Ряд Фурье в действительной форме

Рядом Фурье для $2l$-периодической функции $f(x)$, кусочно-непрерывной и ограниченной на отрезке $[-l; l]$ по основной тригонометрической системе называется ряд вида

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l}\right),$$

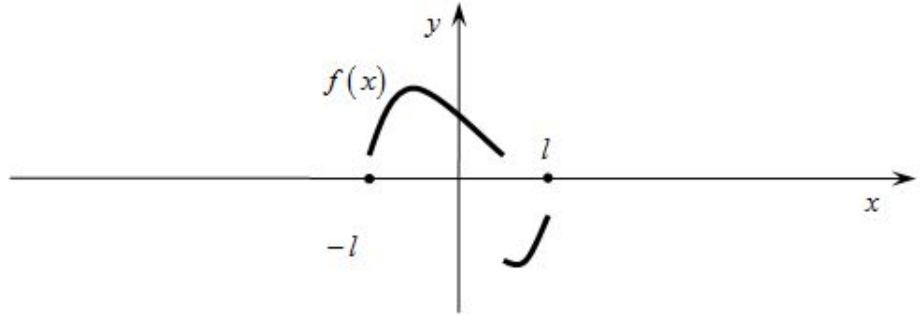
где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$$

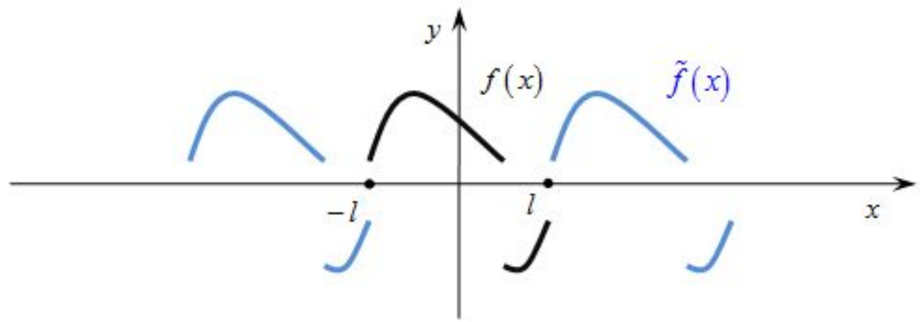
– коэффициенты ряда Фурье.

Алгоритм представления функции рядом Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l; l]$, кусочно-непрерывна и ограничена на нем, имеет график



1. Построить периодическое продолжение $\bar{f}(x)$ функции на всю действительную ось, с периодом $2l$, $\bar{f}(x)\big|_{x\in[-l;\ l]} = f(x)$:



2. Для полученной функции $\bar{f}(x)$ вычислить коэффициенты по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,\quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx,\quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx.$$

3. Записать ряд Фурье $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k x}{l} + b_k\sin\frac{\pi k x}{l}\right)$.

4. Указать, что $F(x) = \bar{f}(x)$ для всех x – точек непрерывности функции $\bar{f}(x)$, следовательно,

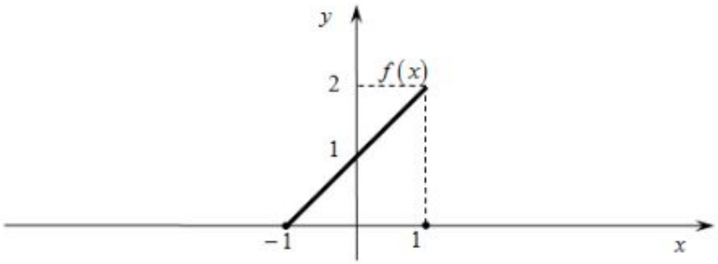
$F(x) = f(x)$ на отрезке $[-l; l]$ в точках непрерывности функции $f(x)$. И

$F(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в точках разрыва функции f, при этом $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – пределы слева и справа, соответственно, функции $f(x)$ в точке разрыва.

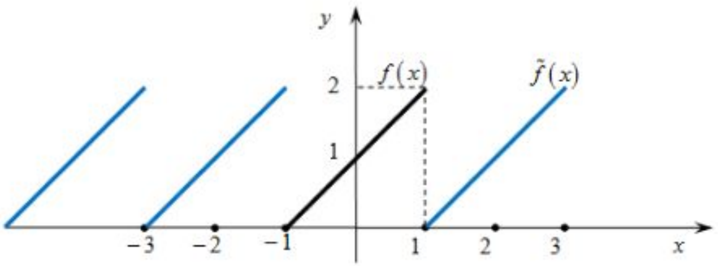
Пример 1

Построить ряд Фурье для функции $f(x) = x + 1$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

1. Строим график функции



2. Строим периодическое продолжение функции с периодом 2:



3. Вычислим коэффициенты ряда Фурье для функции $\tilde{f}(x)$ по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{4}{2} = 2\ ,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(x+1)\cos\frac{\pi k x}{1}\,dx = \int_{-1}^{1}(x+1)\cos\pi k x\,dx\ ,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(x+1)\sin\frac{\pi k x}{1}\,dx = \int_{-1}^{1}(x+1)\sin\pi k x\,dx\ .$$

