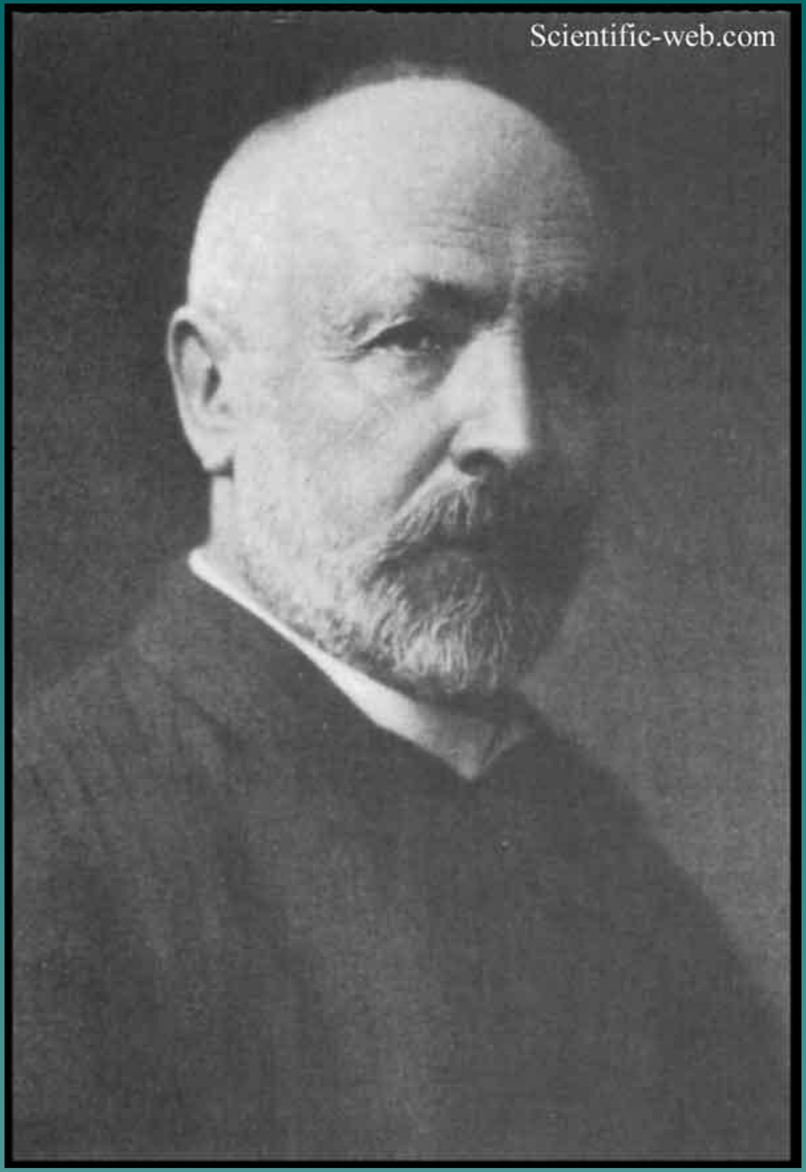
Множества. Операции над множествами.



«Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Основоположник теории множеств немецкий математик

Георг Кантор

(1845-1918)

Основные определения теории множеств. Примеры

- Понятие множества является одним из фундаментальных понятий математики, которому трудно дать определение. Дело в том, что определить понятие – это значит найти такое родовое понятие, в которое это понятие входит в качестве вида, но понятие «множество» - это самое широкое понятие математики и математической логики, т.е. **категория,** а для категории нельзя найти более широкое, т.е. родовое понятие. Ограничимся описательным объяснением этого понятия.

Основные определения теории множеств. Примеры

Множество *– это набор, совокупность каких-либо* ***вполне различаемых*** *объектов, называемых его элементами, обладающими общими для всех их и только их свойствами, и рассматриваемых как единое целое.*

Примеры:

- множество людей, живущих сейчас в России,
- множество точек данной геометрической фигуры,
- множество решений данного уравнения.
- невозможно говорить о множестве капель в стакане воды, так как невозможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю.

Структура множества

- Каждое множество состоит из того или иного набора объектов, которые называются **элементами** множества.
- Факт, что элемент *а* принадлежит множеству *Х* будем обозначать: $a \in X$.
- Порядок элементов в множестве несущественен. Множества {*а*, *в*, *с*} и {*а*, *с*, *в*} одинаковы.
- При этом, нужно иметь ввиду, что элемент *а* и множество {*а*} – это не одно и то же. Первое – это объект, обозначенный *а*, второе – это множество, состоящее из единственного элемента *а*. Поэтому можно сказать, что «*а* принадлежит { *а* }» – это истинное суждение. В то время как, «{*а*} принадлежит *а*» - это ложное суждение.

Способы задания множества

1. Перечисление элементов множества. Обычно перечислением задают конечные множества.
2. Описание свойств, общих для всех элементов этого множества, и только этого множества. Это свойство называется **характеристическим свойством**, а такой способ задания множества **описанием**. Таким образом, можно задавать как конечные, так и бесконечные множества.

Примерами множеств могут служить:

а) множество всех натуральных чисел,

б) множество всех целых чисел (положительных, отрицательных и нуля),

в) множество всех рациональных чисел,

г) множество всех действительных чисел,

д) множество площадей треугольников,

е)множество четырехугольников,

Числовые множества

1. ***Множество НАТУРАЛЬНЫХ чисел N, N={1, 2, 3, 4, 5, …}***
2. ***Множество ЦЕЛЫХ чисел Z, Z={…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …}***

$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$

3. ***Множество РАЦИОНАЛЬНЫХ чисел Q, Q={x| x=p/q, где p∈Z, q∈N}***
4. ***Множество ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ чисел I - , бесконечные непериодические дроби, (, π=3,141592…, e=2,718281, …)***
5. ***Множество ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ чисел R получено объединением РАЦИОНАЛЬНЫХ и ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ чисел.***
6. ***Множество КОМПЛЕКСНЫХ чисел C, содержащих в себе мнимую единицу i, которая является квадратным корнем из –1. Построены для***

