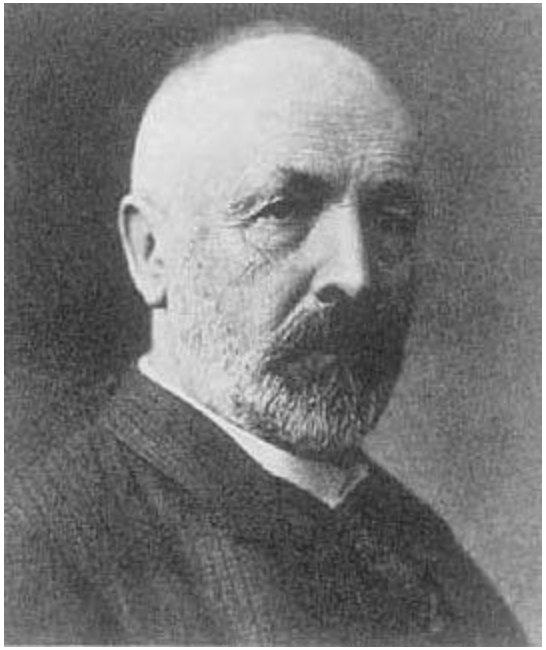
ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Основные понятия теории множеств

Понятие множества является одним из исходных (аксиоматических) понятий математики, то есть не сводимое к другим понятиям, а значит и не имеющее определения. Однако, можно дать описание множества.



Множество **– некоторая совокупность объектов, называемых элементами этого множества.**

Основатель теории множеств - Георг Кантор, немецкий математик, 1845-1918.

Множества

по числу содержащихся в них элементов делятся на 2 вида

конечные, содержат конечное число элементов

бесконечные, содержат конечное число элементов

В данном курсе рассматириваются конечные множества и бесконечные счетные множнства, т.е. такие множества элементы которых можно пересчитать с помощью натуральных чисел.

1.1 Способы задания множеств

Множества обозначают большими латинскими буквами:

$$A, B, C, \ldots$$

Элементы множеств обозначают малыми латинскими буквами:

$$a, b, c, \ldots$$

Если элемент a *принадлежит* множеству A, то пишут:

$$a \in A$$

Если элемент a *не принадлежит* множеству A, то пишут:

$$a \notin A$$

Способы задания множеств:

1. Множество *A* определяется перечислением всех своих элементов:

Пример: V = {a, e, i, o, u, õ, ä, ö, ü}

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

2. Множество *A* определяется частичным перечислением своих элементов, которое выражает какую-то определенную закономерность:

Пример:

Z = {..., -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...} – множество целых чисел

N = {0, 1, 2, 3, ...}- множество натуральных чисел

3. Множество *A* определяется как совокупность элементов из множества T, которые обладают свойством α:

$$\mathbf{A = \{x \in T \mid \alpha(x)\},}$$

где запись α(*x*) означает, что элемент *x* обладает свойством α.

Пример:

$B = \{x \in N \mid x \bmod 2 = 0\}$ – множество четных натуральных чисел

$C = \{a \in N \mid a$ – простое число$\}$ – множество простых чисел

$D = \{n \in N \mid n > 1000 \ \& \ n < 2000\}$ – множество натуральных чисел больших 1000, но меньших 2000

1.2 Операции над множествами (теоретико-множественные операции)

Равенство множеств:

Множества *A* и *B* *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов:

$$\{1, 3, 5\} = \{5, 1, 3\}$$

Подмножество:

Множество *A* является *подмножеством* множества *B*,

$$A \subset B,$$

если каждый элемент множества *A* принадлежит в то же время и множеству *B*:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B\,)$$

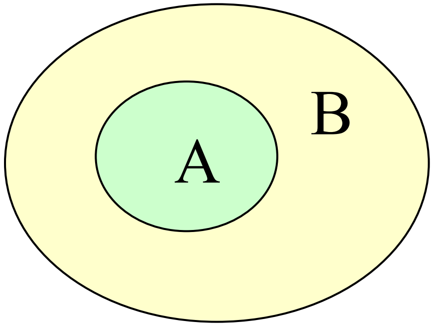


диаграмма Эйлера - Венна

Свойства:

1. $\forall A\ (A \subset A)$
2. $(A \subset B)\ \&\ (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$

по определению равенства множеств:

$A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B\ \ \&\ \ \forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$

Пустое множество:

Множество, которое не содержит ни одного элемента называется *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$

$$\varnothing = \{\ \}.$$

Свойство:

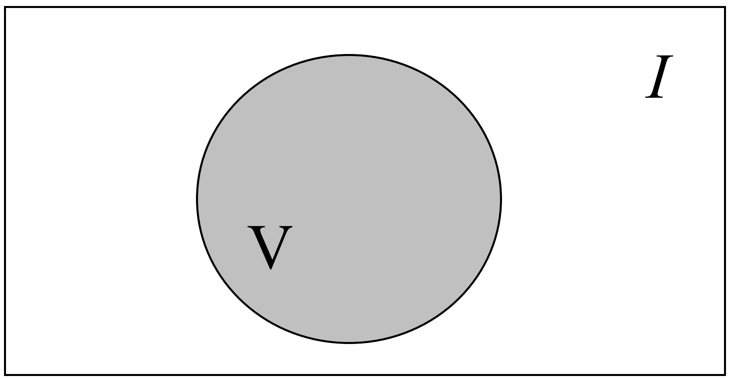
Пустое множество является подмножеством любого множества: $\forall A\ (\varnothing \subset A)$

Универсальное множество *I*:

Множество, которое содержит все возможные элементы, рассматриваемые в данном контексте.

Пример: V = {a, e, i, o, u, õ, ä, ö, ü} – множество гласных букв

I = {множество всех букв}

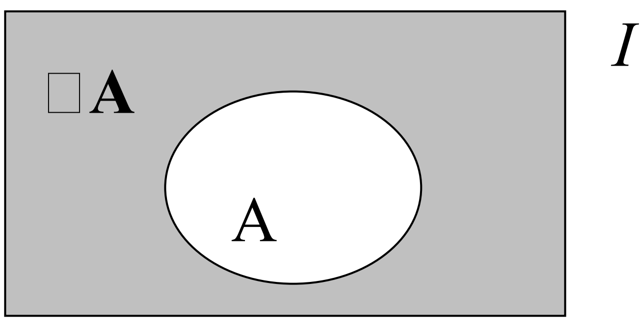


Каждое множество A является подмножеством универсального множества:

$$\forall A \, (A \subset I)$$

Дополнение множества:

Элементы универсального множества *I*, не принадлежащие к множеству *A*, образуют *дополнение* множества *A* относительно универсального множества *I*,
которое обозначают □A



$\square\mathbf{A} = \{x \in I \mid x \notin \mathbf{A}\}$

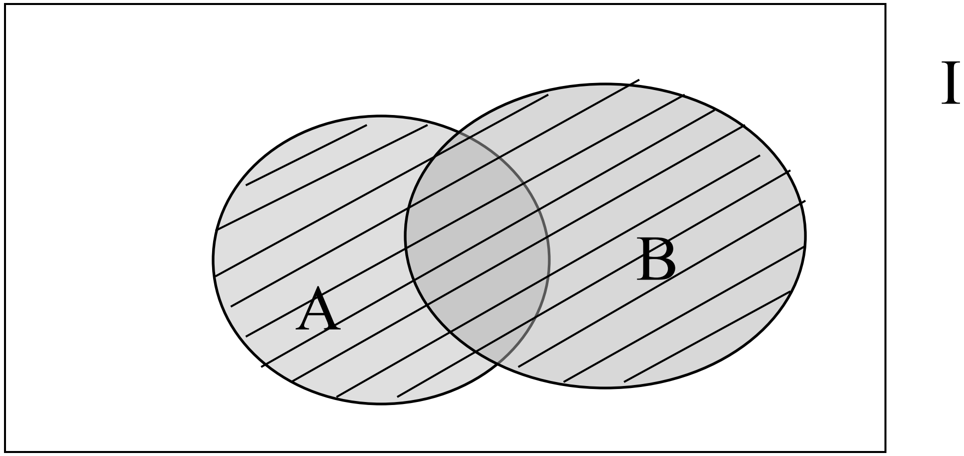
Пример: дни недели делятся на будничные и выходные дни

$$I = \{E,T,K,N,R,L,P\}$$
$$A = \{L,P\}$$
$$\square\mathbf{A} = \{E,T,K,N,R\}$$

Объединение (сумма) множеств:

Объединение множеств *A* и *B* состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* или *B*:

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ или } x \in B \,\} = A + B$$



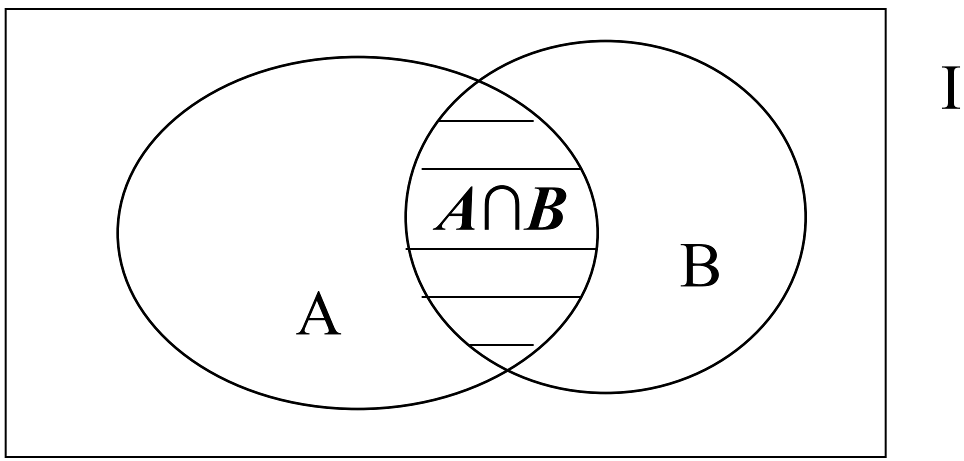
Пример:

$$\{1, 4, 7\} \cup \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 4, 6, 7\}$$

Пересечение (общая часть, умножение) множеств:

Пересечение множеств *A* и *B* состоит из элементов, принадлежащих одновременно множеству *A* и множеству *B*:

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ и } x \in B \,\} = AB$$



Пример:

$\{1, 4, 7\} \cap \{2, 4, 6, 7\} = \{4, 7\}$

Непересекающиеся множества:

Если $A \cap B = \varnothing$, то множества A и B ***непересекающиеся*** **множества.**

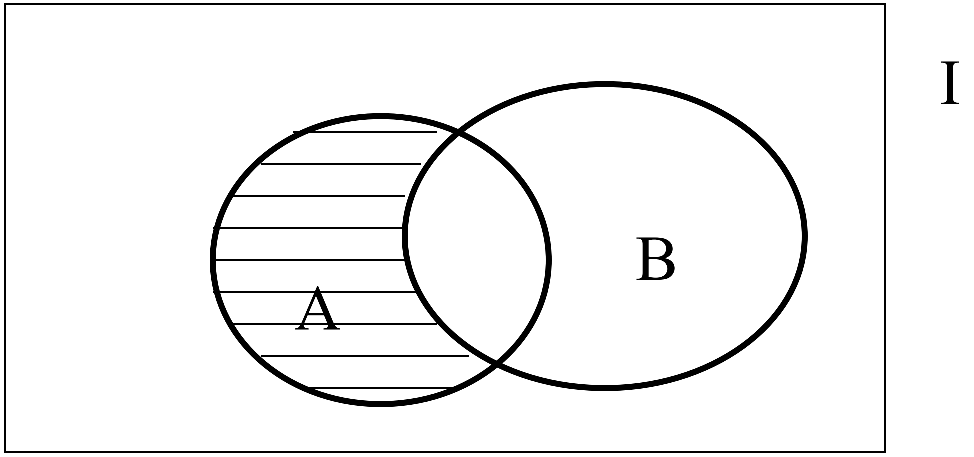
Пример:

$$\{1, 4, 7\} \cap \{2, 3, 6\} = \varnothing$$

Разность множеств:

Разность **множеств** ***A*** **и** ***B*** **состоит из элементов, принадлежащих множеству** ***A*** **и не принадлежащих множеству** ***B:***

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}$$



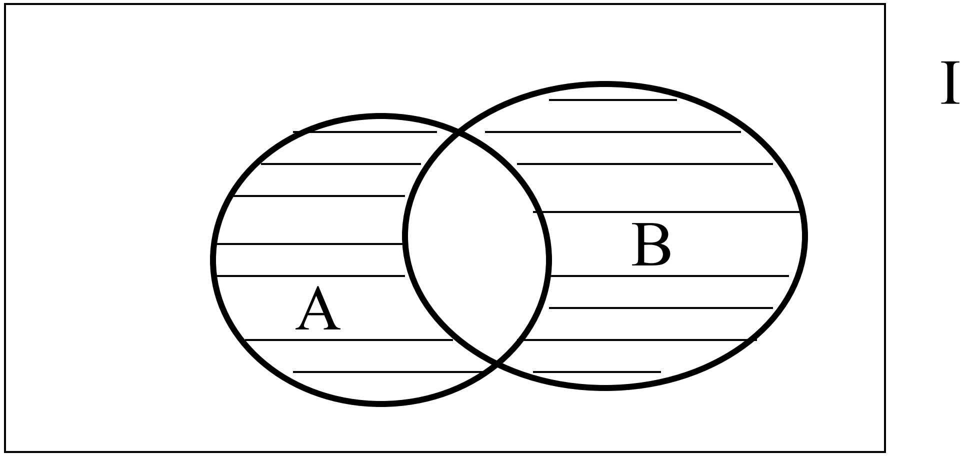
Пример:

{1, 4, 7} \ {2, 4, 6, 7} = {1}

Симметрическая разность множеств:

Симметрическая разность множеств *A* и *B* состоит из элементов принадлежащих множеству *A* или множеству *B*, но не принадлежащих множествам *A* и *B* одновременно:

$$A \nabla B = \{\, x \mid (x \in A) \,\&\, (x \notin B) \;\vee\; (x \notin A) \,\&\, (x \in B) \,\}$$



Пример:

$\{1, 4, 7\} \nabla \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 6\}$

Приоритет выполнения операций

Сначала выполняются операции дополнения, затем пересечения, объединения, разности и симметрической разности которые имеют одинаковый приоритет.

Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

Если в выражении есть знаки пересечения и объединения и нет скобок, то сначала выполняется операция пересечения, а потом – операция объединения (аналог сложению и умножению в арифметике).

1.3 Выражение теории множеств

При помощи теоретико-множественных операций из множеств образуют *выражения*.

Определение 1.3.1 выражение теории множеств определяется следующим образом:

1. **Все множества A, B, ... - выражения теории множеств;**
2. **Пустое множество $\varnothing$ и универсальное множество *I* - выражения (константы) теории множеств;**
3. **Если *A* – выражение теории множеств, то □A – тоже выражение теории множеств;**
4. **Если A и B - выражения теории множеств, то $A \cup B$, $A \cap B$, A \ B, A ∇ B – тоже выражения теории множеств.**

Свойства теоретико-множественных операций

1. $\overline{\overline{A}} = A$

2. **Коммутативность:**

$$a)\ A \cup B = B \cup A$$

$$b)\ A \cap B = B \cap A$$

3. **Асоциативность:**

$$a)\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$b)\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

4. **Дистрибутивность:**

$$a)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$b)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

5. **Идемпотентность:**

$$a)\ A \cap A = A$$

$$b)\ A \cup A = A$$

6. Действия с константами:

a) **A ∩ ∅ = ∅**

b) **A ∪ ∅ = A**

c) **A ∩ I = A**

d) **A ∪ I = I**

e) **A ∪ □A = I**

f) **A ∩ □A = ∅**

7. Законы де Моргана:

$$a)\ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$b)\ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