Вычислим коэффициенты с помощью программы MathCad

$$\int_{-1}^{1}(x+1)\cdot\cos(\pi\,k\cdot x)\,dx \to \frac{2\cdot\sin(\pi\cdot k)}{\pi\cdot k}$$

$$\int_{-1}^{1}(x+1)\cdot\sin(\pi\,k\cdot x)\,dx \to \frac{2\cdot(\sin(\pi\cdot k) - \pi\cdot k\cdot\cos(\pi\cdot k))}{\pi^2\cdot k^2}$$

Таким образом,

$$a_k = \frac{2\sin \pi k}{\pi k} = 0,$$

$$b_k = \frac{2(\sin \pi k - \pi k \cos \pi k)}{\pi^2 k^2} = \frac{2\left(0 - \pi k(-1)^k\right)}{\pi^2 k^2} = -\frac{2(-1)^k}{\pi k}.$$

4. Составляем ряд Фурье:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l}\right) = \frac{2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(0\cos \pi k x - \frac{2(-1)^k}{\pi k}\sin \pi k x\right) =$$

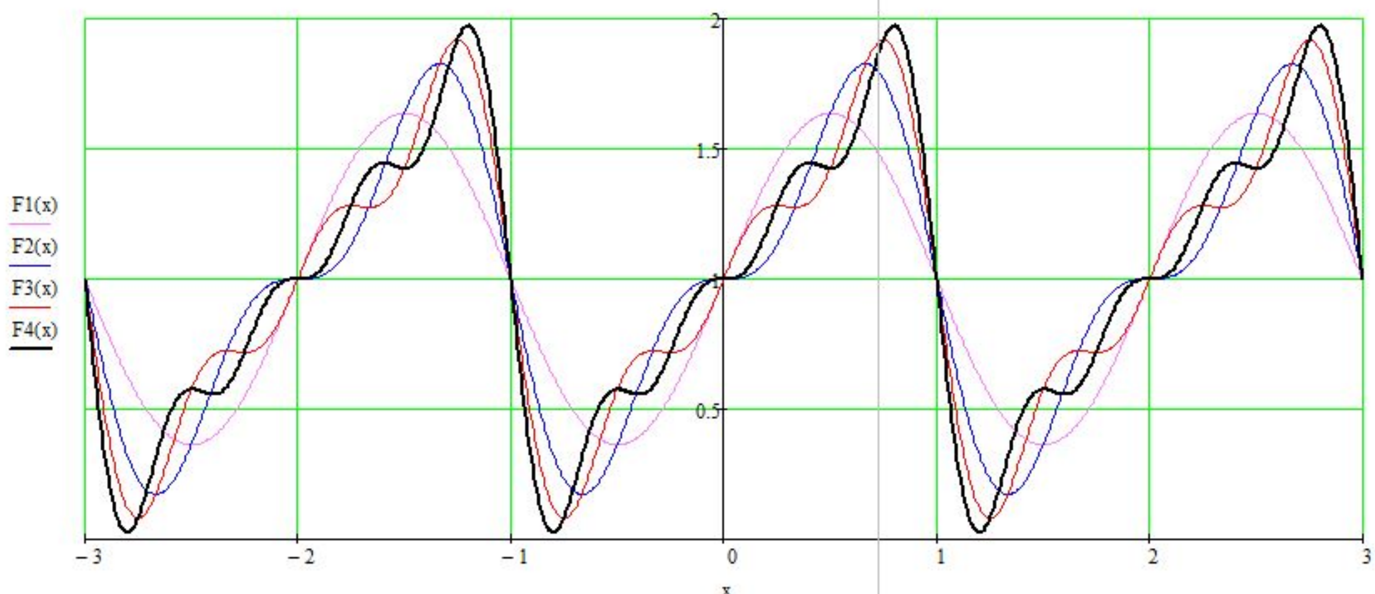
$$= 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin \pi k x.$$

Полученный ряд $F(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin \pi k x$ сходится к функции $\tilde{f}\ (x)$ во всех точках непрерывности функции, т.е. для $x \neq k,\ k \in \mathbf{Z}$, следовательно, $F(x) = f(x) = x + 1$ на интервале $(-1;\ 1)$ и $F(1) = \frac{f(1-0)+f(1+0)}{2} = \frac{2+0}{2} = 1.$

Изобразим на графике полученный ряд

$$F1(x) := 1 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{1}\cdot\sin(\pi x) \qquad F2(x) := 1 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{1}\cdot\sin(\pi x) - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2\pi\cdot x)$$

$$F3(x) := 1 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{1}\cdot\sin(\pi x) - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2\pi\cdot x) - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\sin(3\pi\cdot x) \qquad F4(x) := 1 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{1}\cdot\sin(\pi x) - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2\pi\cdot x) - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\sin(3\pi\cdot x) - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin(4\pi\cdot x)$$



Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Если функция $f(x)$ четна на отрезке $[-l;\ l]$, то ее график симметричен относительно оси Oy, и коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx,\ a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx,$$

при этом коэффициент $b_k = 0$.

Ряд Фурье имеет вид $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi kx}{l}$, и называется рядом по косинусам.