Количество элементов множества

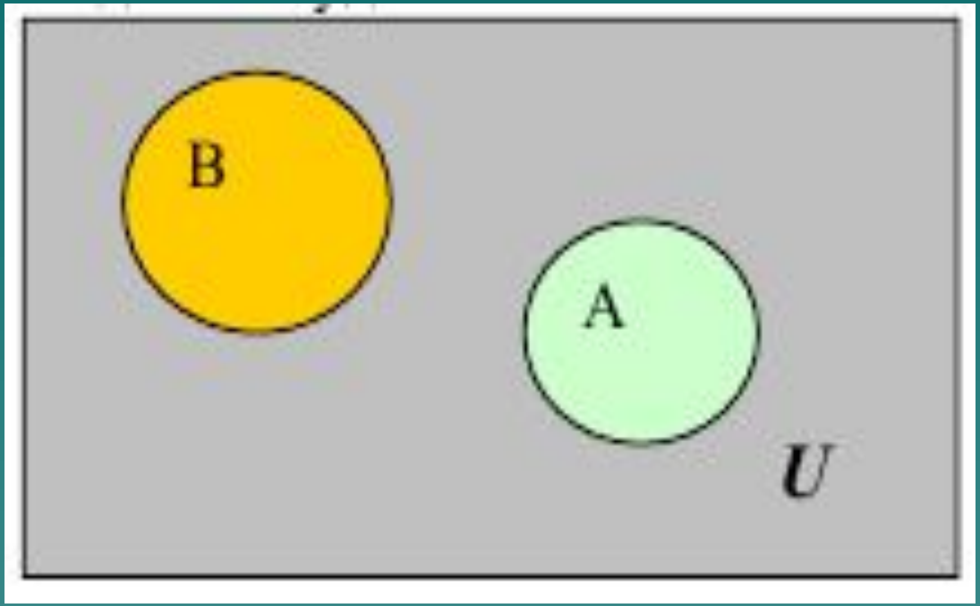
- Множества бывают конечными или бесконечными. Если число элементов множества конечно – множество называется конечным.
- *Определение:* Количество элементов, составляющих множество, называется **мощностью множества**.
- *Определение:* Если между элементами бесконечного множества можно установить взаимооднозначное соответствие с элементами множества положительных целых чисел, то говорят, что множество счетно.
- *Например*:
- множество действительных чисел - бесконечное множество.
- множество чисел, делящихся без остатка на 3 – счетное множество,
- множество букв русского алфавита, множество отличников вашей группы – конечно.

Равенство множеств

- *Определение:* Два множества равны между собой, если они состоят из одних и тех же элементов.
- Т.е. любой элемент множества X является элементом множества Y, и любой элемент множества Y является элементом множества X.

Диаграммы Эйлера-Венна

- Для наглядного представления (графического изображения) множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться так называемыми диаграммами Эйлера-Венна (кругами Эйлера).
- При этом множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника. Элементы множества – точки внутри соответствующего круга.

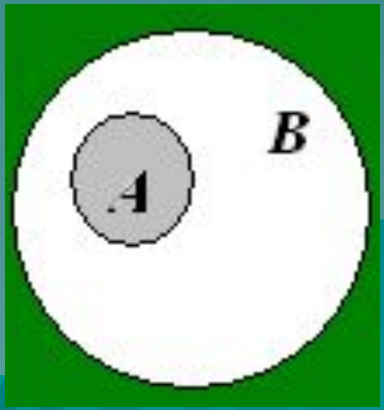


«Парадокс брадобрея".

Одному солдату было приказано брить тех и только тех солдат его взвода, которые сами себя не бреют. Неисполнение приказа в армии, как известно, тягчайшее преступление. Однако возник вопрос, брить ли этому солдату самого себя. Если он побреется, то его следует отнести к множеству солдат, которые сами себя бреют, а таких брить он не имеет права. Если же он себя брить не будет, то попадёт во множество солдат, которые сами себя не бреют, а таких солдат согласно приказу он обязан брить. **Парадокс.**

Подмножество. Включение

- <u>*Определение:*</u> Множество *A* является **подмножеством** *B*, если любой элемент множества *A* принадлежит множеству *B*. Это еще называется **нестрогим включением** $A \subseteq B$.
- <u>*Например*</u>:
- Пусть X – множество студентов некоторой группы, E – множество отличников этой же группы.
- $E \subseteq X$ т.к. группа может состоять только из отличников.
- Когда хотят подчеркнуть, что в множестве *B* есть обязательно элементы, отличные от элементов множества *A*, то пишут $A \subset B$. Это называется **строгим включением**.
- <u>*Например*</u>:
- Пусть X – множество всех студентов ВлГУ, E – множество студентов педагогического института.
- $E \subset X$ т.к. в множестве всех студентов ВлГУ обязательно есть элементы $\notin$ E.



Пустое множество $\varnothing$

- Если характеристическим свойством, задающим множество, А не обладает ни один объект, то говорят, что множество А пустое.
- Понятие пустого множества очень важное понятие. Оно позволяет описательно задавать множества, не заботясь, есть ли в этом множестве элементы и совершенно спокойно оперировать с этими множествами. Пустое множество будем считать конечным множеством.
- *Например*: множество действительных корней уравнения

$$x^2 = -1$$

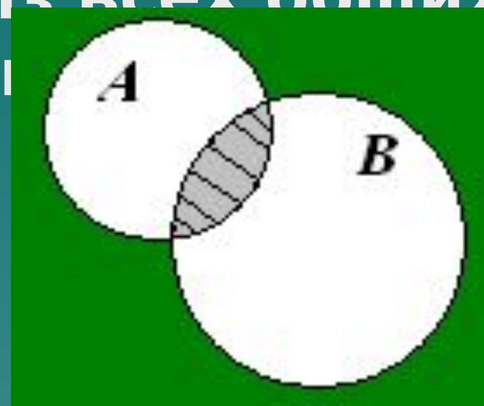
пустое.

Операции над множествами

1. Пересечение множеств A∩B

Пересечением множества А и В называют множество,

состоящие из всех общих элементов множеств А и



Например,

а) А = {3; 9; 12} и В = {1; 3; 5; 7; 9; 11}, то А∩В = {3; 9};

б) А = {10; 20; ... ; 100} и В = {6; 12; 18; ...}, то

Непересекающиеся множества

- _Определение:_ Множества называются непересекающимися, если не имеют общих элементов, т.е. их пересечение равно пустому множеству.
- _Например_:

а) непересекающимися множествами являются множества отличников группы и неуспевающих.

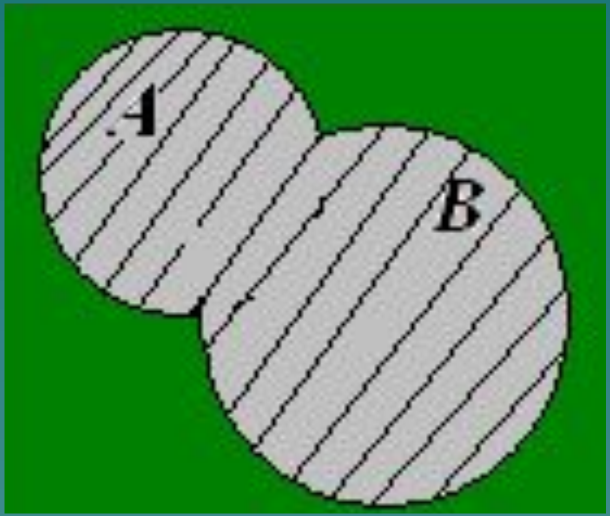
б) непересекающимися множествами являются множества **A = {3; 9; 12} и B = {1; 5; 7; 11}.**

Свойства пересечения

- **$X \cap Y = Y \cap X$ – коммутативность;**
- **$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ – ассоциативность;**
- **$X \cap \varnothing = \varnothing$;**
- **$X \cap I = X$;**

2. Объединение множеств AUB

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.



