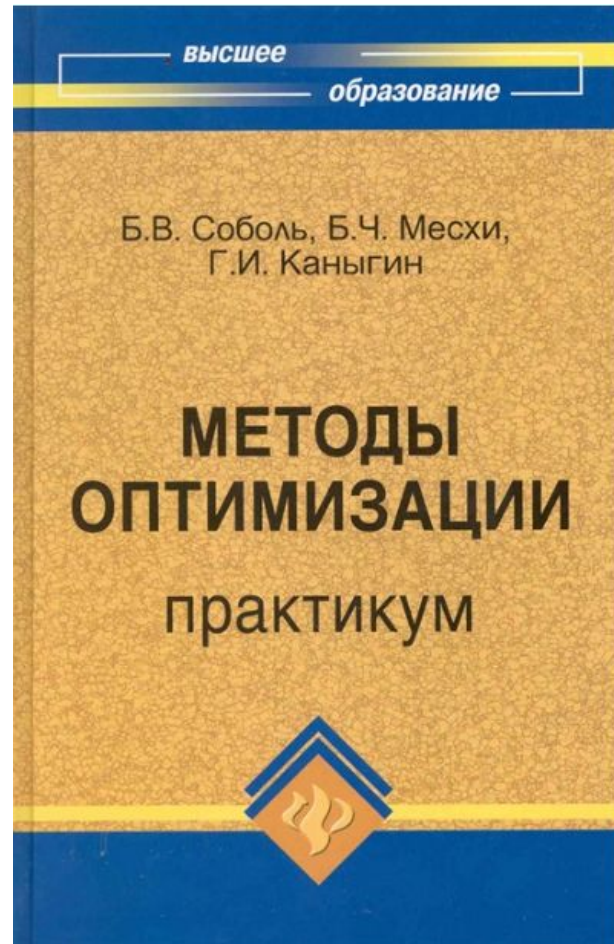


Методы оптимизации

Преподаватель: Каныгин Георгий Иванович,
кафедра «Информационные технологии»,
аудитория 352

Литература

1. **Соболь Б.В., Месхи Б.Ч., Каныгин Г.И. Методы оптимизации: практикум.**



2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс.
3. Банди Б. Основы линейного программирования.
4. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах.
5. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. ч.1,2.
6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах..
7. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование.

1. Основные определения

Под оптимизацией понимают процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных.

Параметры оптимизируемого объекта при решении инженерных задач принято называть **проектными параметрами**, а в экономических задачах – **параметрами плана**.

Выбор оптимального решения проводится с помощью некоторой функции, определяемой проектными параметрами. Она называется **целевой функцией** (или критерием оптимальности).

Целевую функцию можно записать в виде

$$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\bar{x} \in X \subseteq R^n$,

здесь R^n – множество всех действительных чисел n -мерного пространства;

X – область допустимых значений \bar{x} .

Число ~~пр~~ектных параметров характеризует размерность задачи оптимизации.