Если функция $f(x)$ нечетна на отрезке $[-l;\ l]$, то ее график симметричен относительно начала координат, и коэффициенты

$$a_0 = 0,\ a_k = 0,$$

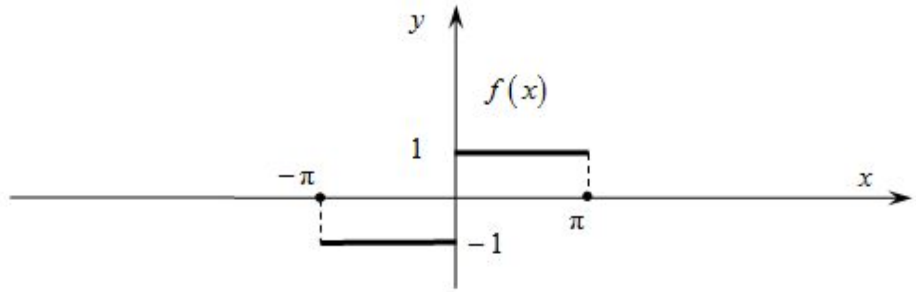
при этом коэффициент

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx.$$

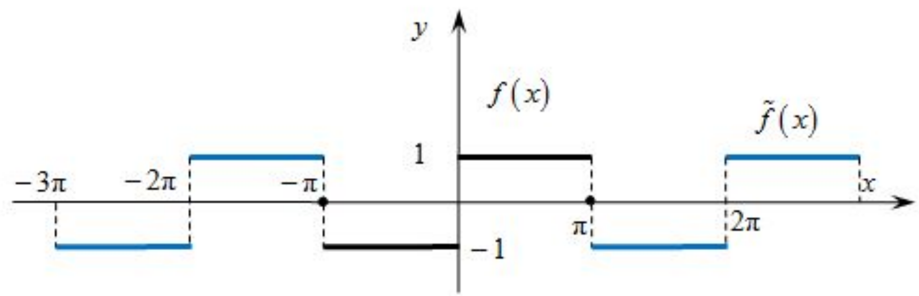
Ряд Фурье имеет вид $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi kx}{l}$, и называется рядом по синусам.

Построить ряд Фурье для функции $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

1. Строим график функции



2. Строим периодическое продолжение с периодом 2π:



3. Вычисляем коэффициенты. Функция $f(x)$ нечетна, следовательно, $a_0 = 0$, $a_k = 0$,

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\sin\frac{\pi k x}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kx dx = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^\pi =$$

$$= -\frac{2}{\pi k}(\cos\pi k - \cos 0) = -\frac{2}{\pi k}\left((-1)^k - 1\right).$$

4. Составляем ряд Фурье

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi k}\left((-1)^k - 1\right)\sin kx.$$

Заметим, что

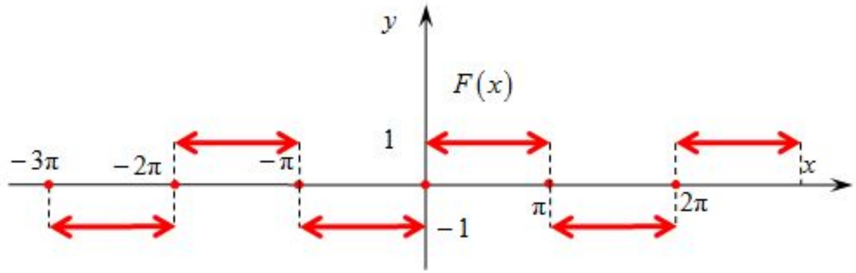
$$\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, & k - \text{четно} \\ -2, & k - \text{нечетно} \end{cases},$$

следовательно, ряд будет содержать только слагаемые, соответствующие нечетным k, или для $k = 2n - 1$, т.о.

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi k}\left(\left(-1\right)^{k} - 1\right)\sin kx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

$$F(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases} \text{ и } F(\pi) = \frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Построим график $F(x)$:

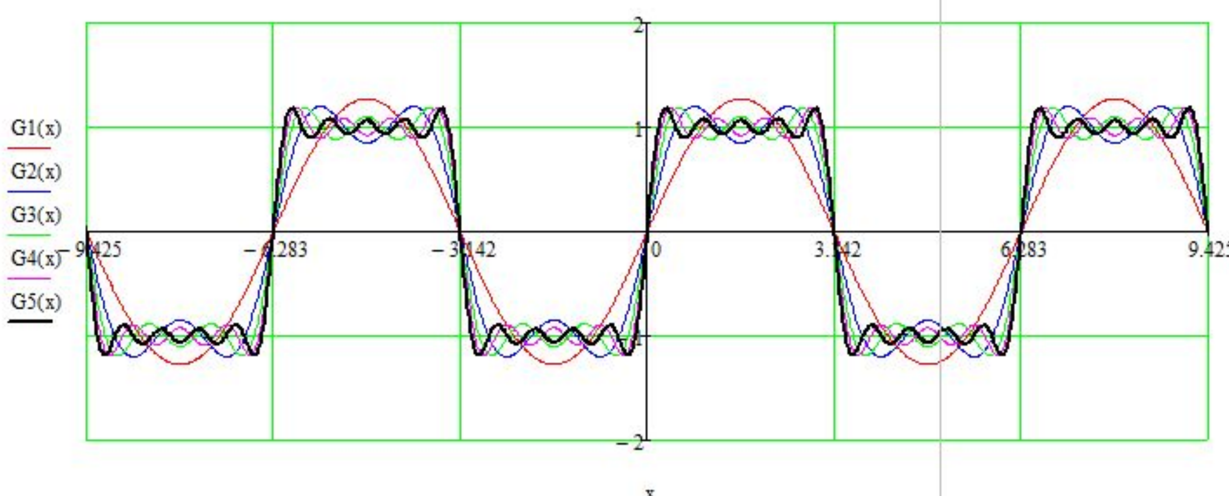


Проверим себя с помощью программы MathCad

$$G1(x) := \frac{4}{\pi}\cdot(\sin(x)) \qquad G2(x) := \frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3}\right) \qquad G3(x) := \frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5}\right)$$

$$G4(x) := \frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7}\right)$$

$$G5(x) := \frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9}\right)$$



Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и ограничена на отрезке $[a;\ b]$, $a < b$. Для разложения функции в ряд Фурье построим ее периодическое продолжение $\bar{f}\ (x)$ с периодом $\frac{b-a}{2}$ и построим ряд Фурье для функции $\bar{f}\ (x)$ на отрезке $\left[-\frac{b-a}{2};\ \frac{b-a}{2}\right]$:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}} + b_k \sin\frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}}\right)$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{1}{\frac{b-a}{2}}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(x)\,dx,\quad a_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(x)\cos\frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}}dx,\quad b_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(x)\sin\frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}}dx.$$

Так как для интеграла от $2l$-периодической функции верно равенство:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{a}^{a+2l} f(x)\,dx,$$

то коэффициенты ряда можно вычислить по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\frac{b-a}{2}}\int_{a}^{b} f(x)\,dx,\quad a_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}}dx,\quad b_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}}dx.$$

Если построить продолжение функции $f(x)$ четным образом на отрезок $[-b; b]$ периодично с периодом $2b$, то коэффициенты b_k ряда Фурье для продолжения функции будут равны нулю, а ряд Фурье будет иметь вид

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi k x}{b} \text{ с коэффициентами } a_0 = \frac{2}{b}\int_{0}^{b} f(x)\,dx,\ a_k = \frac{2}{b}\int_{0}^{b} f(x)\cos\frac{\pi k x}{b}dx.$$

Такой ряд называется рядом Фурье по косинусам.

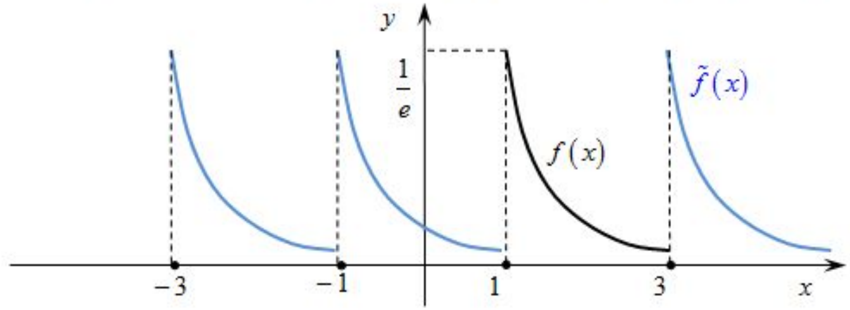
Аналогично, если построить продолжение функции $f(x)$ нечетным образом на отрезок $[-b;\ b]$ периодично с периодом $2b$, то коэффициенты ряда Фурье для продолжения функции будут равны нулю, а ряд Фурье будет иметь вид:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k x}{b} \text{ с коэффициентами } b_k = \frac{2}{b}\int_{0}^{b} f(x)\sin\frac{\pi k x}{b}dx.$$

Такой ряд называется рядом Фурье по синусам.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = e^{-x}$, определенную на отрезке $[1;\ 3]$.

Решим сначала эту задачу в общем виде, построив периодическое продолжение функции $\tilde{f}\ (x)$ с периодом $3 - 1 = 2$.



Вычислим коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{1} \int\limits_1^3 e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^3 = -\left(e^{-3} - e^{-1}\right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^3},$$

$$a_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int\limits_a^b f(x) \cos\frac{\pi kx}{\frac{b-a}{2}}\,dx = \frac{1}{1} \int\limits_1^3 e^{-x} \cos\frac{\pi kx}{1}\,dx = -\frac{e^{-x}}{\pi^2 k^2 + 1}\left(\cos \pi kx - \pi k \sin \pi kx\right)\Big|_1^3 =$$

$$= -\frac{e^{-3}}{\pi^2 k^2 + 1}\left(\underbrace{\cos 3\pi k}_{=(-1)^k} - \pi k \underbrace{\sin 3\pi k}_{=0}\right) + \frac{e^{-1}}{\pi^2 k^2 + 1}\left(\underbrace{\cos \pi k}_{=(-1)^k} - \pi k \underbrace{\sin \pi k}_{=0}\right) = \frac{(-1)^k \left(e^{-1} - e^{-3}\right)}{\pi^2 k^2 + 1}.$$

$$b_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int\limits_a^b f(x) \sin\frac{\pi kx}{\frac{b-a}{2}}\,dx = \int\limits_1^3 e^{-x} \sin \pi kx dx = \frac{e^{-x}}{\pi^2 k^2 + 1}\left(\sin \pi kx + \pi k \cos \pi kx\right)\Big|_1^3 = \frac{\pi k (-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1}\left(e^{-1} - e^{-3}\right).$$