Например,

A = {3; 9; 12} и B = {1; 3; 5; 7; 9; 11}, AUB=?

AUB = {1; 3; 5; 7; 9; 11; 12}.

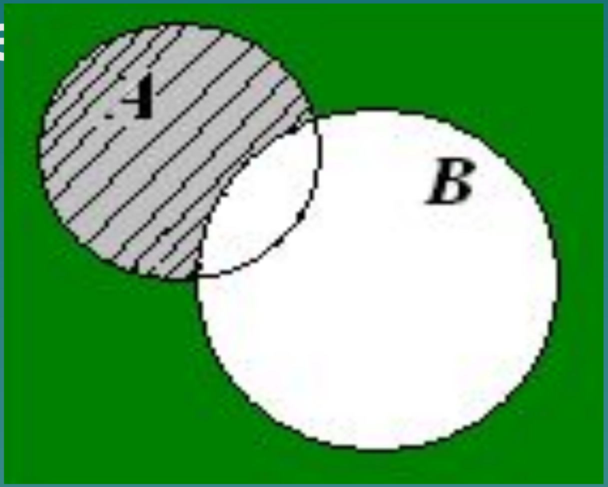
Свойства объединения

- **XUY= YUY- коммутативность;**
- **(X UY)UZ =XU (YUZ)=XUYUZ – ассоциативность;**
- **XU∅ = X;**
- **XU*I* = *I*.**

3. Разность множеств А\ В

Разность А и В это множество элементов А, не

принадле



Например,

А = {2; 4; 6; 8; 10} и В = {5; 10; 15; 20},

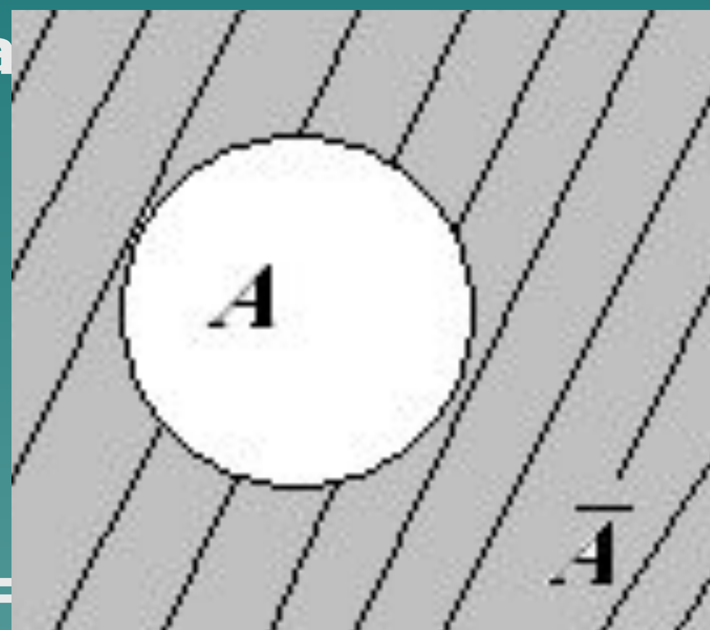
А\ В={2; 4; 6; 8}.

Свойства операции разности

- $A \setminus B \neq B \setminus A$;
- $A \setminus A = \varnothing$;
- $A \setminus \varnothing = A$;
- $I \setminus A = \bar{A}$.

4. Дополнение множеств Ā

Дополнением множества А называется разность *I* \ А. То есть, дополнением множества А называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не принадлежа



Например, А = **N= {1; 2; 3; 4; 5; 6; …}, А=?**

Ā = {1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; …}.

Свойства дополнения

1. Множество X и его дополнение не имеют общих элементов $X \cap \overline{X} = \varnothing$

2. Любой элемент I принадлежит или множеству X или его дополнению. $X \cup \overline{X} = I$

3. Закон двойного отрицания $\overline{\overline{X}} = X$

Декартово произведение множеств

Фабрика верхнего трикотажа изготовляет мужские пуловеры, женские костюмы, кофты и платья следующих расцветок: бордо, синяя, голубая, зеленая, коричневая, серая.

Посмотрим, какие изделия можно получить, учитывая возможные для них расцветки.

Обозначим через А множество видов изделий: А={мужской пуловер, женский костюм, кофта, платье}, через В – множество предлагаемых расцветок: В={бордо, синяя, голубая, зеленая, коричневая, серая}.

Составим список всех пар из элементов множества А и элементов множества В таким образом, что сначала будем записывать элемент множества А, затем элемент множества В. получим множество С упорядоченных пар элементов множеств А и В. Возможные изделия можно перечислить с помощью таблицы.

Декартово произведение множеств

A B	Мужской пуловер	Женский костюм	Кофта	Платье
Бордо	Пуловер-бордо	костюм-бордо	Кофта-бордо	Платье-бордо
Синяя	Пуловер-синий			
Голубая				
Зеленая			Кофта-зеленая	
Коричневая				Платье-коричневое
Серая		Костюм-серый		

Определение декартова произведения

Декартовым (или прямым) произведением $A \times B$ множества A на множество B называется множество всех упорядоченных пар, в которых первая компонента – элемент множества A, а вторая – элемент множества B.

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Количество элементов в декартовом произведении двух множеств:

если $m(A)=n$, $m(B)=k$, то $m(A \times B)=n \cdot k$.

Пример декартова произведения

Вычислить количество двухзначных чисел.

Двухзначное число можно принять за упорядоченную пару, где на первом месте может стоять цифра из множества A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, а на втором – из множества B={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, т.е. за элемент прямого произведения этих множеств, тогда получаем: $m(A)=9$, $m(B)=10$, то $m(A\times B)=9\cdot 10=90$.

Итак, всего имеется 90 различных двухзначных чисел.

Соответствие множеств

- **Определение.** Будем говорить, что между элементами двух множеств A и B установлено соответствие ρ, если в их произведении A×B выделено некоторое подмножество Ω. Если пара $(a,b)\in\Omega\subseteq A\times B$, это означает по определению, что элементы a и b множеств A и B находятся в отношении ρ (пишется $a\rho b$).
- **Пример соответствия.** Пусть даны множества A – студентов и B – множество групп. Утверждение “студент a учится в группе b” задает соответствие между множеством студентов и множеством групп. Здесь a пробегает множество значений A, b – множество значений B. Такое соотношение называется бинарным соответствием, т.е. соответствием между двумя множествами A и B.

Пример соответствия множеств

Бинарные соответствия можно задавать таблицами (например, расписание занятий) или ориентированными графами.

