



# Математика

## 2 семестр

### Лекция 14

### Системы линейных дифференциальных уравнений

## Мини-КР

### 1. Решить ОЛДУ

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

$$y'' + 2y' = 0$$

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y = 0$$

### 2. Найти вид частного решения НЛДУ

$$y'' + 4y' + 8y = x \sin x$$

$$y'' + 4y' - 5y = (x^2 + 2)e^{-x}$$

$$y'' + 2y' = e^{-2x}$$

$$y'' + 6y' + 9y = xe^{-3x}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 1 + e^{2x}$$

$$y'' + 4y = \sin 2x$$

## Введение

- Существуют методы решения систем дифференциальных уравнений, сходные с теорией решения ЛДУ.

## Основные понятия теории СЛДУ

**Определение.** Нормальная система ДУ называется линейной, если в каждом ее уравнении функции

$x'_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)); i = \overline{1, n}$  линейны относительно неизвестных функций, т. е. если она имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Запишем систему в векторной форме:  $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + B(t)$ ,

где  $\bar{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ .

При  $B(t) \equiv 0$  получим систему ОЛДУ вида  $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$   
 $t \in (a, b)$

## Свойства решений СОЛДУ

Обозначим через  $Y$  множество всех решений СОЛДУ,  $Y$  – линейное пространство.

**Теорема.** Любые  $n$  линейно независимых решений СОЛДУ  $\vec{x} = A(t)\vec{x}$  образуют базис пространства  $Y$ .

**Определение.** Базис пространства всех решений СОЛДУ  $\vec{x} = A(t)\vec{x}$  называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) СОЛДУ.

Матрица, столбцы которой являются ФСР, называется *фундаментальной матрицей* СОЛДУ  $\vec{x} = A(t)\vec{x}$ .

## Теорема о структуре общего решения СОЛДУ

Если  $\{\bar{x}_k(t)\}_{k=1}^n$  – фундаментальная система решений СОЛДУ  $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$  на  $(a, b)$ , то ее общее решение имеет

вид  $\bar{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \bar{x}_k(t)$ , где  $c_k \in \mathbb{R}$

## Теорема о структуре общего решения СНЛДУ

Если 1)  $\{\bar{x}_k(t)\}_{k=1}^n$  - ФСР СОЛДУ  $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$ ;

2)  $\bar{\varphi}(t)$  – некоторое решение СНЛДУ  $\bar{x}' = A(t)\bar{x} + B(t)$ ,

то общее решение СНЛДУ находится по формулам:

$$\bar{x}_{\text{общ. СНЛДУ}}(t) = \bar{x}_{\text{общ. СОЛДУ}}(t) + \bar{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \bar{x}_k(t) + \bar{\varphi}(t)$$

или  $\bar{x}_{\text{общ. СНЛДУ}}(t) = \Phi(t)\bar{c} + \bar{\varphi}(t), t \in (a, b)$ .

Для поиска частного решения  $\bar{\varphi}(t)$  можно воспользоваться методом вариации произвольной постоянной (из СОЛДУ):

$$\bar{\varphi}(t) = \Phi(t)\bar{c}(t).$$

СНЛДУ  $\bar{x}' = A(t)\bar{x} + B(t)$ , имеет решение  $\bar{\varphi}(t) = \Phi(t)\bar{c}(t)$ .

Тогда  $\bar{\varphi}'(t) = \Phi'(t)\bar{c}(t) + \Phi(t)\bar{c}'(t)$ , т.е.

$$\Phi'(t)\bar{c}(t) + \Phi(t)\bar{c}'(t) = A\Phi(t)\bar{c}(t) + B(t)$$

Т.к.  $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ , то  $\Phi(t)\bar{c}'(t) = B(t)$ .

Отсюда  $\bar{c}'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)$ .

Проинтегрируем обе части:  $\bar{c}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$ ,

$t_0$  – любое число  $(a, b)$ .

$$\bar{\varphi}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Т.О.  $\bar{x}_{\text{общ СНЛДУ}}(t) = \Phi(t)\bar{c} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$  -  
**формула Коши.**



Если  $t = t_0$  – значение аргумента для начальных условий

$$\bar{x}(t_0) = \bar{\xi}, \quad \text{то} \quad \bar{\xi} = \Phi(t_0)\bar{c} + \Phi(t_0) \int_{t_0}^{t_0} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

и отсюда  $\bar{c} = \Phi^{-1}(t_0)\bar{\xi}$ .

Получаем выражение частного решения СНЛДУ

$$\bar{x}_{\text{част. СНЛДУ}}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\bar{\xi} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

# ОСЛДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ОСЛДУ  $\dot{X} = AX$ , где  $a_{ij} = const$ .

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений ( $n = 3$ ). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Запишем соответствующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать решения системы в виде:

$$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \quad x_3 = \alpha_3 e^{\lambda t}, \quad \text{где } \alpha_i = \text{const}.$$

Подставляя эти функции в систему (1), перенося все члены в одну сторону и сократив на  $e^{\lambda t}$ , получим:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + (a_{33} - \lambda)\alpha_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для того чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно  $\lambda$ . Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (собственные значения матрицы  $A$ ). Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (1).