Итак, получим ряд Фурье:

$$F(x) = \frac{e^{-1} - e^{-3}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k \left(e^{-1} - e^{-3}\right)}{\pi^2 k^2 + 1} \cos \pi kx + \frac{\pi k (-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1}\left(e^{-1} - e^{-3}\right) \sin \pi kx\right) =$$

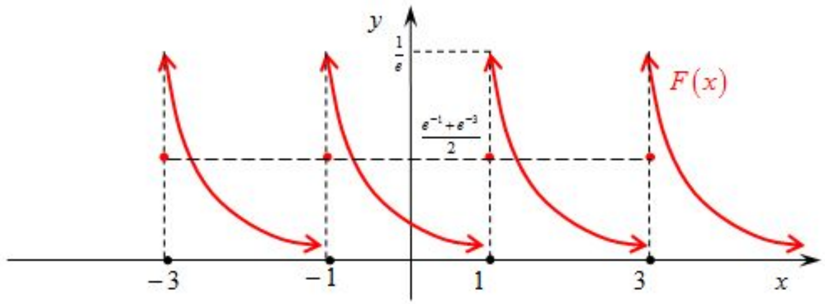
$$= \frac{e^{-1} - e^{-3}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(e^{-1} - e^{-3}\right)}{\pi^2 k^2 + 1}\left(\cos \pi kx + \pi k \sin \pi kx\right) =$$

$$= \left(e^{-1} - e^{-3}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1}\left(\cos \pi kx + \pi k \sin \pi kx\right)\right).$$

$F(x) = \bar{f}\ (x)$ в точках непрерывности, так как $\bar{f}\ (x)\big|_{x\in[1;3]} = e^{-x}$, то $F(x) = e^{-x}$ на отрезке $[1; 3]$.

В точках разрыва $F(1) = \frac{f(1-0)+f(x+0)}{2} = \frac{e^{-3}+e^{-1}}{2}$

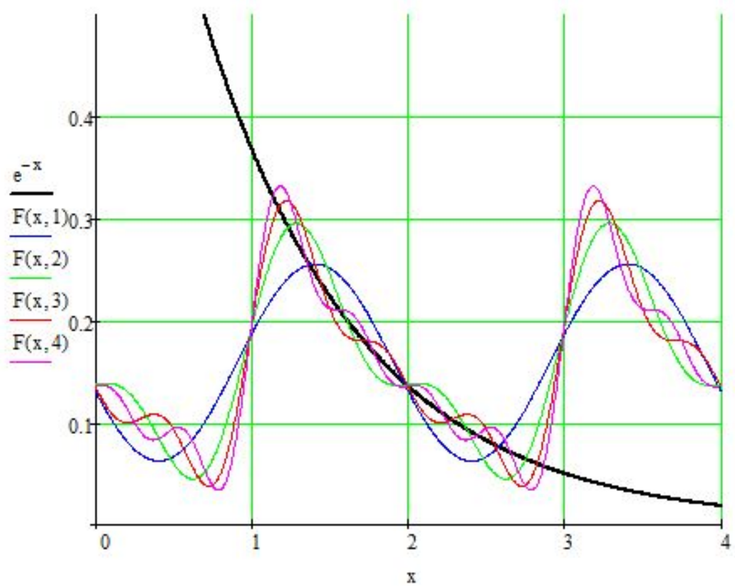
Построим схематический график полученного ряда.



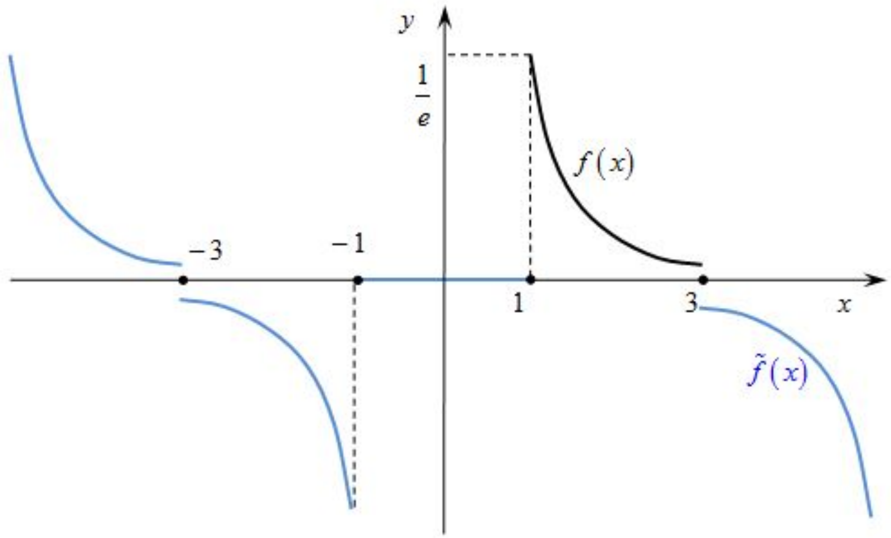
Построим график полученного ряда методами MathCad

