

5.Приведите основные  
типы задач по усвоению  
общего функционального  
материала.

## *Основные типы задач, решаемых в 7 классе при изучении темы «Понятие функции»*

1. Функция задана формулой  $y=2x+7$ . Найти значения функции, соответствующие значению аргумента, равного 1; -20; 43.
2. Функция задана формулой  $y=2x+7$ . Найти значения аргумента, равного 10; 50; 120, найти соответствующее значение функции.
3. Функция задана формулой  $y=2x+7$ . Заполните таблицу:

|   |    |    |    |   |   |   |   |
|---|----|----|----|---|---|---|---|
| X | -6 | -4 | -3 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| Y |    |    |    |   |   |   |   |



1. Функция задана формулой  $y=2x+7$ . Заполните таблицу:
2. Составьте таблицу значений функции, заданной формулой  $y=2x+7$ , где  $0 \leq x \leq 4$  с шагом 0,5.
3. Найдите область определения функции, заданной формулой  $y=2x+7; y = \frac{2}{3+x}$

|   |    |    |    |   |   |   |    |
|---|----|----|----|---|---|---|----|
| X | -6 |    | -3 |   | 5 | 6 |    |
| Y |    | -4 |    | 3 |   |   | 14 |

1) У мальчика было 1050р. Он купил  $x$  карандашей по 10р. за штуку. Обозначив число рублей, оставшихся у мальчика, буквой  $y$ , задайте формулой зависимости  $y$  от  $x$ . Какова область определения этой функции?

2) Постройте график функции, заданной формулой  $y=2x+7$ , где  $-3 \leq x \leq 4$ , предварительно составив таблицу значений функции с шагом 1.

3) По графику найти значение функции в точке  $0; 4; -5; 5,7$ .

4) В одной и той же координатной плоскости постройте графики функций  $y=2x+7$ ,  $y=x+7$ ,  $y=-2x$ .

## Изучение прямой пропорциональности $y=kx$ , $k \neq 0$

Мотоциклист двигался со скоростью 16 м/с в течение  $t$  секунд. Сколько метров ( $s$ ) проехал он за это время?

2. Ученик купил  $n$  карандашей по 5 р. Сколько рублей ( $c$ ) он заплатил за покупку?

3. Найти массу  $m$  (г) алюминиевого провода, объем которого  $V$  (см<sup>3</sup>), если плотность алюминия равна 2,7 г/см<sup>3</sup>. Учащиеся легко решат предложенные задачи, запишут три формулы:  $s=16t$  ( $t>0$ ),  $c=5n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $m=2,7V$  ( $V>0$ ) и выяснят, что в каждом случае мы имеем дело с прямой пропорциональной зависимостью.



# «Линейная функция»

$$Y=kx+b$$

**Пример 1.** На шоссе расположены пункты  $A$  и  $B$ , удаленные друг от друга на 20 км. Мотоциклист выехал из пункта  $B$  в направлении, противоположном  $A$ , со скоростью 50 км/ч. За  $t$  ч мотоциклист проедет  $50t$  км и будет находиться от  $A$  на расстоянии  $50t + 20$  км. Если обозначить буквой  $s$  расстояние (в километрах) от мотоциклиста до пункта  $A$ , то зависимость этого расстояния от времен движения можно выразить формулой  $s = 50t + 20$ , где  $t > 0$ .

**Пример 2.** Ученик купил тетради по 3 коп. за штуку и ручку за 35 коп. Стоимость покупки зависит от числа тетрадей. Обозначим число купленных тетрадей буквой  $x$ , а стоимость покупки (в копейках) буквой  $y$ .

Получим  $y = 3x + 35$ , где  $x$  – натуральное число.

В обоих примерах мы встречались с функциями, заданными формулами вида  $y = kx + b$ , где  $x$  – независимая переменная,  $k$  и  $b$  – числа. Такие функции называют **линейными**.

