Основные вопросы лекции

1. Понятие композиции отношений
2. Виды отношений
3. Способы задания отношений
4. Операции над отношениями

Пусть $R \subseteq A \times B$ - отношение на $A \times B$, а $S \subseteq B \times C$ - отношение на $B \times C$.

Композицией отношений S и R

называется **отношение** , определенное

следующим образом:

$$T = \{(a,c): \text{ существует такой элемент } b \text{ из } B, \text{ что } (a,b) \in R \text{ и } (b,c) \in S\}.$$

• Это множество обозначается

$$T = S \boxtimes R$$

Пример:

Даны, множества

A = {1,2,3}, B = {*x*,*y*}, C = {♦, ♥, ♣, ♠}.

Отношения R на $A \times B$

и S на $B \times C$ на заданы в виде:

R = {(1,*x*), (1,*y*), (3,*x*) };

S = {(*x*, ♦), (*x*, ♥), (*y*, ♣), (*y*, ♠)}.

$$(1, x) \in \mathrm{R} \text{ и } (x, \blacklozenge) \in \mathrm{S} \longrightarrow (1, \blacklozenge) \in \mathrm{S} \circ \mathrm{R}$$

$$(1, x) \in \mathrm{R} \text{ и } (x, \heartsuit) \in \mathrm{S} \longrightarrow (1, \heartsuit) \in \mathrm{S} \circ \mathrm{R}$$

$$(1, y) \in \mathrm{R} \text{ и } (y, \clubsuit) \in \mathrm{S} \longrightarrow (y, \clubsuit) \in \mathrm{S} \circ \mathrm{R}$$

$$(1, y) \in \mathrm{R} \text{ и } (y, \spadesuit) \in \mathrm{S} \longrightarrow (1, \spadesuit) \in \mathrm{S} \circ \mathrm{R}$$

$$(3, x) \in \mathrm{R} \text{ и } (x, \blacklozenge) \in \mathrm{S} \longrightarrow (3, \blacklozenge) \in \mathrm{S} \circ \mathrm{R}$$

$$(3, x) \in \mathrm{R} \text{ и } (x, \heartsuit) \in \mathrm{S} \longrightarrow (3, \heartsuit) \in \mathrm{S} \circ \mathrm{R}$$

- Тогда

$$\underleftarrow{S \circ R} = \{(1, \blacklozenge), (1, \heartsuit), (y, \clubsuit), (1, \spadesuit), (3, \blacklozenge), (3, \heartsuit)\}.$$

Теорема.

Композиция отношений ассоциативна;

т.е. если A, B, и C – множества и если

$$R \subseteq A \times B, \quad S \subseteq B \times C \quad T \subseteq C \times D$$

тогда

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

Виды отношений

В зависимости от того, какими свойствами обладает отношения, они делятся на три вида;

отношение эквивалентности,

отношение порядка,

отношение доминирования.

Бинарное отношение R на множестве A^2 называется ***отношением эквивалентности***, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Эквивалентные элементы

(т.е. находящиеся в отношении

эквивалентности), как правило, обладают

какими-то общими признаками.

Пример

A = {1,2,3,4,5,6},

R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4),(5,5), (6,6), (1,2), (1,4), (2,1), (2,4), (3,5), (5,3), (4,1), (4,2)}.

Бинарное отношение R на A *рефлексивно, симметрично, транзитивно*, следовательно, R есть ***отношение эквивалентности*** на множестве A.

Если на множестве задано отношение эквивалентности, то все его элементы можно разбить на непересекающиеся подмножества, состоящие из эквивалентных друг другу элементов (*классы эквивалентности*).

Разбиением множества А называется совокупность попарно непересекающихся непустых подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ из множества А таких, что каждый элемент множества А принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

Пусть a $\in$ A, и R отношение эквивалентнос ти на A $\times$ A. Пусть [a] обозначает множество

$$\{x : xRa\} = \{x : (x, a) \in R\}$$

называемое ***классом эквивалентности***, содержащим a.

Символ $[A]_R$ обозначает множество всех классов эквивалентности множества A по отношению R.

Пример

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6),$

$(1,2), (1,4), (2,1), (2,4), (3,5), (5,3), (4,1),$

$(4,2)\}$.

Класс эквивалентности по отношению к R получаются путем определения класса эквивалентности **каждого элемента множества A**.

$[1] = \{x : (x,1) \in R\} = \{x : \mathrm{xR1}\} = \{1,2,4\}$

$1 \in [1]$, поскольку $(1,1) \in R$,

$2 \in [1]$, поскольку $(2,1) \in R$,

$4 \in [1]$, поскольку $(4,1) \in R$.

Больше не существует иного x из A такого, что $(x,1) \in R$.

$[2] = \{x : (x,2) \in R\} = \{x : \mathrm{xR2}\} = \{2,1,4\}$

$2 \in [2]$, поскольку $(2,2) \in R$,

$1 \in [2]$, поскольку $(1,2) \in R$,

$4 \in [2]$, поскольку $(4,2) \in R$.

Больше не существует иного x из A такого, что $(x,2) \in R$.

