

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ №29

Репетитор по математике Фельдман Инна
Владимировна

13. Решить уравнение:

$$27^{\arcsin x + \frac{1}{3}} + 37 \cdot 3^{\arcsin x} = 31 \cdot 9^{\arcsin x} + 9$$

$$27^{\arcsin x + \frac{1}{3}} + 37 \cdot 3^{\arcsin x} - 31 \cdot 9^{\arcsin x} - 9 = 0;$$

$$3^{3(\arcsin x + \frac{1}{3})} + 37 \cdot 3^{\arcsin x} - 31 \cdot 3^{2\arcsin x} - 9 = 0;$$

$$3^{3\arcsin x + 1} + 37 \cdot 3^{\arcsin x} - 31 \cdot 3^{2\arcsin x} - 9 = 0;$$

$$3 \cdot 3^{3\arcsin x} + 37 \cdot 3^{\arcsin x} - 31 \cdot 3^{2\arcsin x} - 9 = 0;$$

Введем замену: $t = 3^{\arcsin x}$.

$$3t^3 + 37 \cdot t - 31 \cdot t^2 - 9 = 0; \quad 3t^3 - 31 \cdot t^2 + 37 \cdot t - 9 = 0$$

$$t = 1; \quad \begin{array}{r|l} 3t^3 - 31 \cdot t^2 + 37 \cdot t - 9 & t - 1 \\ - 3t^3 + 3t^2 & \\ \hline -28t^2 + 37t - 9 & \\ - -28t^2 + 28t & \\ \hline 9t - 9 & \\ - 9t + 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(t - 1)(3t^2 - 28t + 9) = 0;$$

$$3t^2 - 28t + 9 = 0; \quad \frac{D}{4} = 196 - 27 = 169$$

$$t_1 = \frac{14 + 13}{3} = 9; \quad t_2 = \frac{14 - 13}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} 3^{\arcsin x} = 1 \\ 3^{\arcsin x} = 9 \\ 3^{\arcsin x} = \frac{1}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \arcsin x = 0 \\ \arcsin x = 2 \\ \arcsin x = -1 \end{cases}$$

Арксинусом числа x ($x \in [-1; 1]$) называется число из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен x

$$2 > \frac{\pi}{2}; \quad \begin{cases} \arcsin x = 0 \\ \arcsin x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \sin 0 \\ x = \sin(-1) \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sin 1 \end{cases}$$

Ответ: {0; -sin 1}

14. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S , является точка O , лежащая внутри треугольника ABC . Расстояние от точки O до стороны AC равно 1.

Синус угла OBA относится к синусу угла OBC как 2: 1. Площадь грани SAB равна $\sqrt{\frac{5}{6}}$.

а) Докажите, что площадь грани SAB относится к площади ее проекции на основание как $\sqrt{10}: 1$.

б) Найдите объем пирамиды.

а) Найдем площадь треугольника AOB .

$$\sin \alpha = 2 \sin \beta \text{ (по условию).}$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BO \cdot \sin \alpha; \quad S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BO \cdot \sin \beta;$$

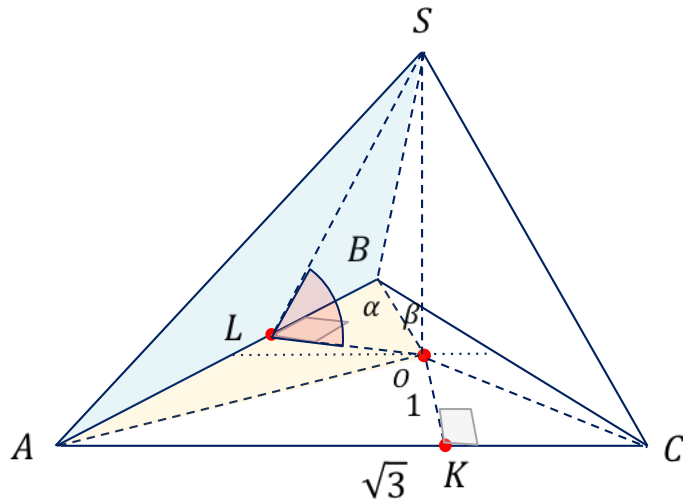
$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2; \quad S_{\Delta AOB} = 2S_{\Delta BOC}; \quad S_{AOCB} = 3S_{\Delta BOC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AOC}$$

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}; \quad S_{AOCB} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{2}{3} S_{AOCB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \frac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{1}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$



б) Найдем высоту пирамиды.

$OL \perp AB$ (по построению), $SL \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах)

$$SO = SL \cdot \sin(\angle SLO), \quad \cos(\angle SLO) = \frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin(\angle SLO) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{10}}. \quad SL = \frac{2S_{\Delta SAB}}{AB} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{3};$$

$$SO = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = 1; \quad V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

3

15. Решите неравенство

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) \log_{13-3 \cdot 2^x} 4 \leq 1.$$

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} 13 - 3 \cdot 2^x > 0; \\ 13 - 3 \cdot 2^x \neq 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2^x < \frac{13}{3}; \\ 2^x \neq 4 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x < \log_2 \frac{13}{3}; \\ x \neq 2 \end{cases}}$$

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2(13 - 3 \cdot 2^x)} \leq 1;$$

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{2}{\log_2(13 - 3 \cdot 2^x)} \leq 1;$$

$$\frac{2 - x}{\log_2(13 - 3 \cdot 2^x)} \leq 1;$$

$$\frac{2 - x}{\log_2(13 - 3 \cdot 2^x)} - 1 \leq 0;$$

$$\frac{2 - x - \log_2(13 - 3 \cdot 2^x)}{\log_2(13 - 3 \cdot 2^x)} \leq 0;$$

Найдем корни числителя: $2 - x - \log_2(13 - 3 \cdot 2^x) = 0$

$$2 - x = \log_2(13 - 3 \cdot 2^x);$$

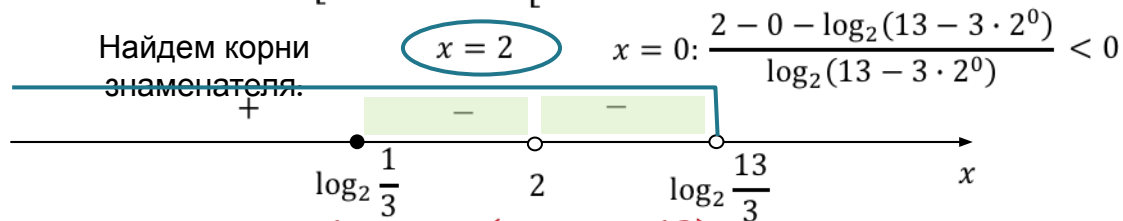
$$2^{2-x} = 13 - 3 \cdot 2^x; \quad 3 \cdot 2^x + 2^{2-x} - 13 = 0; \quad 3 \cdot 2^x + \frac{4}{2^x} - 13 = 0;$$

$$3 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Введем замену: $2^x = t, t > 0: \quad 3 \cdot t^2 - 13 \cdot t + 4 = 0.$

$$t_1 = \frac{13 + \sqrt{169 - 48}}{6} = \frac{13 + 11}{6} = 4; \quad t_2 = \frac{13 - 11}{6} = \frac{1}{3};$$

Обратная замена: $\begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_2 \frac{1}{3} \end{cases}$



Ответ: $[\log_2 \frac{1}{3}; 2) \cup (2; \log_2 \frac{13}{3}]$

16. Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 30$, $BC = 24$, $CD = 50$, $AD = 74$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Найдите O_1O_2 .

а) Точка O_1 — точка пересечения биссектрис углов ABC и BAD

$BO_1 \perp AO_1$ (по свойству биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне трапеции)

O_1M — медиана прямоугольного треугольника AO_1B

$O_1M = MB = MA$ (по свойству медианы прямоугольного треугольника)

$\triangle BO_1M$ равнобедренный $\Rightarrow \angle MBO_1 = \angle MO_1B$;

$\angle MBO_1 = \angle O_1BC$ (так как BO_1 — биссектриса)

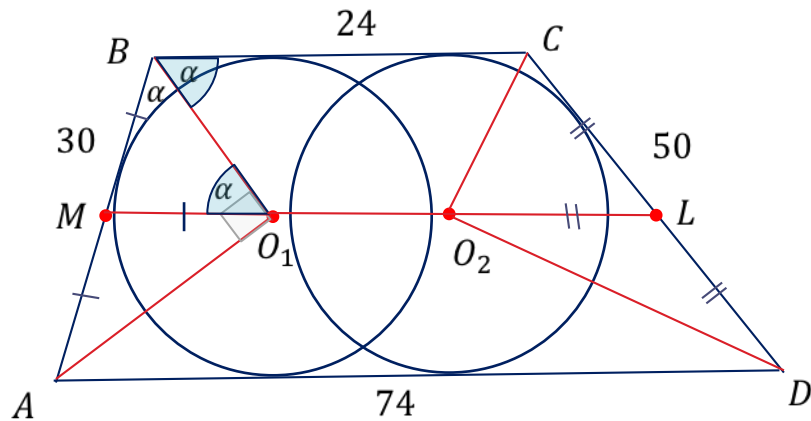
$\Rightarrow \angle MO_1B = \angle O_1BC \Rightarrow MO_1 \parallel BC$,