1. Автомобиль, находясь в 5 км от города, начал движение от него со скоростью 60 км/ч. На каком расстоянии ( $s$ ) от города он будет через  $t$  ч? 2. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали увозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе ( $m$ ) через  $n$  дней? Решение задач приводит к двум формулам:  $s = 60t + 5$  ( $t \geq 0$ ),  $m = -30n + 500$  ( $n = 1, 2, \dots, 16$ ), которые не напоминают прямую пропорциональность, следовательно, имеем дело с новой функцией, которая задается общей формулой  $y = kx + b$  и называется линейной



# квадратичная функция

## $ax^2+bx+c=0$

задаче является *параметром* (в силу данного выше определения), совпадает с множеством действительных чисел.

В силу справедливости формул для координат вершины параболы

$x_{\text{вершины}} = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_{\text{вершины}} = ax_{\text{вершины}}^2 + bx_{\text{вершины}} + c$ , координаты вершины нашей параболы  $y = x^2 + 6x + c$ , задаются

алгебраическими выражениями, зависящими от параметра  $c$ :  $x_{\text{вершины}} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3$ ,

$y_{\text{вершины}} = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + c = 9 - 18 + c = -9 + c$ .

Расстояние от начала координат до вершины параболы можно рассмотреть как гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны  $|x_{\text{вершины}}|$  и  $|y_{\text{вершины}}|$ , по теореме Пифагора. Тогда справедливо уравнение относительно параметра  $c$ :  $5^2 = |-3|^2 + |-9+c|^2$ . Воспользовавшись свойством модуля  $|b|^2 = b^2$ , можно упростить правую часть данного уравнения и свести его к квадратному уравнению вида  $c^2 - 18c + 65 = 0$ , которое имеет два решения:  $c_1 = 13$ ,  $c_2 = 5$ .

Ответ: при  $c = 13$  и при  $c = 5$  параболы  $y = x^2 + 6x + c$  находится на расстоянии 5 от начала координат.

**22.54.** График какой квадратичной функции проходит через точки  $A(2;3)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(3;2)$ ?

Решение

Эта задача может быть переформулирована следующим образом: найдите значения коэффициентов  $a, b, c$  квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$ , график которой проходит через точки  $A(2;3)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(3;2)$ .

**3cП\_2**

Множества допустимых значений коэффициентов  $c$  и  $b$ , которые в нашей задаче являются *параметрами* (в силу данного выше определения), совпадают с множеством действительных чисел. А множество допустимых значений коэффициента  $a$ , который в нашей задаче также является параметром (в силу данного выше определения) есть объединение двух открытых лучей:  $(-\infty; 0) \cup [0; +\infty)$ .

Так как график функции  $y = ax^2 + bx + c$  проходит через точку  $B(0;1)$ , то  $1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ , откуда  $c = 1$ . С учетом найденного значения параметра  $c$  и координат еще двух точек графика ( $A(2;3)$  и  $C(3;2)$ ) получим систему двух уравнений от двух переменных:  $a$  и  $b$ .

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1, \\ 3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 1, \end{cases} \text{ решением которой является пара чисел } \begin{cases} a = -\frac{2}{3}, \\ b = 2\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: график функции  $y = -\frac{2}{3}x^2 + 2\frac{1}{3}x + 1$  проходит через точки  $A(2;3)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(3;2)$ .

4. УМК А.Г. Мордковича, базисный уровень, задачи

**22.28.** Найдите значение коэффициента  $c$ , если известно, что график функции  $y = x^2 + 4x + c$  пересекает ось ординат в точке  $A(0;2)$ .

Решение

Задачу можно отнести ко второму классу задач с параметрами. Далее будем коротко обозначать принадлежность данному классу задач следующим образом:

**3cП\_2**

Множество допустимых значений коэффициента  $c$ , который в нашей задаче является *параметром* (в силу данного выше определения), совпадает с множеством действительных чисел.