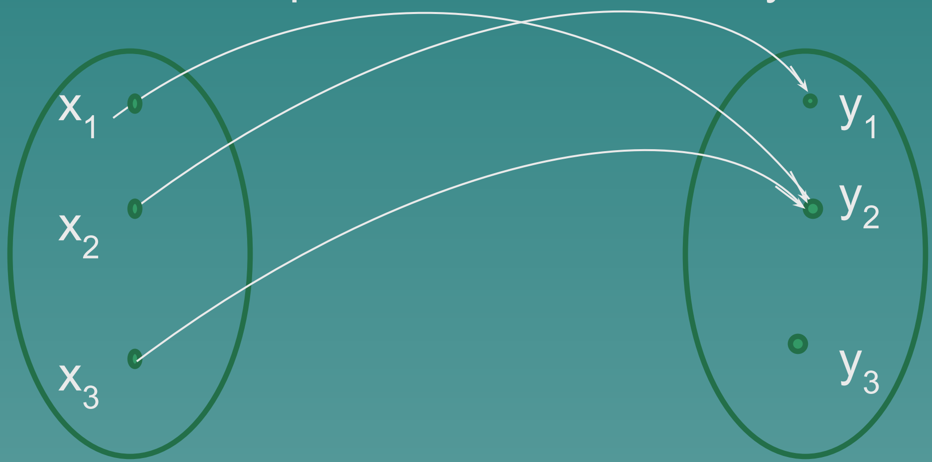
Группы / Студенты	1	2	3
Иванов			
Петров			
Сидоров			

Отображение множеств f: X⟶Y

Определение. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то такое соответствие называется отображением множества X в множество Y. Т.е., каждому элементу x соответствует только один элемент y.

При таком отображении множества X в множество Y, элемент $y \in Y$ называется **образом** элемента $x \in X$, а элемент $x \in X$ называется **прообразом** элемента $y \in Y$.

Пример. Пусть X – множество студентов в аудитории, Y – множество столов в этой аудитории. Соответствие “студент x сидит за столом y” задает отображение множества X в множество Y, так как все студенты сидят за столом, иногда по двое, по трое и т.д., но есть и пустые столы.



Сюръективное отображение

Определение. Если при отображении f каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента из X, то f называют отображением X на Y или сюръективным (рис.15).

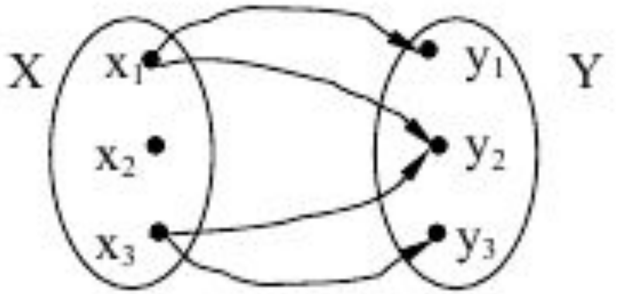


Рис.15

Пример 3.5 Пусть X – множество студентов, Y – множество книг. Соответствие "студенту *x* принадлежит книга *y*" задает сюръективное отображение множества X на множество Y. Это очевидно, так как каждая книга принадлежит одному или нескольким студентам, а некоторые студенты книг не имеют.

Инъективное отображение

Определение. Если при отображении f все различные элементы множества X переходят в различные элементы множества Y, то отображение f называется инъективным отображением (рис.16).

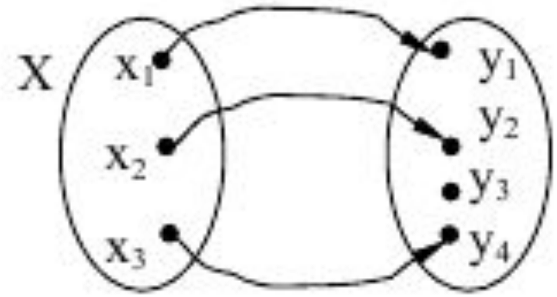


Рис.16

Пример 3.6 Пусть X – множество студентов, Y – множество стульев. Соответствие “студент *x* сидит на стуле *y*” задает инъективное отображение между множествами X и Y. Это очевидно, так как все студенты сидят на стульях, причем каждый на своем, но в аудитории есть и пустые стулья.

Взаимно-однозначное соответствие

Определение. Если при отображении f каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один элемент $y \in Y$, при этом соответствии каждому элементу $y \in Y$ соответствует единственный элемент $x \in X$, то такое отображение называется взаимно-однозначным (рис.17).

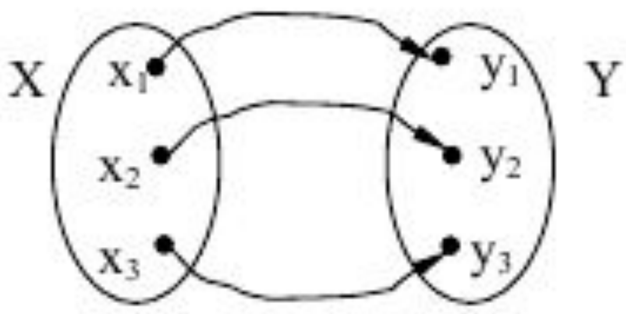


Рис.17

Пример 3.7 Пусть X – множество студентов, Y – множество зачетных книжек. Соответствие "студенту *x* принадлежит зачетная книжка *y*" задает взаимно-однозначное отображение между множествами X и Y. Это очевидно, так как все студенты имеют зачетные книжки, причем каждый только одну и каждая зачетная книжка принадлежит своему студенту.

Задания

Задание 1

1) Задайте множество цифр, с помощью которых записывается число:

а) 3254; б) 8797; в) 11000; г) 555555.

2) Задайте множество А описанием:

а) А = {1, 3, 5, 7, 9}; б) А = {- 2, - 1, 0, 1, 2};

в) А = {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99};

г) А = {0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; …};

д) А = {1/2, 2/3, 3/4, 4/5, … }.

3) Задание с выбором ответа. Даны множества: М = {5,4,6}, Р = {4,5,6}, Т = {5,6,7}, S = {4, 6}.

Какое из утверждений неверно?

а) М = Р. б) Р ≠ S. в) М ≠ Т. г) Р = Т.

Задание 2

1. Запишите на символическом языке следующее утверждение:

   а) число 10 – натуральное;

   б) число – 7 не является натуральным;

   в) число – 100 является целым;

   г) число 2,5 – не целое.

2. Верно ли, что:

   а) $-5 \in N$; б) $-5 \in Z$; в) $2,(45) \in Q$?

3. Верно ли, что:

   а) $0,7 \in \{x \mid x^2 - 1 < 0\}$; б) $-7 \in \{x \mid x^2 + 16x \leq -64\}$?

Задание 3

1. Даны множества:

A = {10}, B = {10, 15}, C = {5, 10, 15}, D = {5, 10, 15, 20}.

Поставьте вместо … знак включения ($\subset$ или $\supset$) так, чтобы получилось верное утверждение:

а) A … D; б) A … B; в) C … A; г) C … B.

2. Даны три множества A = {1, 2, 3, …, 37}, B = {2, 4, 6, 8, …},

C = {4, 8, 12, 16, …, 36}.

Верно ли, что:

а) A $\subset$ B; б) B $\subset$ C; в) C $\subset$ A; г) C $\subset$ B?