$$b(k) := \int_1^3 e^{-x} \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot x)\, dx \qquad a(k) := \int_1^3 e^{-x} \cdot \cos(\pi \cdot k \cdot x)\, dx \qquad a0 := \int_1^3 e^{-x}\, dx$$

$$F(x, N) := \frac{a0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a(k) \cdot \cos(\pi \cdot k \cdot x) + b(k) \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot x)\right)$$



Построим разложение в ряд Фурье функции $f(x) = e^{-x}$, определенной на отрезке $[1;\ 3]$, продолжив ее нечетным образом на $\mathbf{R}$.



Функция $\tilde{f}\ (x)$ периодична, с периодом 6, нечетна, следовательно, ее ряд Фурье будет иметь вид

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k x}{b} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k x}{3} \text{ с коэффициентами}$$

$$b_k = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin\frac{\pi k x}{b}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 \tilde{f}\ (x)\sin\frac{\pi k x}{3}dx = \frac{2}{3}\int_1^3 e^{-x}\sin\frac{\pi k x}{3}dx =$$

$$= \frac{6e^{-x}}{\pi^2k^2+9}\left(\sin\frac{\pi k x}{3} + \frac{\pi k}{3}\cos\frac{\pi k x}{3}\right)\Big|_1^3 = \frac{6}{\pi^2k^2+9}\left(e^{-3}\left(\sin\pi k + \frac{\pi k}{3}\cos\pi k\right) - e^{-1}\left(\sin\frac{\pi k}{3} + \frac{\pi k}{3}\cos\frac{\pi k}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2k^2+9}\left(e^{-3}\frac{\pi k}{3}(-1)^k - e^{-1}\left(\sin\frac{\pi k}{3} + \frac{\pi k}{3}\cos\frac{\pi k}{3}\right)\right).$$

Ряд Фурье имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{\pi^2k^2+9}\left(e^{-3}\frac{\pi k}{3}(-1)^k - e^{-1}\left(\sin\frac{\pi k}{3} + \frac{\pi k}{3}\cos\frac{\pi k}{3}\right)\right)\sin\frac{\pi k x}{3}$$

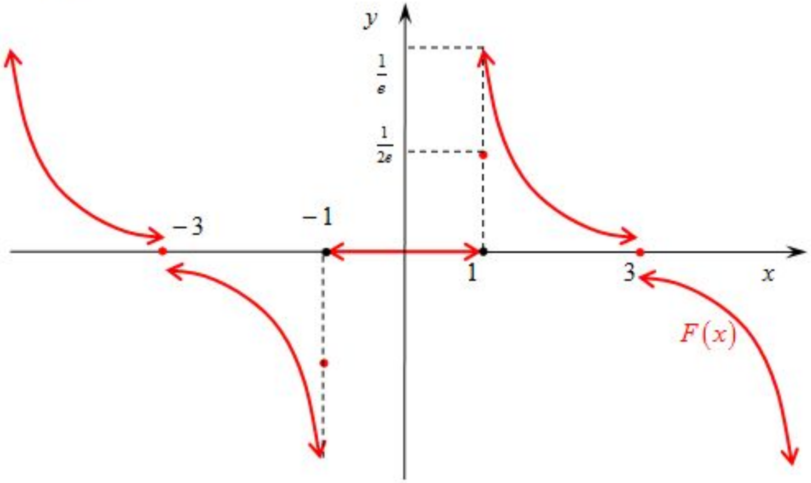
$F(x) = \tilde{f}\ (x)$ в точках непрерывности, так как $\tilde{f}\ (x)\big|_{x\in[1;3]} = e^{-x}$, то $F(x) = e^{-x}$ на отрезке $[1;3]$.

В точках разрыва:

$$F(3) = \frac{f(3-0)+f(3+0)}{2} = \frac{e^{-3}+(-e^{-3})}{2} = 0;$$

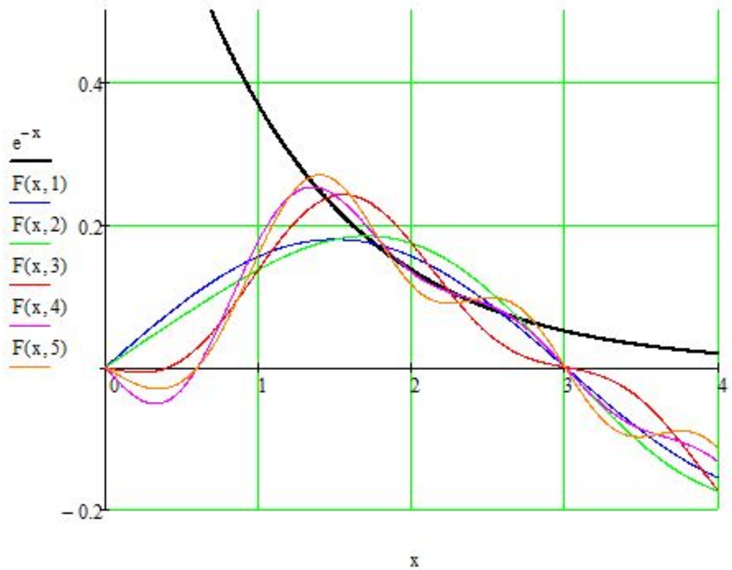
$$F(1) = \frac{f(1-0)+f(1+0)}{2} = \frac{0+(e^{-1})}{2} = -\frac{1}{2e}.$$

Построим схематический график полученного ряда.