Рассмотрим различные варианты.

1. Все корни  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  характеристического уравнения различны,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

Ищем решение системы  $\dot{X} = AX$  в виде  $X = \alpha e^{\lambda t}$ , где  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\lambda \alpha e^{\lambda t} = A \alpha e^{\lambda t}, \Rightarrow (A - \lambda E) \alpha = 0, \Rightarrow |A - \lambda E| = 0.$$

Для каждого собственного значения  $\lambda_i$  находим собственный вектор  $\alpha^{(i)}$ . Так как все  $\lambda_i$  различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы, т.е. образуют ФСР однородной системы:

$$X_1 = \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad X_3 = \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}, \quad \text{где } \alpha^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \alpha_3^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение ОСЛДУ имеет вид:  $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$ .

Рассмотрим различные варианты.

1. Все корни  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  характеристического уравнения различны,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

Ищем решение системы  $\dot{X} = AX$  в виде  $X = \alpha e^{\lambda t}$ , где  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\lambda \alpha e^{\lambda t} = A \alpha e^{\lambda t}, \Rightarrow (A - \lambda E) \alpha = 0, \Rightarrow |A - \lambda E| = 0.$$

Для каждого собственного значения  $\lambda_i$  находим собственный вектор  $\alpha^{(i)}$ . Так как все  $\lambda_i$  различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы, т.е. образуют ФСР однородной системы:

$$X_1 = \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad X_3 = \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}, \quad \text{где } \alpha^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \alpha_3^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение ОСЛДУ имеет вид:  $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$ .

2. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные (причем обязательно сопряженные).

Пусть  $\lambda_1 = a + bi$ ,  $\lambda_2 = a - bi$ , тогда  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ . Этим корням соответствуют фундаментальные решения:  $X_1 = \alpha^{(1)} e^{(a+bi)t}$ ,  $X_2 = \alpha^{(2)} e^{(a-bi)t}$ ,  $X_3 = \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}$ , где  $\alpha^{(1)}$ ,  $\alpha^{(2)}$  – векторы с комплексными координатами, причем взаимосопряженные. Но  $\operatorname{Re} X_1$  и  $\operatorname{Im} X_1$  по свойству решений ОСЛДУ также являются решениями системы, поэтому в вещественной форме решение запишется следующим образом:

$$X = C_1 \cdot \operatorname{Re} \left( \alpha^{(1)} e^{(a+bi)t} \right) + C_2 \cdot \operatorname{Im} \left( \alpha^{(1)} e^{(a+bi)t} \right) + C_3 \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}.$$

### 3. Случай кратных корней.

Пусть характеристическое уравнение имеет корень  $\lambda$  кратности  $r \geq 2$ .

Соответствующее этому корню решение системы будем искать в виде:

$$X = \left( \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}t \right) e^{\lambda t} \quad \text{при } r = 2 \text{ и}$$

$$X = \left( \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}t + \alpha^{(3)}t^2 \right) e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}t + \alpha_1^{(3)}t^2 \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}t + \alpha_2^{(3)}t^2 \\ \alpha_3^{(1)} + \alpha_3^{(2)}t + \alpha_3^{(3)}t^2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad \text{при } r = 3.$$

Коэффициенты  $\alpha_j^{(i)}$  определим, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , после подстановки данного решения  $X$  в ОСЛДУ

$$\dot{X} = AX.$$



**Замечание.** Если имеется ОСЛДУ  $\dot{X} = AX$  с симметричной матрицей  $A$ , то кратность каждого характеристического числа  $\lambda$  совпадает с количеством линейно независимых собственных векторов  $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}$ , соответствующих данному значению  $\lambda$ . Поэтому данному  $\lambda$  будет соответствовать решение  $C_1 \alpha^{(1)} e^{\lambda t} + \dots + C_r \alpha^{(r)} e^{\lambda t}$ .

Общее решение НСЛДУ с постоянными коэффициентами можно найти с помощью метода Лагранжа вариации произвольных постоянных, если известно общее решение соответствующей ОСЛДУ. Данный метод не предъявляет никаких требований к виду неоднородности.

Но в некоторых случаях более удобным может оказаться другой метод – **метод неопределенных коэффициентов** (или его иногда называют методом Эйлера).

**Метод неопределенных коэффициентов** применяется в случаях, когда

1) коэффициенты  $a_{ij} = const$ ;

2) неоднородности в уравнениях имеют вид:

$$f_i(t) = e^{\alpha t} \left( P_{k_i}(t) \cos \beta t + Q_{m_i}(t) \sin \beta t \right), \quad i = \overline{1, n},$$

где  $P_{k_i}(t)$ ,  $Q_{m_i}(t)$  – многочлены степеней  $k_i$ ,  $m_i$  соответственно ( $i$  – номер уравнения в системе).