При любом значении  $c$  графиком данной функции будет некоторая парабола, пересекающая ось ординат в единственной точке (в силу определения функции). Аналитическое задание функции, график которой проходит через точку  $A(0;2)$  обращается в верное числовое равенство при подстановке координат данной точки вместо независимой переменной  $x$  и зависимой переменной  $y$ . А выражение  $y = x^2 + 4x + c$  - в уравнение относительно  $c$ :  $2 = 0^2 + 4 \cdot 0 + c$ , откуда следует, что  $c = 2$ .

Ответ: при  $c = 2$  график функции  $y = x^2 + 4x + c$  пересекает ось ординат в точке  $A(0;2)$ , *Рисунок 1*.

**22.30.** Найдите значение коэффициента  $b$ , если известно, что осью симметрии графика функции  $y = x^2 + bx + 4$  является прямая  $x = 1$ .

Решение

**3cП\_2**

Множество допустимых значений коэффициента  $b$ , который в нашей задаче является *параметром* (в силу данного выше определения), совпадает с множеством действительных чисел.

Для решения задачи вспомним, что уравнение оси симметрии параболы выглядит так:

$x = -\frac{b}{2a}$ . Так как старший коэффициент квадратного трехчлена нам известен ( $a = 1$ ), то

необходимо решить уравнение  $1 = -\frac{b}{2 \cdot 1}$  относительно  $b$ . Получаем, что  $b = -2$ .

Ответ: при  $b = -2$  осью симметрии графика функции  $y = x^2 + bx + 4$  является прямая  $x = 1$ , *Рисунок 2*.

**22.49.** При каком значении коэффициента  $c$  вершина параболы  $y = x^2 + 6x + c$  находится на расстоянии 5 от начала координат?

Решение

**3cП\_2**

Множество допустимых значений коэффициента  $c$ , который в нашей задаче является *параметром* (в силу данного выше определения), совпадает с множеством действительных чисел.

В силу справедливости формул для координат вершины параболы

$x_{\text{вершины}} = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_{\text{вершины}} = ax_{\text{вершины}}^2 + bx_{\text{вершины}} + c$ , координаты вершины нашей параболы  $y = x^2 + 6x + c$ , задаются

алгебраическими выражениями, зависящими от параметра  $c$ :  $x_{\text{вершины}} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3$ ,

$y_{\text{вершины}} = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + c = 9 - 18 + c = -9 + c$ .

Расстояние от начала координат до вершины параболы можно рассмотреть как гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны  $|x_{\text{вершины}}|$  и  $|y_{\text{вершины}}|$ , по теореме Пифагора. Тогда справедливо уравнение относительно параметра  $c$ :  $5^2 = |-3|^2 + |-9+c|^2$ . Воспользовавшись свойством модуля  $|b|^2 = b^2$ , можно упростить правую часть данного уравнения и свести его к



# Степенные функции:

$$y=x; y=x^2; y=x^3$$

$$y=1/x; y=k/x$$

$$y=\sqrt{x}; y=\sqrt[3]{x}$$

$$y=x^n \text{ где } n \in N.$$

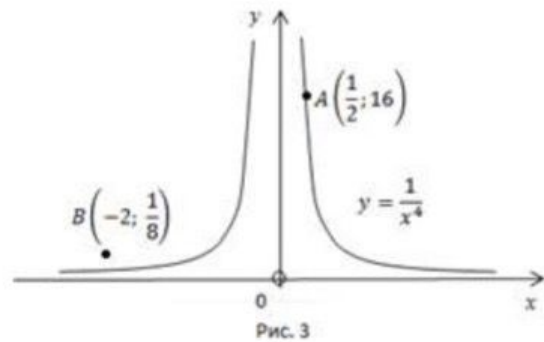
К кубическому корню из числа можно подвести учеников, предложив задачу: «Объем куба равен  $1000\text{см}^3$ . Найти его ребро». Решая ее составлением уравнения:  $x^3=1000$ , получим  $x=10$ . Мы находим число, куб которого равен 1000. Затем даётся определение кубического корня из числа и вводится соответствующая запись. Извлечение кубического корня из числа проводится на калькуляторе. Умея извлекать кубические корни, можно рассматривать график функции  $y=\sqrt[3]{x}$ .