$[3] = \{x : (x,3) \in R\} = \{x : \text{xR3}\} = \{3,5\}$

$3 \in [3]$, поскольку $(3,3) \in R$,

$5 \in [3]$, поскольку $(5,3) \in R$.

Больше не существует иного x из A такого, что $(x,3) \in R$.

$[4] = \{x : (x,4) \in R\} = \{x : \text{xR4}\} = \{4,1,2\}$

$4 \in [4]$, поскольку $(4,4) \in R$,

$1 \in [4]$, поскольку $(1,4) \in R$,

$2 \in [4]$, поскольку $(2,4) \in R$.

Больше не существует иного x из A такого, что $(x,4) \in R$.

$[5] = \{x : (x,5) \in R\} = \{x : \mathrm{xR5}\} = \{5,3\}$

$5 \in [5]$, **поскольку** $(5,5) \in R$,

$3 \in [5]$, **поскольку** $(3,5) \in R$,

Больше не существует иного x из A такого, что $(x,5) \in R$.

$$[6] = \{x : (x,6) \in R\} = \{x : \mathrm{xR6}\} = \{6\}$$

$6 \in [6]$, поскольку $(6,6) \in R$,

Больше не существует иного x из A такого, что $(x,6) \in R$.

Имеется только три различных класса эквивалентности

$$[1]=[2]=[4]=\{1,2,4\},$$

$$[3]=[5]=\{3,5\},$$

$$[6]=\{6\}.$$

$$[A]_R=\{[1],[3],[6]\}=\{\{1,2,4\},\{3,5\},\{6\}\}.$$

Выводы

Любой элемент класса эквивалентности порождает класс эквивалентности: если

$$b \in [a], \text{ то } [\mathrm{a}] = [b]$$

На основании этого свойства следует, что любой элемент класса эквивалентности представляет собой класс.

Каждый класс эквивалентности содержит по крайней мере, один элемент, в силу рефлексивности отношении.

Множество всех элементов, эквивалентных a, должно содержать a.

Никакой элемент не может принадлежать двум разным классам эквивалентности.

Отношение эквивалентности разбивает множество A на попарно непересекающиеся классы эквивалентных элементов, таким образом, что каждый элемент A принадлежит **точно одному** классу эквивалентности.

1. Всякое разбиение множества A на классы задает на множестве A отношение эквивалентности.

2. Всякое отношение эквивалентности R, определенное на множестве A, задает разбиение множества A на классы.

3. Между разбиениями множества на классы и отношениями эквивалентности, заданными на этом множестве, существует взаимно однозначное соответствие.

Отношение порядка

Отношение R на множестве A^2 называется *отношением частичного порядка*, если оно обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности.

Обычно отношения частичного порядка обозначают знаком $\leq$.

Множество A вместе с заданным на нем отношением частичного порядка R называется частично упорядоченным множеством (ЧУ-множеством с порядком R).

Если для двух элементов x и y выполняется $x \le y$, то говорят, что x «предшествует» y.

У произвольно взятого элемента y может быть много предшествующих элементов.

Однако, если x предшествует y, и не существует таких элементов z, для которых xRz и zRy, то x – непосредственный предшественник y, обозначение x $\prec$ y.

Элементы a и b частично упорядоченного множества (A, ≤) называется ***сравнимыми***, если a ≤ b или b ≤ a, в противном случае – несравнимыми.

Частичный порядок называется **линейным** (полным), если любые два элемента сравнимы.

Другими словами ***линейным порядком*** на множестве А называется отношение частичного порядка, при котором из любой пары элементов можно выделить предшествующий и последующий.

Пример линейного порядка: «≤» на множестве вещественных чисел, лексикографическое упорядочение слов в словаре.

Если каждые два элемента частично упорядоченные множества (A, ≤) сравнимы, то (A, ≤) называется ***вполне упорядоченным множеством*** или ***цепью***.

Простым примером отношения порядка является отношение, задаваемое обычным неравенством ≤ на множестве вещественных чисел R.

Рассмотрим на множестве A всех сотрудников некоторого предприятия.

Отношение, задается следующим образом: сотрудник x предшествует сотруднику y тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: x=y; x является начальником (не обязательно непосредственным) y.

Назовем такое отношение «быть начальником».

Отношение «быть начальником» является отношением порядка.

Поскольку существуют такие пары сотрудников x и y, для которых не выполняется ни $x \le y$, ни $y \le x$ (например, если x и y являются сослуживцами).

Такие отношения, в которых есть несравнимые между собой элементы, называют *отношениями частичного порядка*.

Вершины графа изображают элементы ЧУ-множества А, и если x $\prec$ y., то вершина x помещается ниже вершины y и соединяется с ней ребром.

Диаграмма Хассе позволяет получить полную информацию об исходном частичном порядке.

Пример:

Дано отношение «…делитель…» определяет частичный порядок на множестве $A = \{1,2,3,6,12,18\}$.

Составить таблицу предшественников и непосредственных предшественников.

Построить соответствующую диаграмму Хассе.

элемент	Предшественник	Непосредственный предшественник
1	нет	нет
2	1	1
3	1	1
6	1,2,3	2,3
12	1,2,3,6	6
18	1,2,3,6	6

Диаграмма Хассе