Частное решение НСЛДУ будем искать в виде:

$$\mathbb{X}_i(t) = e^{\alpha t} \left( R_{m+s}^i(t) \cos \beta t + T_{m+s}^i(t) \sin \beta t \right), \quad i = \overline{1, n},$$

где  $R_{m+s}^i(t)$ ,  $T_{m+s}^i(t)$  – многочлены степени  $m+s$ ,  $m = \max\{k_i, m_i\}$ ,  $s$  – кратность корня  $\lambda = \alpha + \beta i$  характеристического многочлена ОСЛДУ.

**Замечание 1.** Число  $s$  является показателем наличия или отсутствия резонанса в системе.

**Замечание 2.** При решении одного дифференциального уравнения частное решение неоднородного ДУ находят по формуле:

$$\mathbb{X}(t) = e^{\alpha t} t^s (R_m(t) \cos \beta t + T_m(t) \sin \beta t),$$

т.е. в отличие от СДУ кратность корня учитывается не в степени многочлена при  $\cos \beta t$  и  $\sin \beta t$ , а появляется дополнительный (резонансный) множитель  $t^s$ .

**Пример.** Найти частное решение СНЛДУ  $\dot{X} = AX + B$ , при этом для решения соответствующей СОЛДУ  $\dot{X} = AX$  использовать метод Эйлера, решение СНЛДУ подобрать по виду вектор-функции  $B(t)$  правой части СНЛДУ:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

**Решение.** Найдем решение однородной системы  $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X$ .

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = 0, \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Найдем его корни:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$ .

Для каждого собственного значения  $\lambda_i$  находим собственный вектор  $\xi_i$ :

$$1) \lambda_1 = -1: (A + E)\xi = \theta, \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases},$$

$2\alpha = \beta$  и  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Тогда  $X_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  – решение ОСЛДУ.

$$2) \quad \lambda_2 = 2: \quad (A - 2E)\xi = \theta, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{откуда } \beta = -\alpha \quad \text{и}$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда решение ОСЛДУ } X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение ОСЛДУ имеет вид:  $\bar{X}(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$ , т.е.

$$\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Найдем частное решение неоднородной системы методом неопределенных коэффициентов:

$$\bar{x}_i(t) = e^{\alpha t} \left( R_{m+s}^i(t) \cos \beta t + T_{m+s}^i(t) \sin \beta t \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X(0) = (0; 0)^\tau. \end{cases}$$

$$\tilde{x}_i(t) = e^{\alpha t} \left( R_{m+s}^i(t) \cos \beta t + T_{m+s}^i(t) \sin \beta t \right), \quad i = \overline{1, n}$$

В нашем случае  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $m = 0$ ,  $s = 0$ . Тогда частное решение имеет вид

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} A \cos t + B \sin t \\ C \cos t + D \sin t \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  найдем из уравнения  $\dot{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{X} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} -A \sin t + B \cos t \\ -C \sin t + D \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos t + B \sin t \\ C \cos t + D \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow$$



$$\begin{cases} -A \sin t + B \cos t = A \cos t + B \sin t - C \cos t - D \sin t + \sin t \\ -C \sin t + D \cos t = -2A \cos t - 2B \sin t \end{cases}, \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -A = B - D + 1 \\ B = A - C \\ -C = -2B \\ D = -2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -0,3 \\ B = -0,1 \\ C = -0,2 \\ D = 0,6 \end{cases}$$

Тогда  $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} -0,3 \cos t - 0,1 \sin t \\ -0,2 \cos t + 0,6 \sin t \end{pmatrix}$ .

Общее решение СДУ имеет вид:  $X(t) = \bar{X}(t) + \tilde{X}(t)$ .

Итак,  $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3 \cos t - 0,1 \sin t \\ -0,2 \cos t + 0,6 \sin t \end{pmatrix}$ .

Найдем решение задачи Коши:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3 \\ -0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0,3 \\ 2C_1 - C_2 = 0,2 \end{cases},$$

откуда  $C_1 = \frac{1}{6}$ ,  $C_2 = \frac{2}{15}$ .

Таким образом, получили искомое частное решение НСЛДУ:

$$X(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{2}{15} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3 \cos t - 0,1 \sin t \\ -0,2 \cos t + 0,6 \sin t \end{pmatrix}.$$

4. Найти общее решение СНЛДУ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^t; \\ \dot{y} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$





## 5. Найти общее решение СОЛДУ методом Эйлера

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 10x = 0$$



6. Найти общее решение СОЛДУ методом Эйлера

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 10x = 0$$





## 7. Решить СНЛДУ по формуле Коши

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(0) = (1, 0)^T$$





## Формула Коши

$$\bar{x}_{\text{общ}} \text{ СНЛДУ } (t) = \Phi(t)\bar{c} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau$$