Рассмотрим типовые задачи:

1. Какая из точек – А или В – принадлежит графику функции  $y = f(x)$ , если

$$f(x) = x^{-4}, \text{ т. А } \left(\frac{1}{2}; 16\right), \text{ т. В } \left(-2; \frac{1}{8}\right).$$

Решение:



$$\text{т. А: } \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16; \end{cases}$$

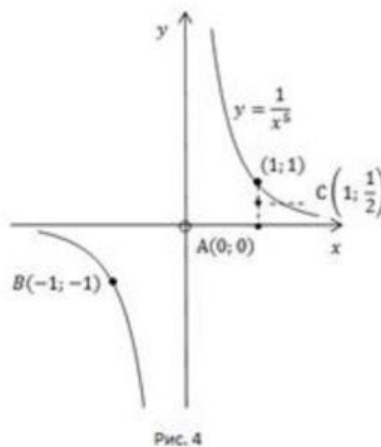
т. А принадлежит графику.

$$\text{т. В: } \begin{cases} x = -2, \\ y = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{8}; \end{cases}$$

2. Какая из точек А, В, С принадлежит графику функции  $y = f(x)$ , если

$$f(x) = x^{-5}, \text{ т. А } (0; 0), \text{ т. В } (-1; -1), \text{ т. С } \left(1; \frac{1}{2}\right).$$

Решение:



$$\text{т. А: } \begin{cases} x = 0, \\ y - \text{не определен.} \end{cases}$$

$$\text{т. В: } \begin{cases} x = -1, \\ y = \frac{1}{(-1)^5} = -1. \end{cases}$$

$$\text{т. С: } \begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{1^5} = 1 \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{(-1)^5} = -1. \end{array} \right.$$

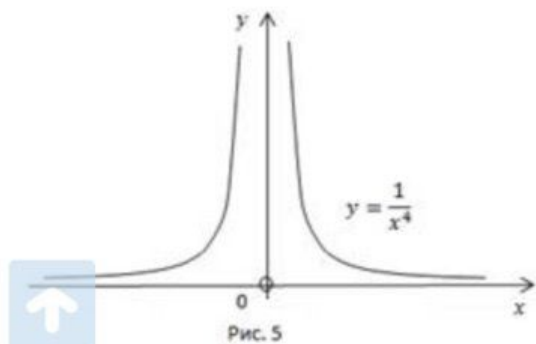
$$\text{т. С: } \left\{ \begin{array}{l} x = 1, \\ y = \frac{1}{1^5} = 1 \neq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Ответ: т. В принадлежит графику.

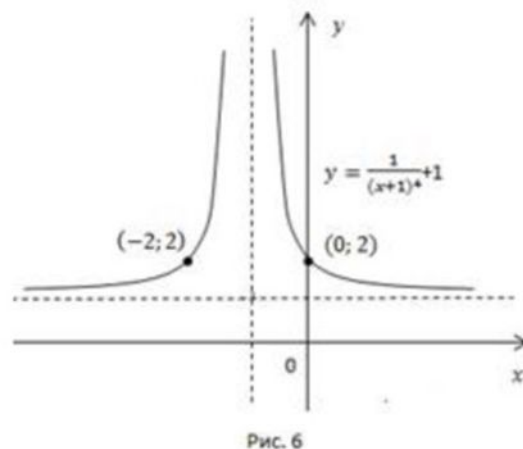
3. Постройте график функции  $y = \frac{1}{(x+1)^4} + 1$  и прочтите его.

Решение:

Построим график функции  $y = \frac{1}{x^4}$  (Рис. 5). Его асимптоты – прямые  $y = 0$  и  $x = 0$ .