Задание 4

1. Даны множества: А = {2; 3; 8}, В = {2; 3; 8; 11},
   С = {5; 11}.
   Найдите: 1) $A \cap B$; 2) $A \cap C$; 3) $C \cap B$.

2. Даны множества: А – множества всех натуральных чисел, кратных 10, В = {1; 2; 3;…, 41}.
   Найдите $A \cap B$.

3. Даны множества: А = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f},
   C = {c, e, g, k}. Найдите $(A \cap B) \cap C$.

Задание 5

1. Даны множества: A = {2; 3; 8}, B = {2; 3; 8; 11}, C = {5; 11}.

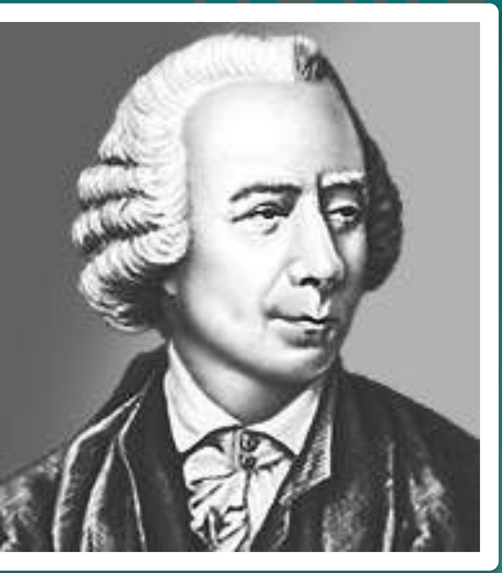
   Найдите: 1) AUB; 2) AUC; 3) CUB.

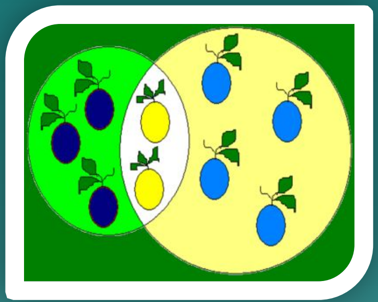
2. Даны множества: A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f},

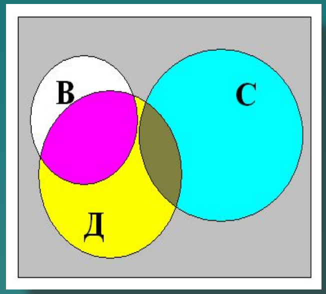
   C = {c, e, g, k}.

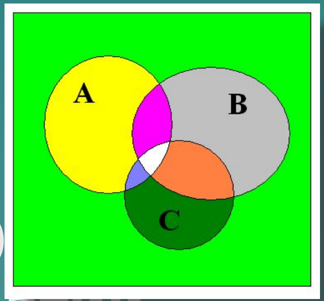
   Найдите (AUB)UC.

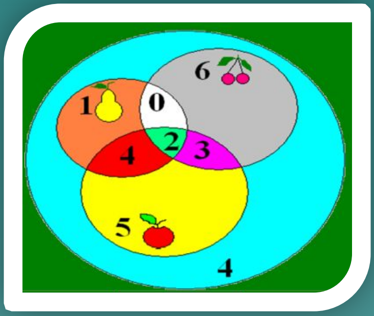
Решение задач с помощью кругов Эйлера







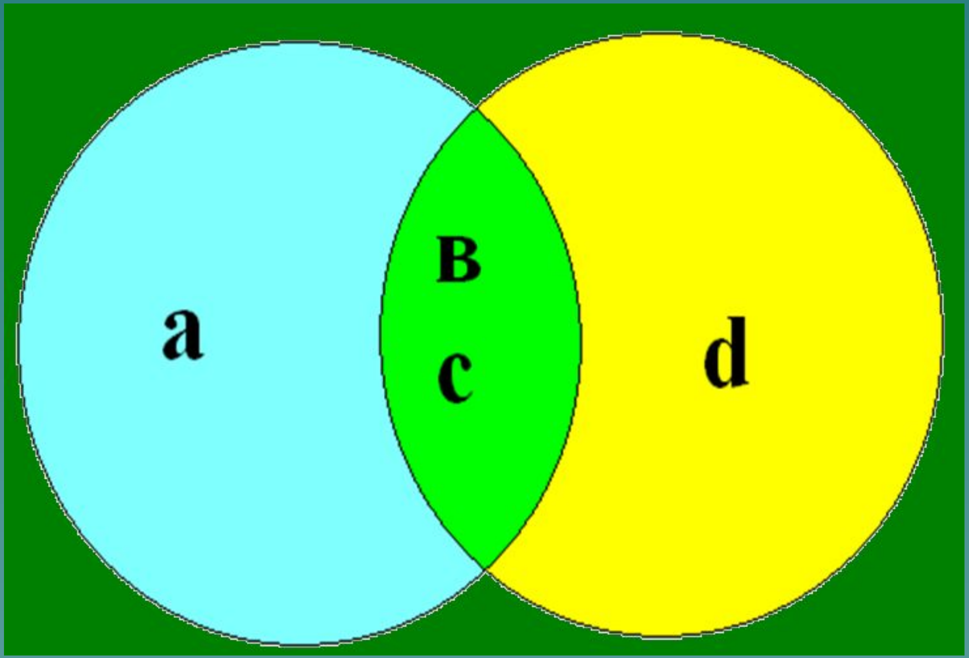




ЭЙЛЕР Леонард (1707-1783) российский ученый — математик, механик, физик и астроном.

Задача 1

Расположите 4 элемента в двух множествах так, чтобы в
каждом из них было по 3 элемента.

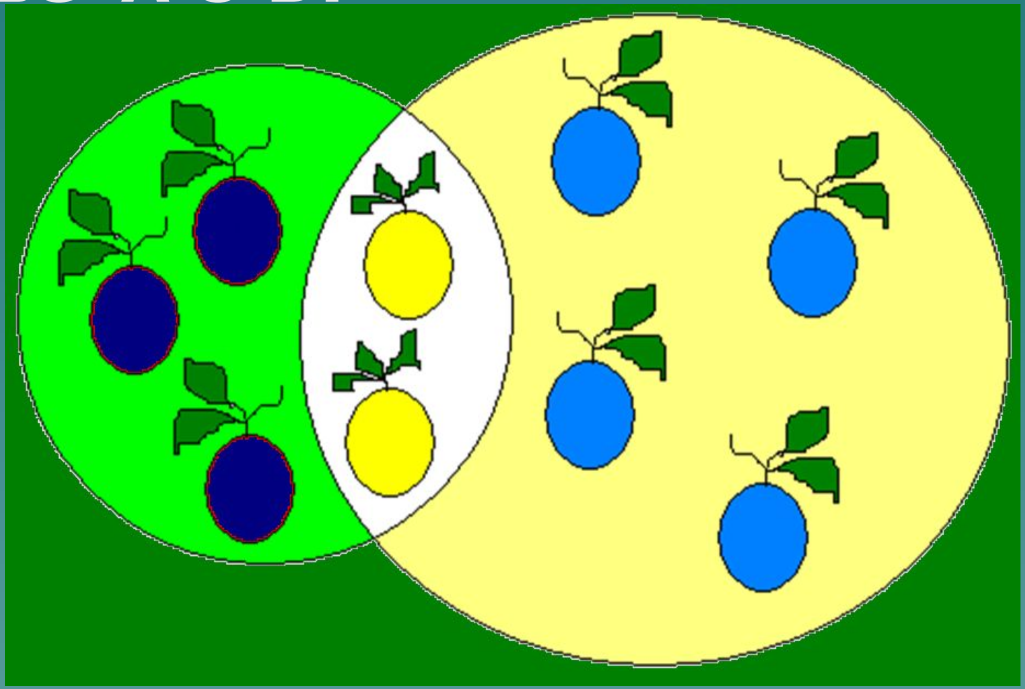


Задача 2

Множества А и В содержат соответственно 5 и 6 элементов,

а множество А ∩ В – 2 элемента. Сколько элементов в

множестве А U В?