8. Преобразование разности:

A \ B = A ∩ □B

9. Преобразования симметрической разности:

a) **A ∇ B = (A \ B) ∪ (B \ A)**

b) **A ∇ B = (A ∪ B) \ (A ∩ B)**

10. Законы склеивания:

a) (A ∩ B) ∪ (A ∩ □**B) = A**

b) (A ∪ B) ∩ (A ∪ □**B) =**

11. Законы поглощения:

a) **A ∩ (A ∪ B) = A**

b) **A ∪** (A ∩ B) = A

1.4 Нормальные формы Кантора (НФК)

Нормальной формой Кантора (НФК) **выражения теории множеств называют выражение, которое представляет собой <u>пересечение объединений</u> или <u>объединение пересечений</u>.**

Пересечение объединений в теории множеств аналогично КНФ в мат. логике.

$$(A \cup B) \cap (\square \mathbf{A} \cup C)$$

Объединие пересечений в теории множеств аналогично ДНФ в мат. логике.

$$(A \cap B) \cup (\square \mathbf{A} \cap C)$$

Дополнение в нормальной форме может быть применено только к отдельным множествам, не к их объединению или пересечению.

Совершенной нормальной формой Кантора (СНФК) **выражения теории множеств называют такое <u>пересечение объединений</u> или <u>объединение пересечений</u>, где в каждом пересечении/объединении присутствует каждое множество выражения и точно один раз.**

Задача 1. **Доказать равенство выражений теории множеств:**

A) $\overline{\left(\overline{A} \cup B\right)} \cap \left(A \setminus B\right) = A \setminus B$

B) $A \setminus ((\overline{A} \setminus B) \cap \overline{(A \cup B)}) = A$

C) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cap \overline{C}) = \overline{A} \cup (\overline{B} \setminus \overline{C})$

D) $A \setminus (A \cap B) = \overline{B} \setminus \overline{A}$

Задача 2. **Найти СНФК:**

A) $\left[\left(A \setminus B\right) \cup (A \nabla B) \cup (A \setminus C)\right] \cap \overline{A}$

B) $\left(A \nabla C\right) \cup (A \cap B \cap C)$

C) $(\overline{A} \setminus \overline{C}) \cup (B \square C) \cup (A \nabla B)$

D) $\left[\overline{\left(\overline{A \setminus B}\right) \cap \left(\overline{B \setminus C}\right)}\right] \cup \overline{(C \setminus A)}$

Задача 3. **Найти МНФК:**

A) H(A,B,C)=(0,2,3,4,6)

B) H(A,B,C,D)=(0,1,4,5,8,9,14)

C) H(A,B,C,D)=(1,3,4,5,7,8,9,11,12,15)

1.5. Мощность множеств. Формулы Грассмана

Мощностью **конечного множества А называют количество (число) элементов этого множества и обозначают | А |.**

Формулы Грассмана позволяют найти мощность объединения множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Задача 4.

В группе 25 студентов. Для допуска к экзамену необходимо получить зачет по двум контрольным работам. По первой контрольной работе зачет получили 20 студентов, по второй 21. Сколько студентов (минимум и максимум) будет допущено к сдаче экзамена.

Задача 5.

Множество А состоит из натуральных чисел от 1 до 1000. Сколько элементов множества А не делится ни на 3, ни на 5.

Задача 6.