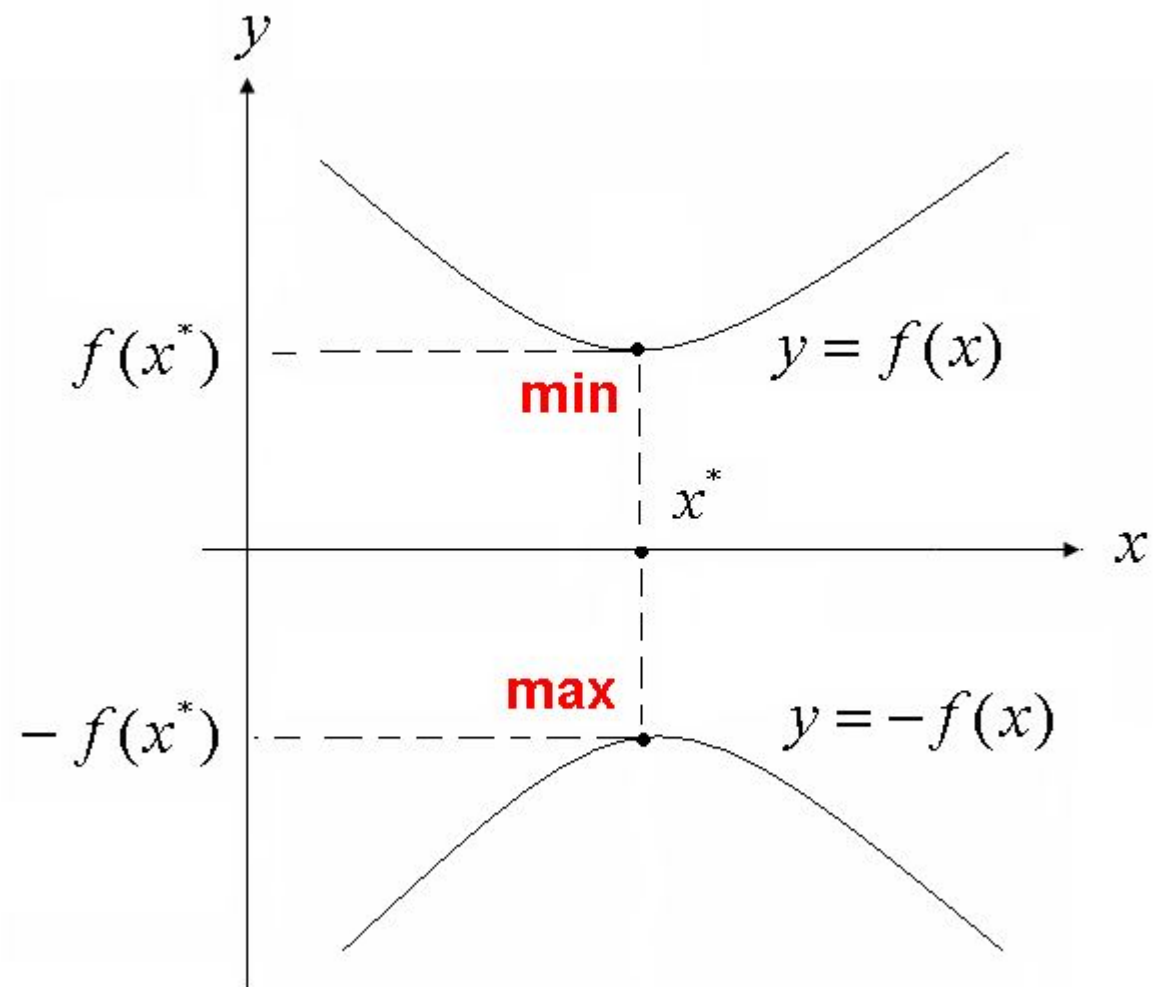
Допустимый вектор $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ доставляющий минимум целевой функции $f(\bar{x})$ **называется оптимальной точкой**, а соответствующее значение $f(\bar{x}^*)$ – **оптимальным значением** целевой функции.

Пара $\bar{x}^*, f(\bar{x}^*)$ составляет оптимальное решение.

Обычно рассматривают задачи минимизации целевой функции ;
к ним легко сводятся задачи на поиск максимума путем замены знака целевой функции на обратный

$$f(\bar{x}^*) = \max_{x \in X} f(\bar{x}) = -\min_{x \in X} [-f(\bar{x})]$$

Например, для функции одной переменной, имеем



1.1. Задачи оптимизации

Выделяют два типа задач оптимизации: **безусловные и условные**.

□ В **безусловных задачах** на пространство проектирования никаких ограничений не накладывается $\bar{x} \in X = R^n$. Функция $f(\bar{x})$ определена всюду.