Задача 3

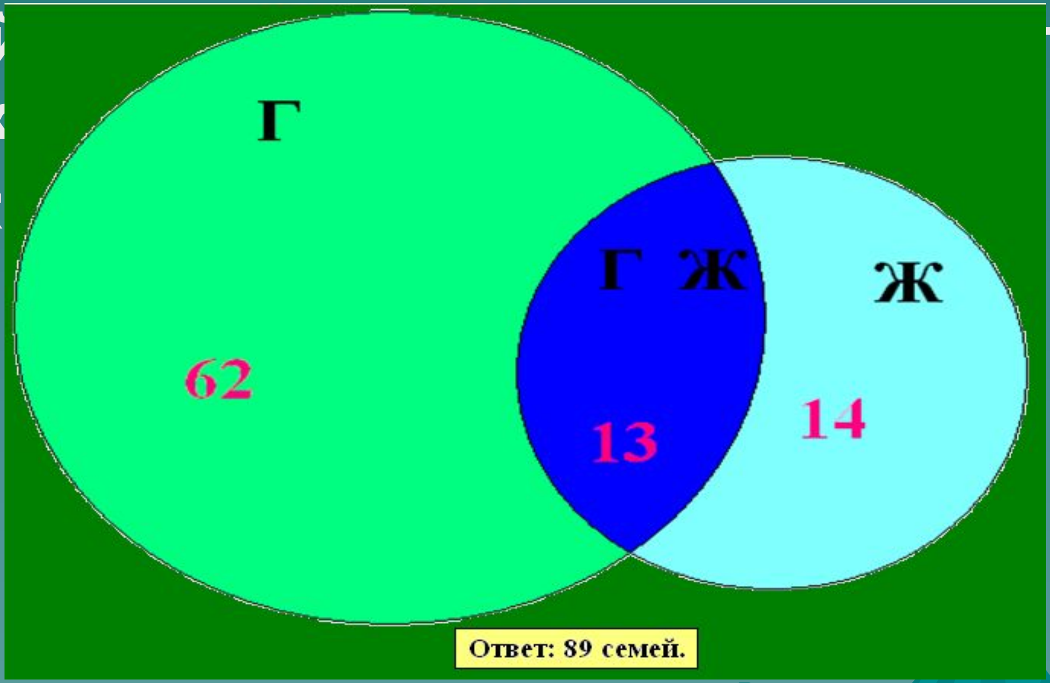
Каждая семья, живущая в нашем доме, выписывает или

газету, или журнал, или и то и другое вместе. 75 семей

выписывают газету, а 27 семей выписывают журнал и лишь

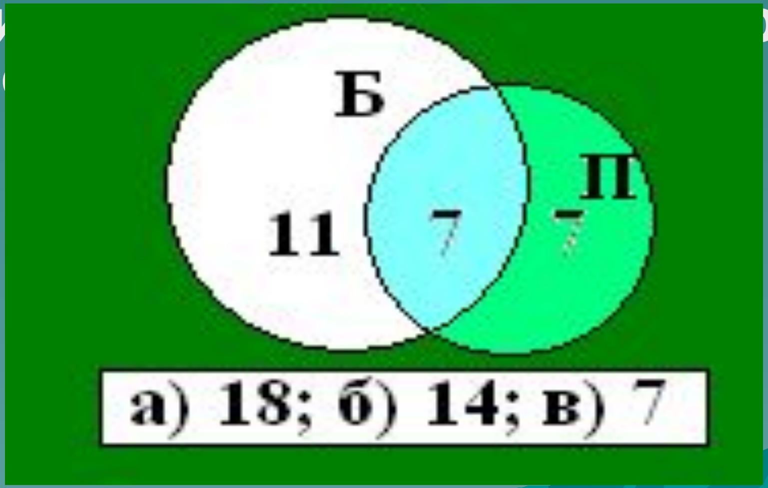
13 семей ... газету. Скольк...

семей ж...



Задача 4

На школьной спартакиаде каждый из 25 учеников 9 –го
класса выполнил норматив или по бегу, или по прыжкам в
высоту. Оба норматива выполнили 7 человек, а 11 учеников
выполнили норматив по бегу, но не выполнили норматив
по прыжкам в высоту. Сколько учеников выполнили
норматив: а) по бегу; б) по прыжкам в высоту; в) по
прыжкам при … олнен норматив по …



Задача 5

Из 52 школьников 23 собирают значки, 35 собирают марки,

а 16 – и значки, и марки. Остальные не увлекаются

коллекционированием. Сколько школьников не

увлек

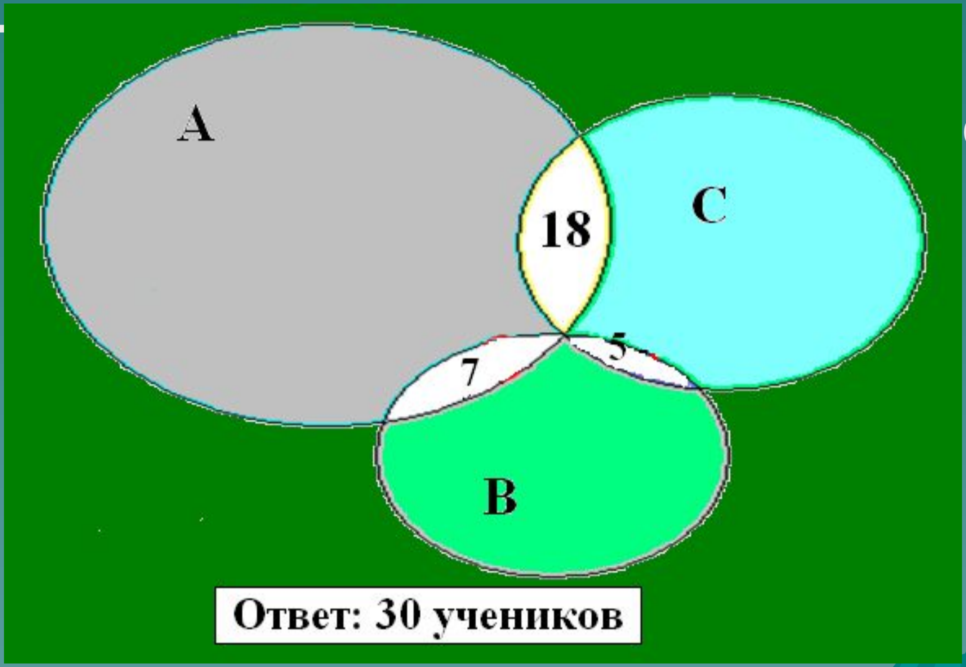
Задача 6

Каждый из учеников 9-го класса в зимние каникулы ровно

два раза был в театре, посмотрев спектакли A, B или C. При

этом спектакли A, B, C видели соответ

ученика. се?