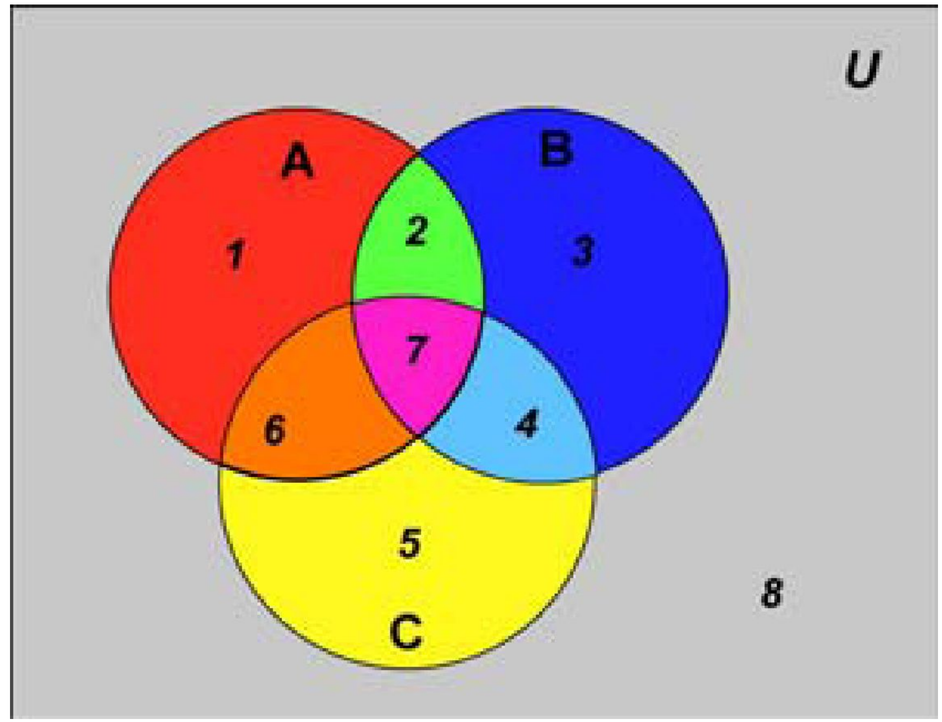
Каждый студент физико-математического факультета интересуется физикой или математикой. Сколько студентов интересуется и физикой, и математикой, если математикой интересуется 84%, а физикой 64% студентов.

Задача 7.

По результатам опроса 100 студентов 28 из них интересуется искусством, 30 музыкой, 42 спортом. 10 студентов интересуются и искусством, и спортом. 5 студентов интересуются и искусством, и музыкой. 8 студентов интересуются и спортом, и музыкой. 3 студента интересуется и искусством, и музыкой, и спортом. Сколько студентов интересуются только спортом? Только музыкой? Ничем из перечисленного?

8 возможных областей представимых диаграммой Венна для трёх множеств

1. $A \cap \square B \cap \square C$
2. $A \cap B \cap \square C$
3. $\square A \cap B \cap \square C$
4. $\square A \cap B \cap C$
5. $\square A \cap \square B \cap C$
6. $A \cap \square B \cap C$
7. $A \cap B \cap C$
8. $\square A \cap \square B \cap \square C$



1.6. Прямое произведение множеств

Прямое произведение множеств *A* и *B* состоит из упорядоченных пар элементов этих множеств

$$\mathbf{A \times B = \{ (\mathit{a}, \mathit{b}) \mid (\mathit{a} \in A) \,\&\, (\mathit{b} \in B) \}}$$

Свойства:

1. $\mathbf{A \times B \neq B \times A}$
2. $\mathbf{|A \times B| = |A| \times |B|}$

Пример: $\mathbf{A = \{ a,b,c \}}$ $\mathbf{B = \{1,2\}}$

$\mathbf{A \times B = \{ (\mathit{a},\mathit{1}), (\mathit{a},\mathit{2}), (\mathit{b},\mathit{1}), (\mathit{b},\mathit{2}), (\mathit{c},\mathit{1}), (\mathit{c},\mathit{2}) \}}$

Прямое произведение нескольких множеств:

$$A \times B \times C \times D \times \ldots \times Y = \{(a, b, c, d, \ldots, y) \mid a \in A, b \in B, \ldots, y \in Y\}$$

$$\underbrace{A \times A \times \ldots\ldots \times A}_{k \text{ раз}} = A^k$$ **– Декартова степень множества A**

Пример:

$R \times R = R^2$ – xy-плоскость

$R \times R \times R = R^3$ – xyz-пространство

Множество всех подмножеств множества *A* называется *булеаном A* или *степенью множества A*, и обозначается *P (A)* или 2^A.