R})$), определенные по всей действительной оси $\mathbb{R}(-\infty, \infty)$. Для финитных сигналов с конечной энергией средние значения сигналов должны стремиться к нулю на $\pm\infty$.

Непрерывным вейвлет-преобразованием (или вейвлетным образом) функции $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ называют функцию двух переменных $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$C(a, b) = \langle s(t), \psi(a, b, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi(a, b, t) dt,$$

где вейвлеты $\psi(a, b, t) \equiv \psi_{ab}(t)$ – масштабированные и сдвинутые копии порождающего вейвлета $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, совокупность которых создает базис пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Порождающими функциями могут быть самые различные функции с компактным носителем - ограниченные по времени и местоположению на временной оси, и имеющие спектральный образ, локализованный на частотной оси.

Базис пространства $L^2(\mathbb{R})$ целесообразно конструировать из одной порождающей функции, норма которой должна быть равна 1.

Для перекрытия функцией вейвлета всей временной оси пространства используется операция сдвига (смещения по временной оси): $\psi(t, b) = \psi(t - b)$, где значение b для НВП является величиной непрерывной.


- Для перекрытия всего частотного диапазона пространства $L^2(\mathbb{R})$ используется операция временного масштабирования вейвлета с непрерывным изменением независимой переменной:

$$\psi(a, t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$$

Понятие масштаба ВП имеет аналогию с масштабом географических карт.

Большие значения масштаба соответствуют глобальному представлению сигнала, а низкие значения масштаба позволяют различить детали.

В терминах частоты низкие частоты соответствуют глобальной информации о сигнале, а высокие частоты - детальной информации и особенностям, которые имеют малую протяженность, т.е. масштаб вейвлета, как единица шкалы частотно-временного представления сигналов, обратен частоте.



Масштабирование, как математическая операция, расширяет или сжимает сигнал. Большие значения масштабов соответствуют расширениям сигнала, а малые значения - сжатым версиям.

В определении вейвлета коэффициент масштаба a стоит в знаменателе.

Соответственно, $a > 1$ расширяет сигнал, $a < 1$ сжимает его.

Процедура преобразования


- Стартует с масштаба $a=1$ и продолжается при увеличивающихся значениях a , т.е. анализ начинается с высоких частот и проводится в сторону низких частот. Первое значение ' a ' соответствует наиболее сжатому вейвлету. При увеличении значения ' a ' вейвлет расширяется.

- Вейвлет помещается в начало сигнала ($t=0$), перемножается с сигналом, интегрируется на интервале своего задания и нормализуется на $1/\sqrt{|a|}$. Результат вычисления $S(a,b)$ помещается в точку ($a=1, b=0$) масштабно-временного спектра преобразования. Сдвиг b может рассматриваться как время с момента $t=0$, при этом координатная ось b повторяет временную ось сигнала.

- Затем вейвлет масштаба $a=1$ сдвигается вправо на значение b и процедура повторяется. Получаем значение, соответствующее $t=b$ в строке $a=1$ на частотно-временном плане. Процедура повторяется до тех пор, пока вейвлет не достигнет конца сигнала. Таким образом получаем строку точек на масштабно-временном плане для масштаба $a=1$.

- Для вычисления следующей масштабной строки значение a увеличивается на некоторое значение. При НВП в аналитической форме $\Delta b \rightarrow 0$ и $\Delta a \rightarrow 0$.

При выполнении преобразования в компьютере выполняется увеличение обоих параметров с определенным шагом. Тем самым осуществляется дискретизация масштабно-временной плоскости.



Начальное значение масштабного коэффициента может быть и меньше 1. Для детализации самых высоких частот сигнала минимальный размер окна вейвлета не должен превышать периода самой высокочастотной гармоники анализируемого сигнала

- Если в сигнале присутствуют спектральные компоненты, соответствующие текущему значению a , то интеграл произведения вейвлета с сигналом в интервале, где эта спектральная компонента присутствует, дает относительно большое значение.
- В противном случае - произведение мало или равно нулю, т.к. среднее значение вейвлетной функции равно нулю. С увеличением масштаба (ширины окна) вейвлета преобразование выделяет все более низкие частоты.