Задача 7

В воскресенье 19 учеников нашего класса побывали в

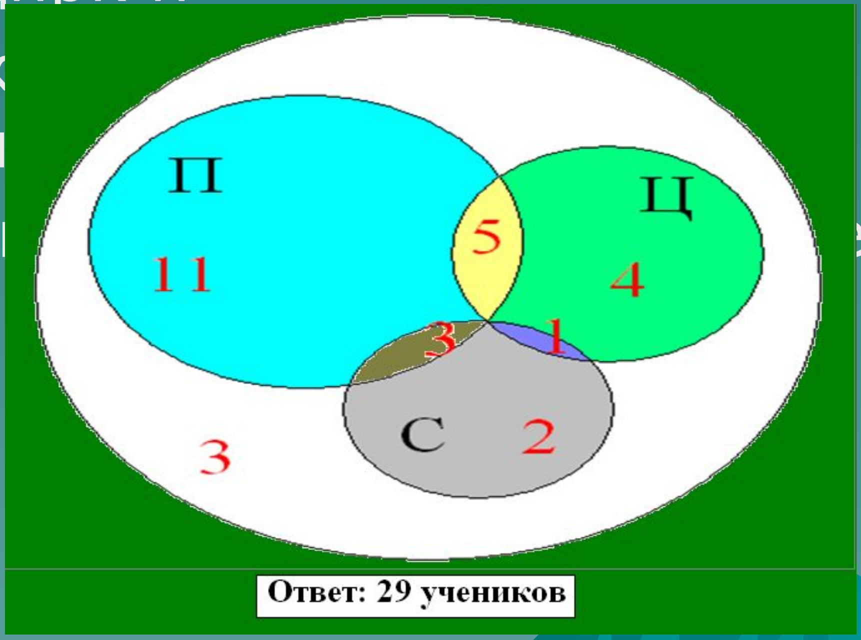
планетарии, 10 – в цирке и 6 – на стадионе. Планетарий и

цирк посетили 5 учеников; планетарий и стадион-3; цирк и

стадион -1. Ск классе, если никто н

успел посетит еника не посетили ни

одного места?



Задача 8

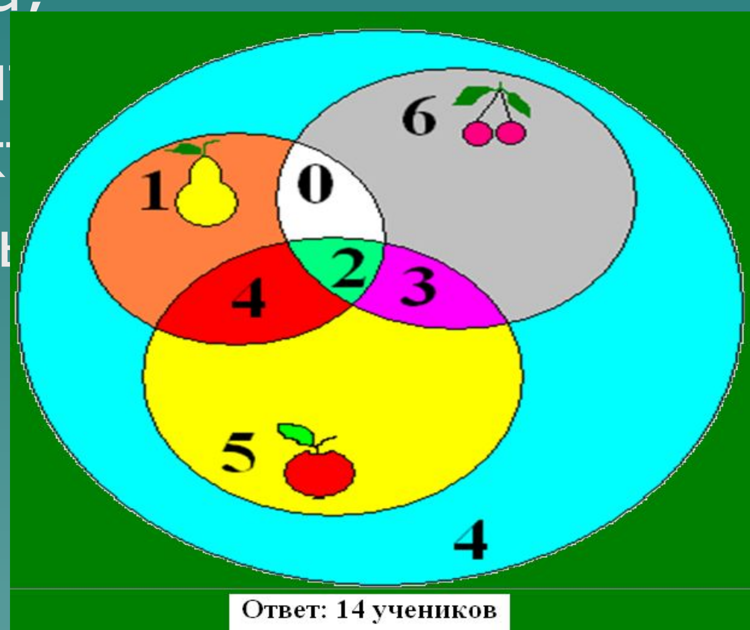
В одном классе 25 учеников. Из них 7 любят груши,

11 – черешню. Двое любят груши и черешню; 6 – груши и

яблоки; 5 – яблоки и черешню. Но есть в классе два ученика,

которые любя … , что не любят фрукт

вообще. Сколь … асса любят яблоки?



Задача 9

На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40

учеников 9 –го класса читал книги А, В, С. Результаты

опроса выглядели так: книгу А прочитали 25 учеников,

книгу В – 22 ученика, книгу С – 22 ученика; одну из книг А

или В прочитали 33 ученика, одну из книг А или С

прочитали 32 ученика, одну из книг В или С – 31 ученик.

Все три книги прочитали 10 учеников.

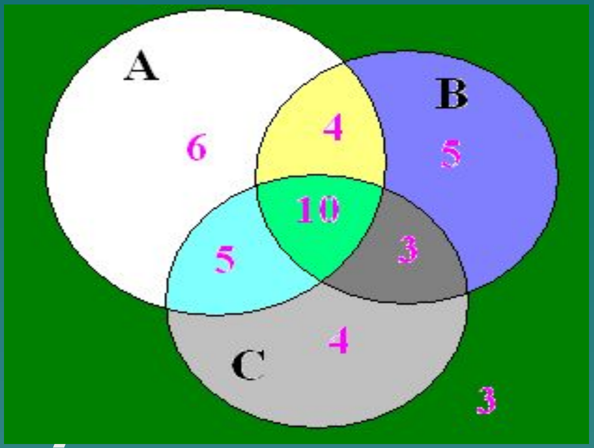
Сколько учеников:

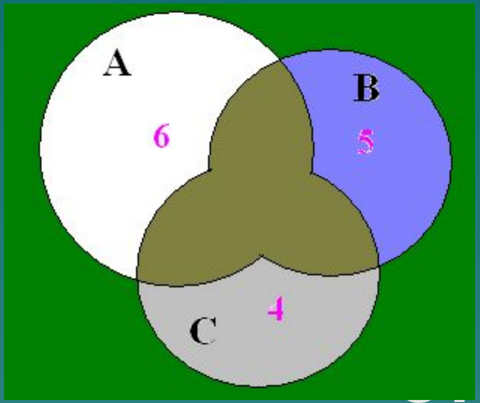
а) прочитали только по одной книге;

б) прочитали ровно две книги;

в) не прочили ни одной из указанных книг?