□ В **условных задачах** задаются некоторые ограничения на пространство проектирования. Эти ограничения задаются совокупностью некоторых функций в виде равенств:

$$\varphi_i(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in X \subset R^n, \quad i = \overline{1, m}$$

или неравенств:

$$a_i \leq \varphi_i(\bar{x}) \leq b_i, \quad \bar{x} \in X \subset R^n, \quad i = \overline{1, m}.$$

Любой вектор $\overline{x^*} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, удовлетворяющий ограничениям, **называется допустимым вектором или допустимой точкой.**

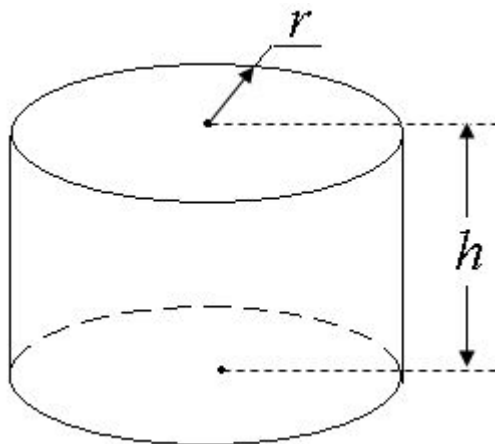
При наличии ограничений оптимальное решение может находиться или внутри области (**локальный экстремум**) или на границе области. Если ограничения отсутствуют, то ищется оптимальное решение на всей области (**глобальный экстремум**).

Глобальный экстремум всегда является одновременно локальным, но не наоборот.

Пример 1.1. Постановка задачи оптимизации.

Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V_0 .

Какими должны быть его размеры, чтобы на изготовление ушло наименьшее количество материала?



Проектные параметры:

- радиус цилиндра;
- высота цилиндра.

Целевая функция (которую необходимо минимизировать) –
площадь поверхности бака:

$$s(r, h) = 2\pi(r^2 + rh) \rightarrow \min.$$

Ограничение – равенство:

$$V_0 = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Ограничение – равенство благодаря своей простоте позволяет уменьшить размерность задачи оптимизации.

Исключим h из проектных параметров

$$h = \frac{V_0}{\pi \cdot r^2}$$

$$s(r) = 2\pi \left(r^2 + \frac{V_0}{\pi \cdot r} \right) \rightarrow \min -$$

одномерная задача оптимизации.

1.2. Характеристика методов решения задач оптимизации

При решении конкретной задачи оптимизации прежде всего должен быть **выбран математический метод**, который привел бы к конечным результатам с наименьшими затратами на вычисления или же давал возможность получить наибольший объем информации об искомом решении.

Выбор того или иного **метода** в значительной степени **определяется постановкой задачи** оптимизации, а также используемой **математической моделью** объекта оптимизации.

В настоящее время для решения задач оптимизации применяют в основном следующие методы:

- методы исследования функций классического анализа;
- нелинейное программирование;
- линейное программирование;
- геометрическое программирование;
- динамическое программирование;
- квадратичное программирование
- вариационное исчисление;
- принцип максимума.

□ **Методы исследования функций классического анализа**

представляют собой наиболее известные методы решения несложных задач оптимизации с использованием курса математического анализа.

□ **Методы нелинейного программирования**

применяют для решения задач оптимизации с нелинейными функциями цели. На независимые переменные могут быть наложены ограничения в виде нелинейных соотношений, имеющих вид равенств или неравенств. Названием **«методы нелинейного программирования»** объединяется большая группа численных методов, многие из которых приспособлены для решения задач оптимизации соответствующего класса.

□ **Линейное программирование**

представляет собой математический аппарат, разработанный для решения оптимальных задач с линейными выражениями для критерия оптимальности и линейными ограничениями на область изменения переменных.

□ **Методы динамического программирования**

служат эффективным методом решения задач оптимизации дискретных многостадийных процессов, для которых критерий оптимальности задается как аддитивная функция критериев оптимальности отдельных стадий.

□ **Геометрическое программирование**

Метод решения одного специального класса задач нелинейного программирования, в которых **целевая функция и ограничения задаются в виде полиномов** – выражений, представляющих собой сумму произведений степенных функций от независимых переменных.

□ Квадратичное программирование

Является частным случаем задачи нелинейного программирования, в которой критерий оптимальности представляет собой **квадратичную функцию**, а ограничения являются **линейными функциями**.

□ Методы вариационного исчисления

Обычно используют для решения задач, в которых критерии оптимальности представляются в виде функционалов и решениями которых служат неизвестные функции. Такие задачи возникают при **статической оптимизации** процессов с распределенными параметрами.

□ Принцип максимума

Применяют для решения задач оптимизации процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений.