

Преобразование Фурье

Синусоида с ненулевой начальной фазой $\sin(x+a)$ может быть представлена как сумма синусоиды и косинусоиды по тригонометрической формуле:

$$\sin(x + \alpha) = \cos(\alpha) \sin(x) + \sin(\alpha) \cos(x)$$

Теорема Фурье гласит, что любая периодическая функция может быть представлена как конечная или бесконечная сумма синусоид и косинусоид.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega T)$$

С дискретными сигналами все проще. Хотя бы потому, что это можно посчитать руками.

Прямое преобразование:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - i * \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right)$$

Обратное преобразование:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + i * \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right)$$

N – количество отсчетов в сигнале

$x[n]$ – сигнал в отсчете номер n (начинается с нуля и идет до $N-1$)

$X[k]$ – значение сигнала номер k в домене частот (т.е. после преобразования Фурье)

Первое (по счету) число в ряду X иногда называется “DC” – direct current. Оно равно среднему значению сигнала на отрезке.

Пример 1. $x=0$, $N=4$

$$x=[0; 0; 0]$$

$$X=[0; 0; 0]$$

Пример 2. $x[n] = \sin(2\pi n/4)$

$$x=[0; 1; 0; -1]$$

$$X=[0; -4i; 0; 4i]$$

$$\begin{aligned} X[1] &= \sum_{n=0}^3 x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} 1n} \\ &= \sum_{n=0}^3 x_n \left(\cos\left(\frac{2\pi 1n}{N}\right) - i * \sin\left(\frac{2\pi 1n}{N}\right) \right) = x_0 \left(\cos\left(\frac{2\pi 0}{N}\right) - i * \sin\left(\frac{2\pi 0}{N}\right) \right) \end{aligned}$$