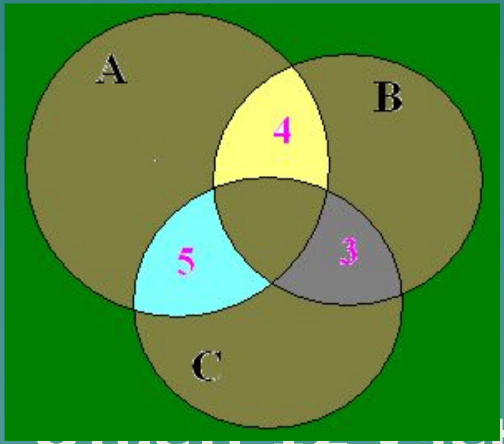
Задача 9. Решение





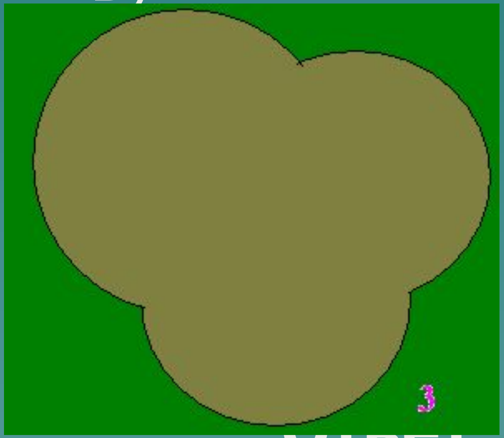
Ответ: 15

б)



Ответ 12 учеников

в)

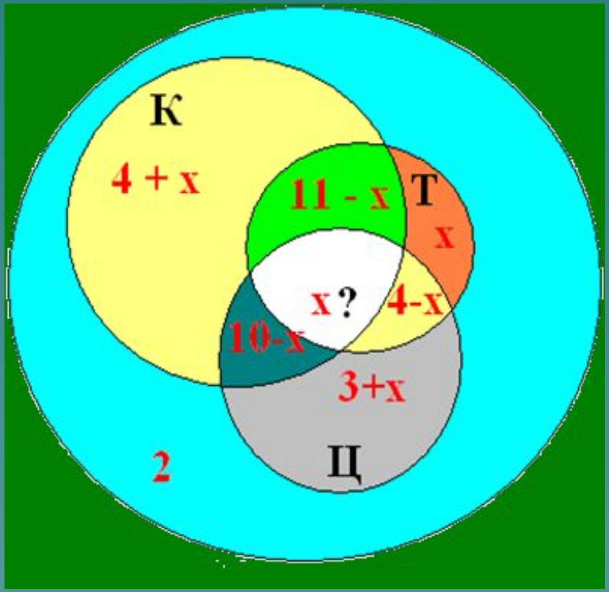


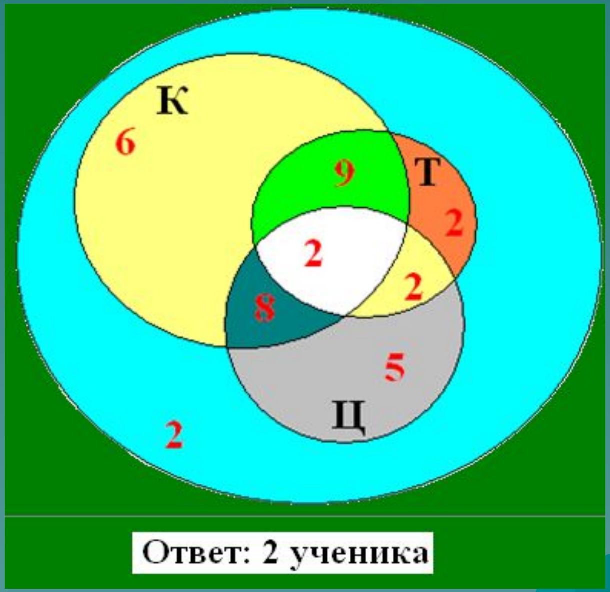
Ответ: 3

ученика

Задача 10

На зимних каникулах из 36 учащихся класса только двое просидели дома, а 25 ребят ходили в кино, 15 – в театр, 17 – в цирк. Кино и театр посетили 11 человек, кино и цирк – 10, театр и цирк – 4.
Сколько ребят побывало и в кино, и в театре, и в цирке?





Литература

[1] Алгебра, 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович, Л.А. Александрова и др.] -12-е изд., испр. - М.: Мнемозина, 2010.

[2] Занимательная математика. 5 – 11 классы. Авт.- сост. Т.Д. Гаврилова. – Волгоград: Учитель, 2005. – 96 с.

[3] Математика 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова и др./; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». – 11 –е изд. - М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил.

Связь между алгеброй логики и теорией множеств

- Дело в том, что термин **алгебра** в своем роде имя нарицательное. Под ним понимается раздел математики, изучающий алгебраические операции, а природа объектов, к которым применяются эти операции, не важна. Говоря об алгебре логики или об алгебре множеств, мы более всего уделяли внимание операциям, определенным над допустимыми в данной теории объектами, свойствам этих операций. Еще одним хорошо известным вам примером алгебры, является **алгебра чисел**, к которой все выписанные законы также применимы. Проводя аналогии между этими алгебрами, мы можем сказать

№ 5.

В классе 30 человек, каждый из которых поёт или танцует. Известно, что поют 17 человек, а танцевать умеют 19 человек. Сколько человек поёт и танцует одновременно?

Решение 1.

Пусть А - это множество учеников, умеющих петь. Количество элементов в нём по условию равно n = 17. Пусть В - множество учеников, умеющих танцевать. Количество элементов в нём - m = 18. Множество $A \cup B$ совпадает со всем классом, т.к. каждый ученик в классе поёт или танцует. $A \cap B$- это множество тех учеников класса, которые поют и танцуют одновременно. Пусть их количество равно k.

Согласно формуле доказанной выше

n + m- k = 17+ 19- k = 30 k = 6.

Ответ: 6 учеников в классе поют и танцуют одновременно.

Решение 2.

Сначала заметим, что из 30 человек не умеют петь 30 - 17 = 13 человек. Все они умеют танцевать, т.к. по условию каждый ученик класса поёт или танцует. Всего умеют танцевать 19 человек, из них 13 не умеют петь, значит, танцевать и петь одновременно умеют 19-13 = 6 человек.

№6

На фирме работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 - немецкий язык, а 23 - оба языка. Сколько человек в фирме не знают ни английского, ни немецкого языков?

Решение.

$n(A) = 47$ – знают английский язык

$n(B) = 35$- знают немецкий язык

$n(C) = x$ – не знают ни английский, ни немецкий язык

$n(A \cap B) = 23$ – знают английский и немецкий языки

$n(A \cup B \cup C) = 67$ – работники фирмы

$67 = 47 + 35 - 23 + x$ $\qquad$ $x = 8$

Ответ: 8 человек не знают ни английский, ни немецкий язык.

№ 7.

Изобразите с помощью кругов Эйлера пересечение множеств K и M, если:

а) $K \subset L$

б) $L \subset K$

в) $K = L$

г) $K \cap L = \varnothing$

Решение задачи с помощью кругов Эйлера.