Проведем вычисления с помощью MathCad:

$$b(k) := \frac{2}{3} \cdot \int_{1}^{3} e^{-x} \cdot \sin\left(\pi \cdot k \cdot \frac{x}{3}\right) dx \qquad F(x,N) := \sum_{k=1}^{N} \left(b(k) \cdot \sin\left(\pi \cdot k \cdot \frac{x}{3}\right)\right)$$



Заметим, что полученный ряд сходится к функции медленнее, в отличие от ряда, построенного в предыдущем примере, т.е. для приближения с заданной точностью в полученном ряде нужно взять больше слагаемых, чем в ряде, построенном в примере 3.

Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l; l]$, кусочно-непрерывна и ограничена на нем, если функция периодична с периодом $2l$, то ряд

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{i\pi kx}{l}}, \quad \text{где } c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{i\pi kx}{l}} dx \text{ - коэффициенты ряда}$$

является рядом Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме.

Этот ряд сходится к функции $f(x)$ во всех точках непрерывности и

$$F(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

в точках разрыва функции f, при этом $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – пределы слева и справа, соответственно, функции $f(x)$ в точке разрыва.

Коэффициенты a_k и b_k тригонометрического ряда Фурье и c_k ряда Фурье в комплексной форме связаны следующими равенствами:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2};\ c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

$$a_k = c_k + c_{-k};\ b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Построить ряд Фурье для функции $f(x) = e^{-x}$, определенной на отрезке $[0;\ \pi]$.

Построим периодическое продолжение $\bar{f}(x) = e^{-x},\ \ x \in [-\pi;\ \pi)$ с периодом 2π $(l = \pi)$ и вычислим коэффициент c_k ряда Фурье в комплексной форме:

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{i\pi kx}{l}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-\frac{i\pi kx}{\pi}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x(ik+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{e^{-x(ik+1)}}{ik+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{2\pi(ik+1)}\left(e^{-\pi(ik+1)} - e^{\pi(ik+1)}\right) =$$

$$= \frac{-1(-ik+1)}{2\pi(ik+1)(-ik+1)}\left(e^{-\pi}e^{-\pi ik} - e^{\pi}e^{\pi ik}\right) = \left|\begin{matrix} e^{-\pi ik} = \cos\pi k - i\sin\pi k = (-1)^k \\ e^{\pi ik} = \cos\pi k + i\sin\pi k = (-1)^k \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{-1(1-ik)}{2\pi(1+k^2)}\cdot\left(e^{-\pi} - e^{\pi}\right)(-1)^k = \frac{(-1)^k(1-ik)}{\pi(1+k^2)}\cdot\underbrace{\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}}_{\operatorname{sh}\pi} = \frac{(-1)^k(1-ik)\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+k^2)}.$$

Итак, ряд Фурье имеет вид:

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{i\pi kx}{l}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-ik)\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+k^2)}e^{\frac{i\pi kx}{\pi}} = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-ik)e^{ikx}}{1+k^2}.$$

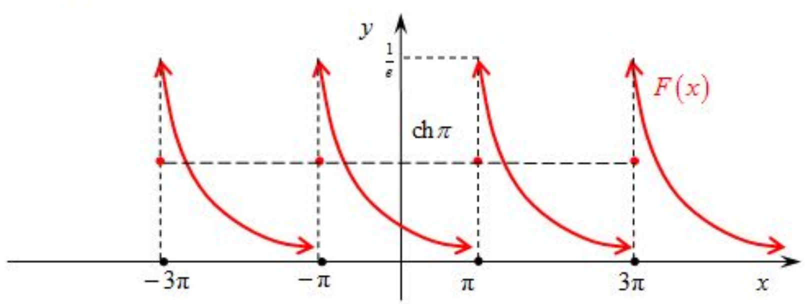
$F(x) = \bar{f}(x)$ в точках непрерывности, так как

$$\bar{f}(x)\big|_{x\in[-\pi;\pi]} = e^{-x}, \text{ то } F(x) = e^{-x} \text{ на отрезке } [-\pi;\pi].$$