\Rightarrow точка O_1 лежит на средней линии трапеции. Аналогично доказываем, что точка O_2 лежит на средней линии трапеции.

O_2L — медиана прямоугольного треугольника CO_2D ; $O_2L = LC = LD$ (по свойству медианы прямоугольного треугольника)

$$\text{б) } O_1O_2 = ML - O_1M - O_2L; \quad ML = \frac{BC + AD}{2} = \frac{24 + 74}{2} = 49$$

$$O_1M = \frac{1}{2}AB = 15; \quad O_2L = \frac{1}{2}CD = 25; \quad O_1O_2 = 49 - 15 - 25 = 9$$



Ответ:

9

17. 15 июля планируется взять кредит на сумму 900 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит при условии, что ежемесячные выплаты не должны превышать 180 000 рублей?

№ месяца	Остаток по долгу	Выплата по процентам	Выплата по долгу
1	900 000	18 000	$180\,000 - 18\,000 = 162\,000$
2	$900\,000 - 162\,000 = 738\,000$	14 760	$180\,000 - 14\,760 = 165\,240$
3	$738\,000 - 165\,240 = 572\,760$	11 455,2	$180\,000 - 11\,455,2 = 168\,544,8$
4	$572\,760 - 168\,544,8 = 404\,215,2$	8084,304	$180\,000 - 8084,304 = 171\,915,696$
5	$404\,215,2 - 171\,915,696 = 232\,299,504$	4645,99	$180\,000 - 4645,99 = 175\,534,01$
6	$232\,299,504 - 175\,534,01 = 56\,765,494$...	

Ответ:

6

17. 15 июля планируется взять кредит на сумму 900 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит при условии, что ежемесячные выплаты не должны превышать 180 000 рублей?

2

способ.

$$900\,000 \cdot 1,02 - 180\,000$$

$$738\,000 \cdot 1,02 - 180\,000$$

$$572\,760 \cdot 1,02 - 180\,000$$

$$404\,215,2 \cdot 1,02 - 180\,000$$

$$232\,299,504 \cdot 1,1$$

Ответ: 6

18. При каких значениях параметра a точка минимума функции

$$f(x) = x^3 + (3a + 3)x^2 + (3a^2 + 6a)x - 5a + 2$$

лежит на интервале $(a + 2; a + 8)$?

Найдем точку минимума

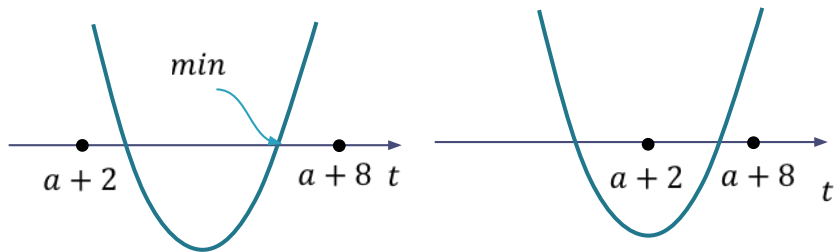
функции

$$f(x) = x^3 + (3a + 3)x^2 + (3a^2 + 6a)x - 5a + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2(3a + 3)x + (3a^2 + 6a)$$

$$3x^2 + 2(3a + 3)x + (3a^2 + 6a) = 0$$

$$x^2 + 2(a + 1)x + (a^2 + 2a) = 0$$



$$\frac{D}{4} = (a + 1)^2 - (a^2 + 2a) = 1$$

$$x_1 = -(a + 1) + 1 = -a$$

$$x_2 = -(a + 1) - 1 = -a - 2$$

$x = -a$ - точка минимума

$$\begin{cases} -a > a + 2; \\ -a < a + 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a < -2; \\ 2a > -8; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -1; \\ a > -4; \end{cases}$$

Ответ: $(-4; -1)$

ЕГЭ?
ОК!