Чтобы получить график функции  $y = \frac{1}{(x+1)^4} + 1$ , необходимо график  $y = \frac{1}{x^4}$  сдвинуть на 1 вверх по оси  $y$  и на 1 единицу влево по оси  $x$  (Рис. 6).



Асимптоты полученного графика – прямые  $y = 1$  и  $x = -1$ , характерные точки  $(-2; 2)$  и  $(0; 2)$ .

Если  $x \in (-\infty; -1)$  то  $y$  возрастает,  $y \in (1; +\infty)$ .

Если  $x \in (-1; +\infty)$ , то  $y$  убывает,  $y \in (1; +\infty)$ .

4. Найдите все значения параметра  $m$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1}{(x+1)^4} + 1 = m \text{ имеет хотя бы одно решение}$$

# Показательные функции

$$Y=a^x, \text{ где } a>0 \text{ и } a \neq 1$$

*Задача 1.* Масса колонии бактерий, помещенных в питательную среду, равна 1 г. Каждый час она увеличивается вдвое. Какова будет ее масса через 1, 2, 3, 10,  $n$  ч после начала наблюдения? Вычислите массу колонии через то же время до начала наблюдения (время будем считать отрицательным). Результат оформите в виде таблицы.

В процессе решения задачи надо уяснить, что в начале наблюдения (т.е. при  $t = 0$ ) масса колонии бактерий равнялась 1г, а затем она удваивалась через каждый час ( $t = 1, 2, 3, \dots$ ). Фиксируя массу ежедневно, получаем геометрическую прогрессию:  $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n$  с первым членом  $b_1=2$  и знаменателем  $q=2$ ;  $n$ -й член прогрессии  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ , т.е.  $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ . Пользуясь формулой, можно заполнить таблицу при  $t>0$ , а затем при  $t<0$  (без обращения к геометрической прогрессии):

| До начала наблюдения |                |               |               |               |   | В ходе наблюдения |   |   |    |      |         |       |
|----------------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---|-------------------|---|---|----|------|---------|-------|
| ...                  | -4             | -3            | -2            | -1            | 0 | 1                 | 2 | 3 | 4  | 10   | 20      | $n$   |
|                      | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2                 | 4 | 8 | 16 | 1024 | 1048576 | $2^n$ |



После оформления решения задачи предложить учащимся записать формулой выявленную зависимость:  $m=2^n$ , где  $n$  может быть как натуральным числом, так и отрицательным целым.

**Задача 2.** Период полураспада одного из изотопов радона составляет пять дней. Имеется 1г этого вещества. Сколько нераспавшегося вещества останется через одну, две, три, четыре пятидневки, через месяц (30 дней), через  $n$  пятидневок? Вычислить массу вещества за те же промежутки времени до начала наблюдения (время отрицательное). Результат представить таблицей.

Проводя аналогичные рассуждения, получим геометрическую прогрессию:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}$  с первым членом  $b_1 = \frac{1}{2}$ , знаменателем  $q = \frac{1}{2}$ , и  $n$ -м членом  $b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , где  $n$  означает число пятидневок. Таблица может иметь вид:

| До начала наблюдения |    |    |    |    |   | В ходе наблюдения |               |               |                |                |                              |
|----------------------|----|----|----|----|---|-------------------|---------------|---------------|----------------|----------------|------------------------------|
| ...                  | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1                 | 2             | 3             | 4              | 6              | $n$                          |
|                      | 16 | 8  | 4  | 2  | 1 | $\frac{1}{2}$     | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{64}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ |

Выявленная зависимость может быть записана формулой  $m=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Здесь же можно сообщить учащимся, что количество нераспавшегося вещества можно узнать по этой формуле и при дробных показателях, например, через 2,5 суток.