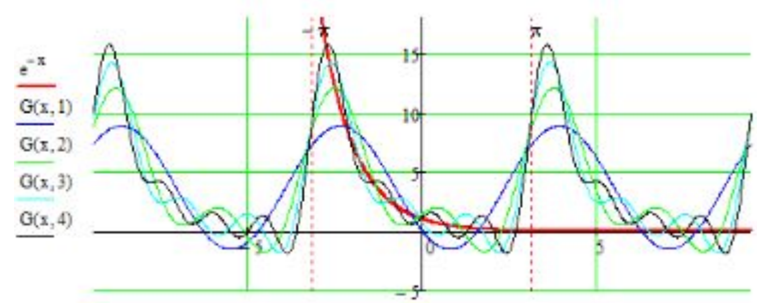
В точках разрыва:

$$F(\pi) = \frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{2} = \operatorname{ch}\pi$$

Построим эскиз графика полученного ряда и график с помощью MathCad



$$G(x,N) := \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\cdot\sum_{k=-N}^{N}\frac{(-1)^k\cdot(1-i\cdot k)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}}{1+k^2}$$



Составить ряд Фурье для функции $f(x)=|\sin x|$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ в тригонометрической и комплексной формах.

Так как функция $f(x)$ четная, то разложим ее в ряд по косинусам:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi kx}{b}$$

с коэффициентами

$$a_0=\frac{2}{b}\int_0^b f(x)\,dx\,,\quad a_k=\frac{2}{b}\int_0^b f(x)\cos\frac{\pi kx}{b}\,dx\,.$$

$$a_0=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\frac{4}{\pi}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}\,.$$

$$a_k=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos\frac{\pi kx}{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 2kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(1+2k)x+\sin(1-2k)x)\,dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(1+2k)x}{(1+2k)}+\frac{\cos(1-2k)x}{(1-2k)}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 0}{(1+2k)}+\frac{\cos 0}{(1-2k)}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1-4k^2}\,.$$

Получим ряд Фурье $F(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos 2kx$.

Используя формулу $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$, находим

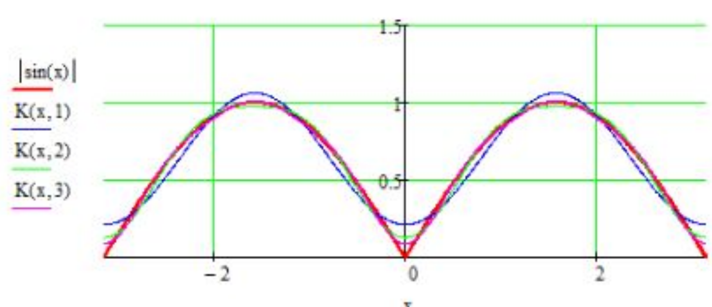
$$c_k=\frac{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4k^2}-0}{2}=\frac{2}{\pi(1-4k^2)}$$

и составляем ряд Фурье в комплексной форме

$$F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4k^2)}e^{i2kx}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2kx}}{1-4k^2}\,.$$

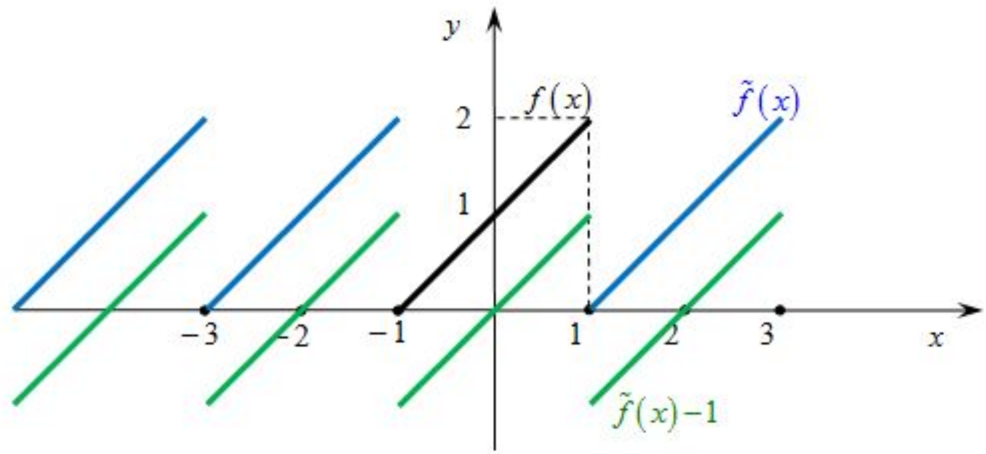
Построим ряд и график

$$K(x,N):=\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=-N}^{N}\frac{e^{i\cdot 2k\cdot x}}{1-4k^2}$$



Построить ряд Фурье для функции $f(x) = x + 1$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

1. Строим график и периодическое продолжение функции с периодом 2:



Заметим, что функция $\bar{f}\ (x) - 1$ нечетна, следовательно, ее ряд Фурье будет рядом по синусам и коэффициенты

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\bar{f}\ (x) - 1\right) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = 2\int_0^1 x \sin \pi k x dx = -2\frac{(-1)^k}{\pi k}.$$

Ряд Фурье для функции $\bar{f}\ (x) - 1$ имеет вид

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -2\frac{(-1)^k}{\pi k} \sin \pi k x = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \pi k x.$$

Для функции $\bar{f}\ (x)$ ряд Фурье найдем сдвигом полученного ряда на 1 вверх:

$$F(x) = G(x) + 1 = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \pi k x.$$

Заметим, что полученный ряд мы уже находили в примере 1.