Обратное преобразование

Так как форма базисных функций $\psi(a,b,t)$ зафиксирована, то вся информация о сигнале переносится на значения функции $S(a,b)$.

Точность обратного интегрального вейвлет-преобразования зависит от выбора базисного вейвлета и способа построения базиса, т.е. от значений базисных параметров a, b .

Строго теоретически вейвлет может считаться базисной функцией $L^2(\mathbb{R})$ только в случае его ортонормированности.

Для практических целей непрерывного преобразования часто бывает вполне достаточно устойчивость и "приблизительность" ортогональности системы разложения функций.

Под устойчивостью понимается достаточно точная реконструкция произвольных сигналов.

- Для ортонормированных вейвлетов обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса, что и прямое:

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} C(a, b) \psi(a, b, t) da db$$

где C_ψ - нормализующий коэффициент:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} (|\Psi(\omega)|^2 / \omega) d\omega < \infty.$$

Условие конечности C_ψ ограничивает класс функций, которые можно использовать в качестве вейвлетов.

Таким образом, **непрерывное вейвлет-преобразование** представляет собой разложение сигнала по всем возможным сдвигам и сжатиям/растяжениям некоторой локализованной финитной функции - вейвлета. При этом переменная 'a' определяет масштаб вейвлета и эквивалентна частоте в преобразованиях Фурье, а переменная 'b' – сдвиг вейвлета по сигналу от начальной точки в области его определения, шкала которого повторяет временную шкалу анализируемого сигнала.

Вейвлетный анализ является частотно-пространственным анализом сигналов.

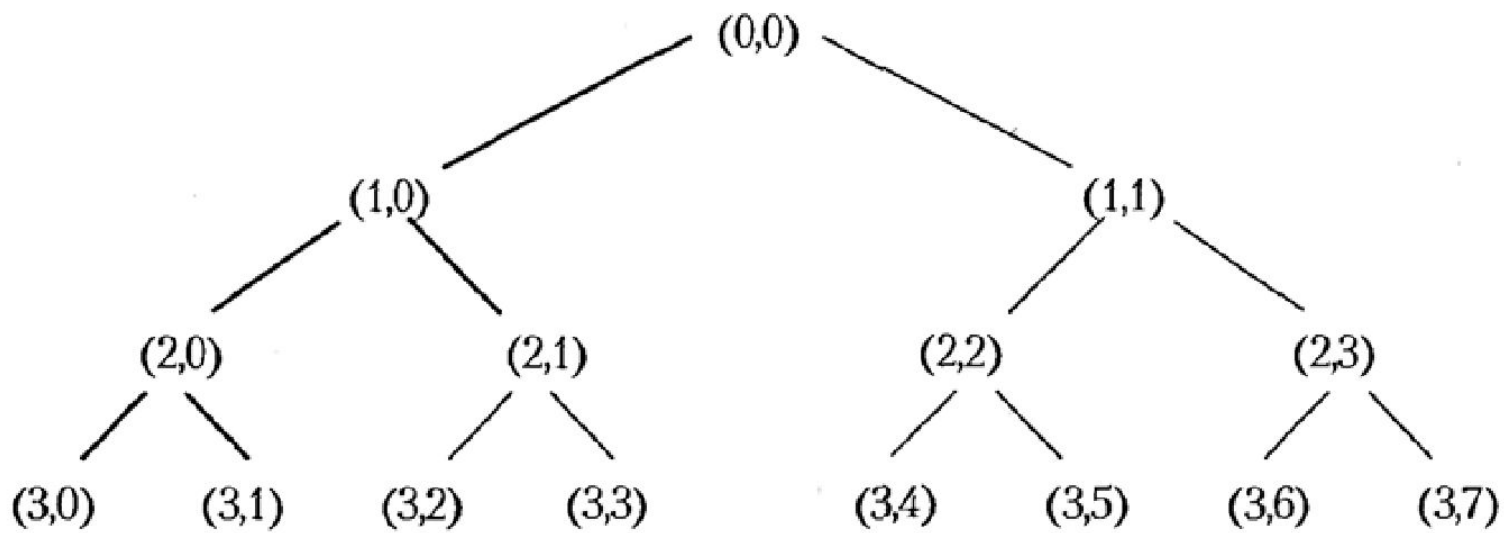


Схема пакетного разложения сигнала