# Логарифмическая функция

$$y = \log_a x$$

Найти корни уравнения

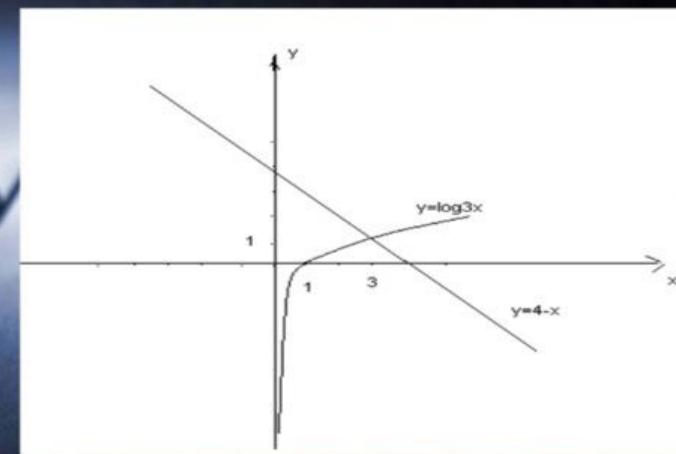
$$\log_3 x = 4 - x$$

Для решения ЛУ графическим методом надо построить в одной и той же системе координат графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения и найти абсциссу их точки пересечения

Найти корни уравнения

$$\log_3 x = 4 - x$$

Так как функция  $y = \log_3 x$  возрастающая, а функция  $y = 4 - x$  убывающая на  $(0; +\infty)$ , то заданное уравнение на этом интервале имеет один корень.





симметричны друг другу относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. Если, например, рисунок 252 перегнуть по этой биссектрисе, то графики функций  $y = 2^x$  и  $y = \log_2 x$  наложатся друг на друга.

### Упражнения

1385. Пересекается ли логарифмическая кривая  $y = \log_a x$ :

а) с осью  $x$ ; б) с осью  $y$ ?

1380. Используя график функции  $y = \log_2 x$ , найти логарифмы по основанию 2 чисел 0,5; 0,6; 0,7; 1,5; 2,3; 3,0.

Логарифмы каких чисел по основанию 2 равны 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,5?

1387. Исходя из графика функции  $y = \log_2 x$ , построить графики функций:

а)  $y = \log_2(x - 1)$ ;      в)  $y = \log_2 x$ ;      д)  $y = |\log_2 x|$ ;

б)  $y = \log_2(x + 2)$ ;      г)  $y = \log_2 |x|$ ;      е)  $y = \log_2(-x)$ .

1388. Построить графики функций:

а)  $y = \log_{1/3} x$ ;      в)  $y = \log_{1/3}(x + 2)$ ;      д)  $y = \log_{1/3} |x|$ ;

б)  $y = \log_{1/3}(x - 1)$ ;      г)  $y = |\log_{1/3} x|$ ;      е)  $y = \log_{1/3}(-x)$ .

1389. На одном и том же рисунке построить графики функций

$y = \log_3 x$  и  $y = \log_{1/3} x$ .

# Тригонометрическая функция

**Задача №1.** Вычислить период функций а)  
 $y = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ ; б)  $y = -2 \operatorname{tg}(\frac{x}{3} + \frac{3\pi}{4}) + 1$ .

Воспользуемся указанными в лекции формулами.

а) Для функции  $y = \cos(ax \pm b)$  период  $T = \frac{2\pi}{a}$ . В

нашем случае  $a = 2$ , т.е.  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .

б) Для функции  $y = \operatorname{tg}(ax \pm b)$  период  $T = \frac{\pi}{a}$ . У

нас  $a = \frac{1}{3}$ , т.к. аргумент можно представить не только разделенным на три, но и умноженным на  $\frac{1}{3}$ . Остальные действия с функцией (умножение на  $-2$ , добавление 1) не влияют на аргумент, поэтому нас не интересуют.

Получаем, что  $T = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$



Ответ. а)  $\pi$ ; б)  $3\pi$ .