



Подготовка экспертов для работы в региональной предметной комиссии при проведении итоговой аттестации по общеобразовательным программам основного общего и среднего общего образования

Тема 2.

Методика проверки и оценки алгебраических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задания 21 и 22)

Семенов Андрей Викторович, к. пед. н, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»

21

Решите неравенство $(x - 7)^2 < \sqrt{11}(x - 7)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x - 7)(x - 7 - \sqrt{11}) < 0,$$

откуда $7 < x < 7 + \sqrt{11}$.

Ответ: $(7; 7 + \sqrt{11})$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	<i>Максимальный балл</i>

- Должны быть решения квадратных уравнений, а не просто записанные корни.
- Вывод «нет корней» должен сопровождаться вычислением отрицательного дискриминанта (выделением полного квадрата), кроме случая использования знака равносильности и совокупности. При равносильности ответ записывается в виде множества (за другой вид не снижать).
- Если используют обратную теорему Виета, то она должна быть прописана.
- Не снижать за то, что корни выписаны не в порядке возрастания.
- Если ввели подстановку и прописали ограничение на переменную неправильно – ошибка.

- Знак равносильности между разными переменными писать нельзя (разные множества).
- Ввели новую переменную, но не описали ее ограничение. Лишний корень при этом отбросили, сославшись на непрописанное ограничение, да еще может быть ответ не упрощен (сокращение) – 1 балл.
- Если в ответе корни не сокращены, но в процессе решения вся логика присутствует - 2 балла.
- Правильное логическое решение, корни верные, но при этом написана какая-нибудь глупость про переменные – это проблема с обоснованностью – 1 балл.

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Ответ: $1 - \sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3}$.

$$\sqrt{21.} \quad (x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0.$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0.$$

$$D = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & \end{matrix}$$

Ответ: $1 + \sqrt{3}$; $1 - \sqrt{3}$.

$$(x-1)^4 = t^2$$

$$(x-1)^2 = t$$

$$(x-1)^2 = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3.$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0.$$

$$D = 4 + 8 = 12 = 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$(x-1)^2 = -1$$

нет решений, т.к.
квадрат не может
быть отрицательным.

2
балла

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Ответ: $1 - \sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3}$.

2) $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$ Пусть $(x-1)^2 = t$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

пог. Виета пог. одр. г. Виета

$$t_1 + t_2 = 2$$

$$t_1 \cdot t_2 = -3$$

не удовлетворяет условию

$$t_1 = -1 \quad t_2 = 3$$

$$(x-1)^2 = t \quad t = 3$$

$$(x-1)^2 = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 8 = 12$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{2 - 2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2 + 2\sqrt{3}}{2}$

1 балл

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Ответ: $1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}$.

№21.

$$\textcircled{1} \quad (x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$$

Пусть: $(x-1)^2 = t$

Тогда: $t^2 - 2t - 3 = 0$

$$a=1; b=-2; c=-3$$

$$D = 4 + 12 = 16;$$

$$t_1 = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Ответ: $0; 2, \frac{2+\sqrt{12}}{2}; \frac{2-\sqrt{12}}{2} \quad x(x-2)=0;$
 $x=0; x=2$

$$\textcircled{2} \quad 1) \quad (x-1)^2 = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D=12$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{12}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{12}}{2}$$

$$2) \quad (x-1)^2 = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

0
баллов

21.

$$(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$$

Заменим: $(x-1)^2 = t$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$t_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$(x-1)^2 = 3 \quad \text{или} \quad (x-1)^2 = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3$$

корней нет

$$x^2 - 2x + 1 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2}$$

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Ответ: $1 - \sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3}$.

2 балла

521.

$$x^4 = (x-2)^2$$

$$x^4 - (x-2)^2 = 0$$

$$(x^2 - (x-2)) \cdot (x^2 + (x-2)) = 0$$

$$x^2 - (x-2) = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + (x-2) = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \quad \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2$$

Ответ: -2; 1.

1 балл

Расстояние между пристанями А и В равно 108 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение.

Плот проплыл 50 км, значит, он плыл 10 часов, из которых лодка находилась в пути 9 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

$$\frac{108}{v+5} + \frac{108}{v-5} = 9; 108v - 540 + 108v + 540 = 9v^2 - 225; v^2 - 24v - 25 = 0,$$

откуда $v = 25$.

Ответ: 25 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	<i>Максимальный балл</i>

- Обращать внимание на единицы измерения переменных! Если их нет (т.е. нет вообще нигде в процессе решения, а не частично – у одной из трех переменных), но ответ верный - 1 балл.
- При работе с дробно-рациональным уравнением должно быть прописано, что знаменатель не равен нулю! – если нет, то 1 балл при верном ответе.
- Уравнение составлено неправильно – 0 баллов.
- Отбор корней должен быть обоснованный.
- Если дробно-рациональное уравнение получено из системы, то снижать балл из-за не прописанного ОДЗ не надо.

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№22

$$\begin{array}{l|l|l} v & t & S \\ \hline x-4 \text{ км/ч} & \frac{77}{x-4} & 77 \text{ км} \\ \hline x+4 \text{ км/ч} & \frac{77}{x+4} & 77 \text{ км} \end{array}$$

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$$

$$77(x+4) - 77(x-4) = 2(x^2 - 16)$$

$$77x + 308 - 77x + 308 = 2x^2 - 32$$

$$616 = 2x^2 - 32 \quad | : 2$$

$$308 = x^2 - 16$$

$$324 = x^2$$

$$x = \pm 18$$

Ответ: 18 км/ч

1 балл

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№22 Пусть x — v лодки (км/ч)
 тогда $x+4$ — v по течению (км/ч)
 $x-4$ — v против течения (км/ч)

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$$
~~$$\frac{77(x+4) - 77(x-4)}{(x-4)(x+4)} = 2$$~~

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} - 2 = 0$$

$$\frac{77(x+4) - 77(x-4) - 2(x^2-16)}{(x-4)(x+4)} = 0 \quad \text{O.D.З.: } \begin{matrix} x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{matrix}$$

$$77x + 308 - 77x + 308 - 2x^2 + 32 = 0$$

$$-2x^2 + 32 + 616 = 0$$

$$2x^2 = 648$$

$$x^2 = 324$$

$$x_1 = 18 \quad x_2 = -18 \quad (\text{не подходит по смыслу})$$

18 км/ч — v лодки

Ответ: 18 км/ч

2 балла

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. ¶
Ответ: 18 км/ч. ¶

	v	t	S
по теч	$x+4$	$\frac{77}{x+4}$	77
пр теч	$x-4$	$\frac{77}{x-4}$	77

№22

составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$$

$$\frac{77(x+4) - 77(x-4) - 2(x^2-16)}{x^2-16} = 0$$

ОДЗ: $x \neq 4$; $x \neq -4$

$$77(x+4) - 77(x-4) - 2(x^2-16) = 0$$

$$77 \cdot 8 - 2x^2 + 32 = 0$$

$$616 - 2x^2 + 32 = 0$$

$$2x^2 - 648 = 0$$

$$x^2 = 324$$

$$x_1 = 18$$

$$x_2 = -18$$

Ответ: 18

1 балл

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

N22

$$S = 77$$

$t_{\text{против}} < t_{\text{по течения}}$

$$v_{\text{вет}} = 4 \text{ км/ч}$$

$$v_{\text{л}} = ?$$

Решение:

Пусть $x = v_{\text{л}}$ тогда $x + 4 = v_{\text{по течения}}$, $x - 4 = v_{\text{против течения}}$

$$\frac{77}{x+4} + 2 = \frac{77}{x-4} \quad x(x+4)(x-4) \quad \text{Смотрим на обороте}$$

$$77x - 308 + 2x^2 - 32 - 77x - 308 = 0$$

$$2x^2 - 648 = 0$$

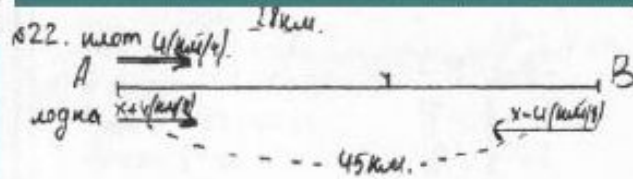
$$x^2 - 324 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{324}$$

$$x_1 = 18 \quad x_2 = -18 \text{ не подходит по условию}$$

Ответ 18 км/ч

1 балл



Расстояние между пристанями А и В равно 45 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 28 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 16 км/ч.

$\frac{28}{4}$ (ч) - время, за которое проплыл плот 28 км по течению реки.

$\frac{45}{x+4}$ (ч) - время, за которое проплыла лодка по течению реки (из А в В)

$\frac{45}{x-4}$ (ч) - время, за которое проплыла лодка против течения реки (из В в А).

$\frac{45}{x+4} + \frac{45}{x-4}$ (ч) - время, за которое проплыла лодка движась по течению реки и движась против течения реки (из А в В и из В в А)

$\frac{28}{4} - 1$ (ч) - время, которое затратила лодка движась из А в В и из В в А.

Составим уравнение:

$$\frac{45}{x+4} + \frac{45}{x-4} = \frac{28}{4} - 1$$

$$\begin{aligned} x-4 > 0 \\ x > 4 \end{aligned}$$

$$\frac{45}{x+4} + \frac{45}{x-4} = 6$$

$$\frac{45x-4}{x+4} + \frac{45x+4}{x-4} - 6 = 0$$

$$\frac{45(x-4) + 45(x+4) - 6(x^2-16)}{(x+4)(x-4)} = 0$$

$$45x - 180 + 45x + 180 - 6x^2 - 6 \cdot (-16) = 0$$

$$-6x^2 + 90x + 96 = 0 \quad | :(-6)$$

$$x^2 - 15x - 16 = 0$$

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot (-16) = 225 + 64 = 289$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{289} = 17$$

$$x_1 = \frac{15+17}{2} = \frac{32}{2} = 16 \quad x_2 = \frac{15-17}{2} = \frac{-2}{2} < 0$$

Ответ: 16 (км/ч) скорость лодки в неподвижной воде.

2 балла

© Все права защищены

Работа 15

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

N22

A ————— B
77 км

$S = t \cdot v$

x — время, кот. шла лодка по течению \Rightarrow x+2 — против течения
 y — скорость лодки в неподвижной воде.

$$\begin{cases} 77 = (y+4) \cdot x \\ 77 = (y-4) \cdot (x+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{77}{y+4} \\ x = \frac{77}{y-4} \cdot 2 \end{cases}$$

$$\frac{77}{y+4} = \frac{77}{y-4} \cdot 2$$

$$\frac{77}{y+4} = \frac{77 - 2y + 8}{y-4}$$

$$77(y-4) = (77-2y+8)(y+4)$$

$$77y - 308 = 308 + 77y - 8y - 2y^2 + 32 + 8y$$

$$2y^2 - 648 = 0$$

$$2y^2 - 648 = 0 \mid :2$$

$$y^2 - 324 = 0$$

$$D = 4 \cdot 324 = 1296 \quad \sqrt{D} = 36$$

$$y_1 = \frac{36}{2} = 18$$

$$y_2 = \frac{-36}{2} = -18 \text{ — не подходит т.к. скорость } > 0$$

Ответ: 18 км/ч

2 балла

Логические ошибки (0 баллов):

- Перенос слагаемого из одной части уравнения в другую и при этом знак не изменили.
- При расчете корней квадратного уравнения внесено неправильное значение коэффициента:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{2})}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } 2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}$$

- При расчете корней квадратного уравнения неправильно сокращена дробь:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} (x-1)^2 &= 3 \\ x^2 - 2x + 1 &= 3 \\ x^2 - 2x - 2 &= 0 \\ D &= 4 + 4 \cdot 2 \cdot 1 \\ D &= 4 + 8 = 12 \\ \sqrt{D} &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ x_1 &= \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ x_2 &= \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Вычислительные ошибки(1 балл):

- Отсутствуют промежуточные расчеты, а в итоговом числе после упрощения не то значение:

Ответ: 52,8 км/ч

522
x - все путь (км)

	s	v	t
I	$\frac{x}{2}$ км	36 км/ч	$\frac{x}{72}$ ч
II	$\frac{x}{2}$ км	99 км/ч	$\frac{x}{198}$ ч

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{все}}}{t_{\text{все}}} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{x}{72} + \frac{x}{198}} = \frac{729}{15} = 48,6 \text{ км/ч}$$

792

Ответ 48,6 км/ч

Задача решена
1 балл

Подготовка экспертов для работы в региональной предметной комиссии при проведении итоговой аттестации по общеобразовательным программам основного общего и среднего общего образования

Тема 3.

Методика проверки и оценки геометрических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задания 24 и 25)

Семенов Андрей Викторович, к. пед. н, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»

24

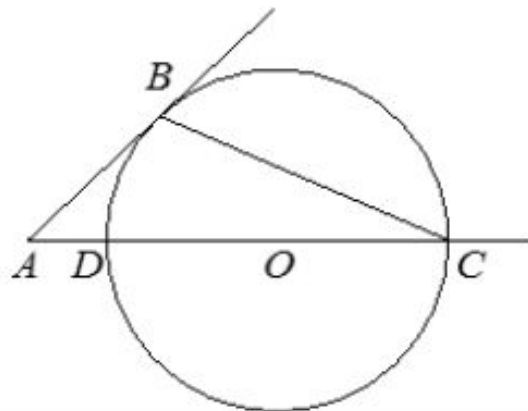
Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если $AB = 8$, диаметр окружности равен $3,6$.

Решение.

Пусть $AC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$$AB^2 = AC(AC - CD); 64 = x(x - 3,6), \text{ откуда} \\ x = 10.$$

Ответ: 10.



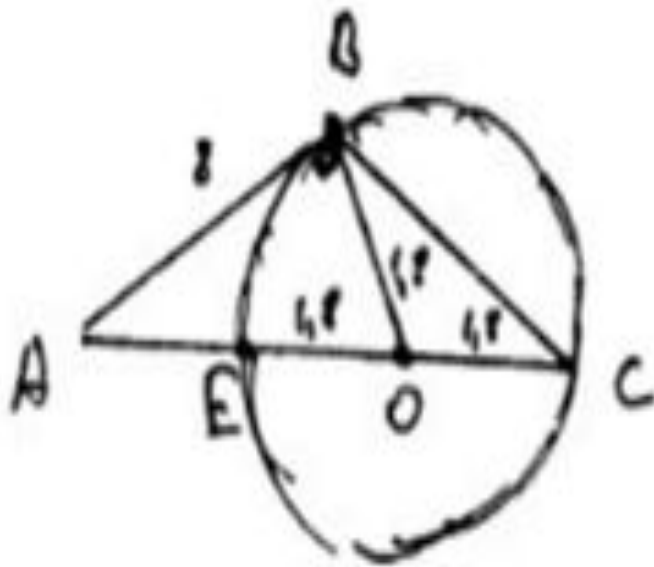
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

- Все признаки и свойства должны быть четко прописаны.
- «Если две прямые пересекаются третьей и есть два равных угла, то прямые параллельны» - данное утверждение ошибочно.
- Четко прописаны названия углов, указаны параллельные прямые и секущая.
- Если есть описание равных углов в решении, но нет на чертеже – баллы не снижать.
- Накрестлежащие и внутренние накрестлежащие – эти оба термина правильные.

- Утверждение о том, что «биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник», не прописано отдельным свойством в учебниках, которые используются в массовом обучении. Оно есть в Мерзляке (менее 8%), но он не массовый, поэтому такие утверждения должны быть доказаны или очень четко сформулированы. Фразы вида: «Т.к. это биссектриса в параллелограмме, то треугольник равнобедренный» - это необоснованное решение.
- Если не указаны параллельные прямые и секущая — минус 1 балл за необоснованность.

- Не придирайтесь к словам: признак, свойство (дети их часто путают), если формулировка прописана верно.
- Если используем математический знак подобия между треугольниками, то обращаем внимание на последовательность букв и снижаем балл. Если в свободном тексте указывают два треугольника, то буквы могут иметь любую последовательность

- Нет логических ошибок, нет вычислительных ошибок, но забыли упомянуть об использовании теоремы Пифагора – не снижать.
- По свойству касательной – запись допустима и балл не снижать.



если $AB = 8$, диаметр
 Ответ: 10.

Пусть O – центр
 данной окружности
 $\angle ABO = 90^\circ$ по свойству касат.

- В задании снижен 1 балл за 3 пункт – в скобках не объяснение, а комментарий.

24

Дано:

$\omega(O; R)$ – окружность

AB – хорда

CD – хорда

AB = 14

CD = 48

$OH \perp AB$

$OH_1 \perp CD$

$OH = 24$

$OH_1 = ?$

углышка) $\Rightarrow AH = \frac{14}{2} = 7$

1) $AO = OB = OC = OD$ (радиусы)

2) из п. 1 $\Rightarrow \triangle AOB$ и $\triangle COD$ – равнобедренные

3) из п. 2 $\Rightarrow OH$ и OH_1 – медианы (высоты, проведенные к основанию равнобедренного треугольника) $\Rightarrow AH = \frac{14}{2} = 7$

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если $AB = 8$, диаметр окружности равен $3,6$.

Ответ: 10.

$$\sqrt{24}$$

Пусть O — центр окр. O ;
 AC и окружность O пересекаются в точках D и C

$$\Rightarrow OD = OC = OB = R = 3,6/2$$

$\angle OBA = 90^\circ$ т.к. AB кас. \Rightarrow

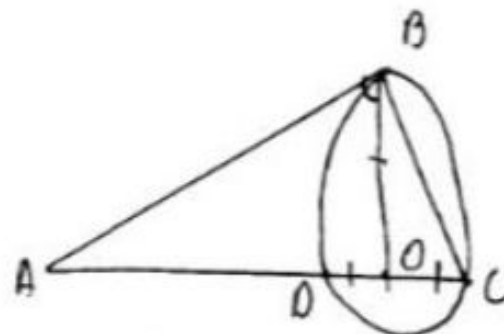
по теореме Пифагора $AO^2 = AB^2 + BO^2 = 8^2 + \left(\frac{3,6}{2}\right)^2 = 64 + 12,96 = 76,96$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{76,96} + 3,6$$

Ответ: $AC = 11,8$

$$= 64 + 3,24 = 67,24 = 8,2^2 \Rightarrow AC = 8,2 + 3,6 = 11,8$$

Ответ: $AC = 11,8$

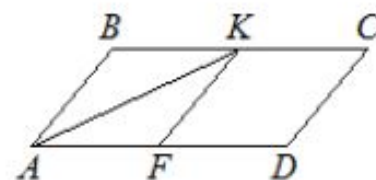


0
баллов

- 25 Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Точка K — середина стороны BC . Докажите, что AK — биссектриса угла BAD .

Доказательство.

Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD .



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

- Знак следования позволяет подробно не расписывать виды углов и секущие с параллельными прямыми.
- В задании ниже 2 балла – присутствует описка, которая не влияет на ход рассуждения и ответ.

125

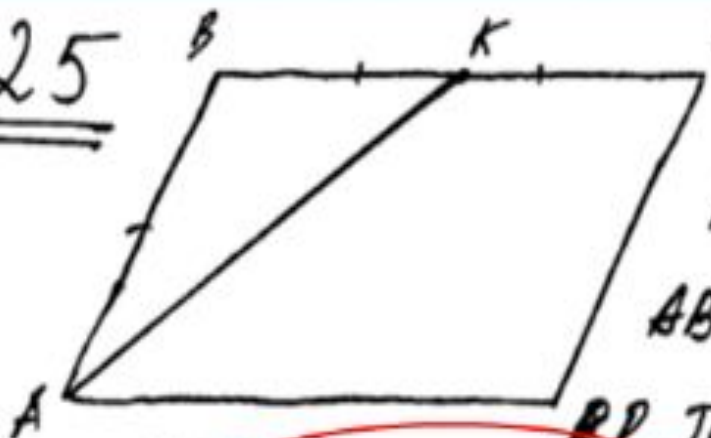
Пусть $AB = a \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow BK = a \Rightarrow \triangle ABK \text{ рб} \Rightarrow$
 $\angle BAK = \angle BKA = \alpha \Rightarrow \angle ABK = 180 - 2\alpha$
 т.к. $BC \parallel AD \Rightarrow \angle BAK + \angle ABK = 180 \Rightarrow \angle BAK = 2\alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle KAD = \alpha \Rightarrow \angle BAK = \angle KAD \Rightarrow AK \text{ бис. } \angle BAD$

□

The diagram shows a parallelogram ABCD. Diagonal AC is drawn. Point K is on side BC such that BK = KC. Tick marks indicate AB = BK = KC = CD. At vertex A, the angle between AB and AC is labeled alpha. At vertex B, the angle ABC is labeled 180 - 2alpha. The angle between AC and BC at K is also labeled alpha.

- Прописано равенство сторон треугольника и без дополнительных пояснений равенство углов, не снижаем – 2 балла.

N25



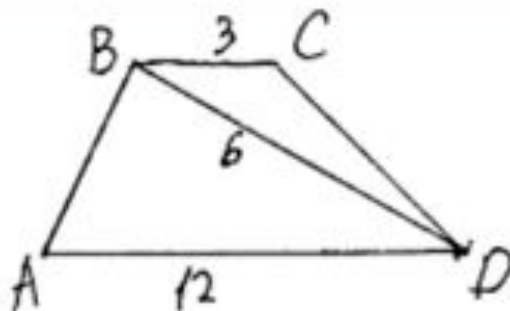
Пусть $\angle ABK = \alpha$, тогда $\angle ADC = \alpha$,
 $\angle BAD = \angle BCD = 180 - \alpha$, так как
 $ABCD$ – параллелограмм. $AB = BK$
 Значит $\angle BAK = \angle BKA = (180 - \alpha) : 2 = 90 - \frac{1}{2}\alpha$. Значит Тогда
 $\angle KAD = 180 - \alpha - (90 - \frac{1}{2}\alpha) = 90 - \frac{1}{2}\alpha$ ^{Значит} $\angle KAD = \angle BAK$
 Тогда AK – биссектриса $\angle BAD$.


- 1 балл – неправильная формулировка признака в скобках, а именно угол между пропорциональными сторонами. Об угле между сторонами нигде в задаче не указано.

№ 25
 Дано:
 ABCD – трап.
 BC || AD
 BC = 3
 AD = 12
 BD = 6

Т.г.:
 Δ CBD ∼ Δ BDA

(сторонам)



1) $\angle BDA = \angle CBD$ (т.к. n_1  при

BC || AD и секущей BD)

2) $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}$ ($\frac{12}{6} = \frac{6}{3}$)

3) Из п.1 и п.2 $\Rightarrow \Delta CBD \sim \Delta BDA$

(по равному углу и 2 соответственным

сторонам)

Логические ошибки – 0 баллов:

- При сложении двух отрезков вместо радиуса используют значение диаметра.
- Работая с теоремой Пифагора забыли квадрат:

если $OC = 1,8$. AO – гипотенуза $\triangle ABO$, значит $AO =$
 $= 1,8^2 + 8^2 = 64 + 3,24 = 67,24$. Значит $AC = 67,24 + 1,8 =$
 $= \cancel{67} 68,04$, так как $AO + OC = AC$. Ответ: 68,04.

Тема 4.

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26).

Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом

Семенов Андрей Викторович, к. пед. н, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

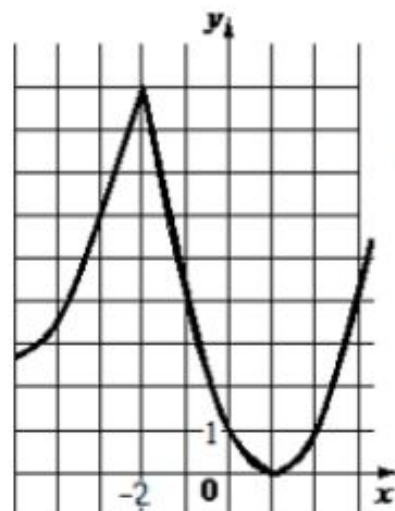
и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = -\frac{18}{x}$ при $x < -2$ и график функции $y = x^2 - 2x + 1$ при $x \geq -2$.

Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

Ответ: $0; [9; +\infty)$.



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

- Если функция задана кусочно, то граничная точка должна быть подставлена и прописана в таблице у обеих функций. Иначе 0б.
- Точки, по которым идет построение, должны быть видны на графике.
- Должно быть (желательно) подробное описание построения графика: название (гипербола, парабола), найдены координаты вершины, указаны направление ветвей.
- При отборе параметра, на графике должно быть изображено несколько горизонтальных линий, прописаны все случаи параметра. Параметр – это исследование, а не устный ответ.

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} & ; \text{при } x < -2 \end{cases}$$

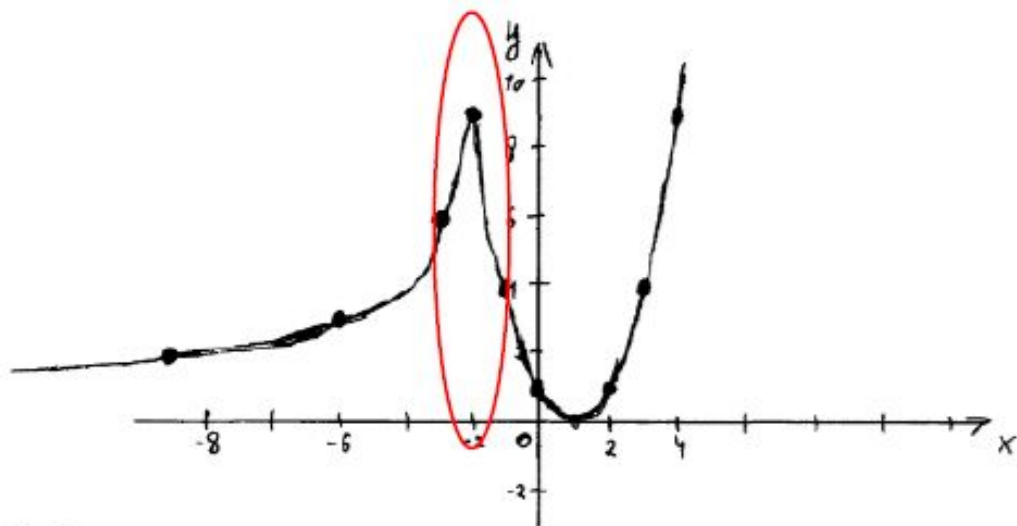
$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad y = 1 - 2 + 1 = 0$$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$$y = x^2 - 2x + 1; \text{ при } x \geq -2$$

x	-3	-4	-6	-9
y	2	3	6	9

$$y = -\frac{18}{x}, \text{ при } x < -2$$



Ответ: при $m = 0$ и $m \in [9; +\infty)$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

2	График верно, найлены значения	построен верно искомые параметра
1	График верно, найлены значения	построен но искомые параметра найлены неверно или не найлены

0 баллов

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}, & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 2x + 1$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

(1; 0) - вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

2) $y = -\frac{18}{x}$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

x	-3	-6	-2
y	6	3	9

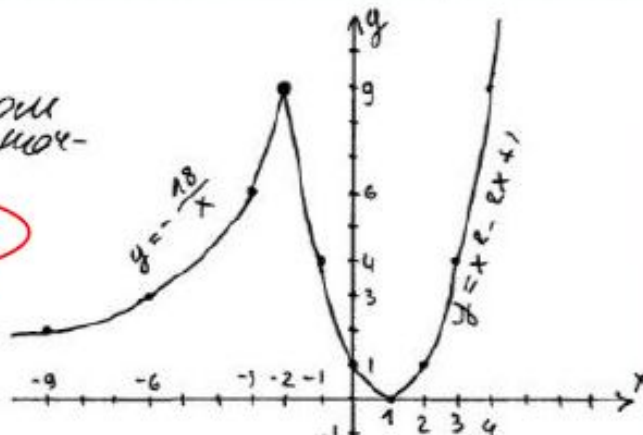
$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

$y = m$

m - ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$m = 0; [9; +\infty)$

Ответ: $0; [9; +\infty)$ - m



2	График построен верно, найдены значения параметра	построен верно, найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но значения параметра найдены неверно или не найдены	построен верно, но искомые значения параметра не найдены

1 балл

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

Плоскост

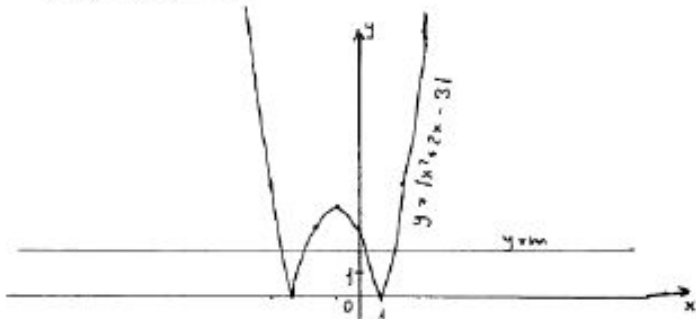
$$y = x^2 + 2x - 3$$

$$1) x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$y_0 = 1 - 2 - 3 = -4$$

2) ^{Ключевые моменты} $(0, -3), (1, 0), (-3, 0)$

x	-3	-2	-1	0	1
y	5	-3	-4	-3	5



3) ^{Число точек} $y = mx$

График функции $y = mx$ имеет (точек) с $y = |x^2 + 2x - 3|$

1) 0 точек при $m \in (-\infty, 0)$

2) 2 точки при $m = 0$

3) 4 точки при $m \in (0, 4)$

Ответ 4

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1$$

$$x = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

23

Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

Построим график функции $y = x^2 + 2x - 3$ при $x < -3$ и $x > 1$ и график функции $y = -x^2 - 2x + 3$ при $-3 \leq x \leq 1$.

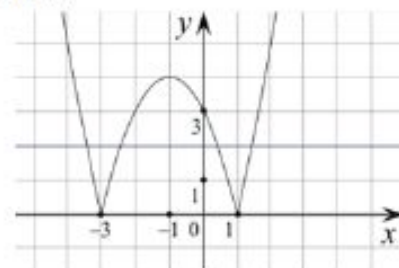


График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, 0, 2, 3 или 4 общие точки.

Ответ: 4.

**Задача не решена
0 баллов**

№23

Решение

Построим график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$. Графиком является парабола, $a = 1 > 0$ (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси Ox сохранить, а лежащую ниже оси Ox отобразить над осью Ox .

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$. $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

$y_0 = 2^2 - 8 + 3 = -1$ (2; -1) - вершина

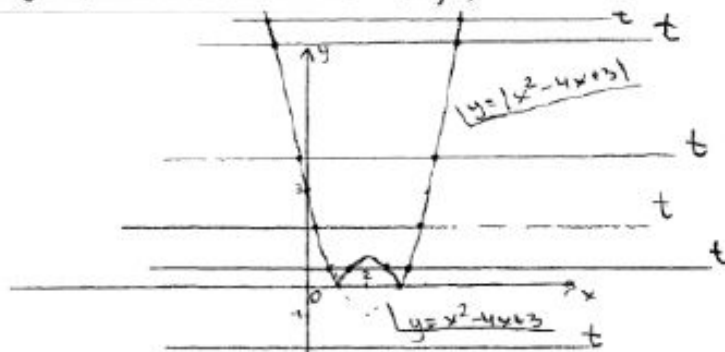
Oy : $0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$ (0; 3)

Ox : $x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = 16 - 12 = 4$

$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ $x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$ (3; 0); (1; 0)

$y(5) = 5^2 - 5 \cdot 4 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$ (5; 8)



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямой t и отметим её точки пересечения с графиком $y = |x^2 - 4x + 3|$

Ответ: 4 общих точки

Постройте график функции

$y = |x^2 - 4x + 3|$.

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

2	График построен верно, найдены значения параметра	построен верно, найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но найдены неверно или не найдены значения параметра	построен неверно, искомые значения параметра не найдены

2 балла

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Решение.

Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рис.). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC , точка K лежит на стороне AC .

Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q . Тогда $DQ = MD = 3$.

По следствию из теоремы о касательной и секущей

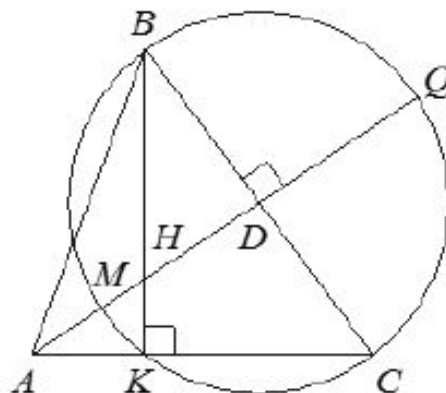
$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = (AD - MD) \cdot (AD + MQ) = 6 \cdot 12 = 72.$$

Из подобия прямоугольных треугольников $AHК$ и ADC следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC}, \text{ откуда } AK \cdot AC = AD \cdot AH = 9AH.$$

Значит, $9AH = 72$. Следовательно, $AH = 8$.

Ответ: 8.

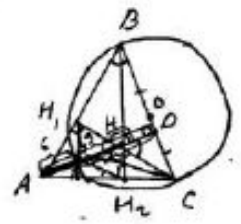


Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

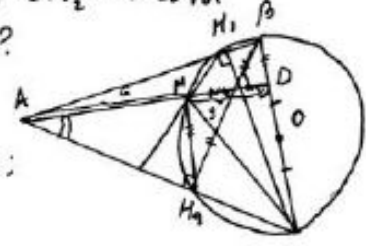
На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD=9$, $MD=3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Ответ: 8.

~20



Дано:
 $\triangle ABC$; \odot — диаметр
 $BC = d$
 $AB = 9$ $MD = 3$
 H — точка пересечения высот
 AD ; CH_1 ; BH_2 — высоты
 Найти: $AH = ?$



Решение:

$\triangle ABC$ — данный треугольник;
 BC — диаметр окружности \odot .
 $AD = 9$; $MD = 3$
 $AH = AD - MD = 9 - 3 = 6$ (по аксиоме излучения отрезков).
 Доп. Построения.

Рассмотрим $\triangle ANH$ и $\triangle DCH$.

они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.

Значит $K = \frac{AD}{DC} = \frac{AH}{CH} = \frac{AB}{BC}$

$K = \frac{9}{3} = \frac{AH}{3} = \frac{AB}{BC} = K$

Пусть $MH = x$ см $x > 0$, тогда $AH = x + 6$ см.
~~Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACH_1$~~
~~они подобны, значит $K = 1,5$.~~
 Рассмотрим $\triangle HBD$ и $\triangle HH_2H$.
 Они равны по 1-ому признаку равенства \triangle .
 ($\angle HNH_2 = \angle BHC$ как вертикальные)
 ($H_2H = BH$; $H_1H = CH$)
 Следовательно $MD = HH + HD = 3 : 2 = 1,5$.
 $AH = AM + MH$.
 $6 + 1,5 = 7,5$ (по аксиоме излучения отрезков)
 Ответ: 7,5 см.

0 баллов

В подобии треугольников неверно составлено соотношение.

26. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Дано:
 $AD = 9$
 $MD = 3$

Найти. AH

Решение

$\triangle CAD \sim \triangle CFB$ (по 3 углам) $\angle C$ -общ.

$\triangle CFB \sim \triangle BHD$ (по 3 углам) $\angle B$ -общ.

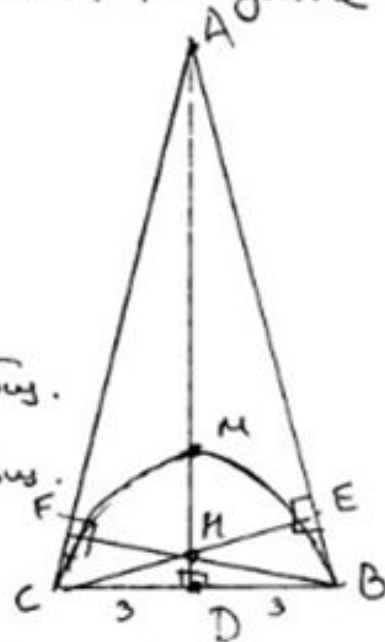
следовательно $\triangle CAD \sim \triangle BHD$

$CD = BD = MD = 3$ (так как радиусы)

$$K = \frac{9}{3} = 3 \quad \angle HD = CD \quad HD = \frac{CD}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$AH = AD - HD = 9 - 1 = 8$$

Ответ: $AH = 8$



0 баллов – ошибочное утверждение, что D середина CB.

526

Дано $ABCD$ - паралл., KH - высота,
 AM - бисс., BN - бисс., $BC = 12$, $KH = 9$
Найдите S

Реш е 1) Докнностр $KF \perp BC$, $KP \perp AD$

2) Р-м $\triangle HKB$ и $\triangle BFK$

$\triangle HKB$ и $\triangle BFK$ - прямые

BK - общ.

BN - бисс. $\Rightarrow \angle HBK = \angle KBF$

$\Rightarrow KP = BK = 9$

3) Р-м $\triangle HAK$ и $\triangle KAP$

$\triangle HAK$ и $\triangle KAP$ прямые

AK - общ.

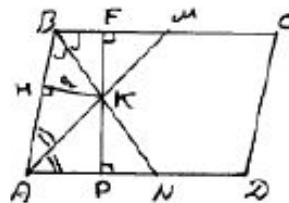
AM бисс. $\Rightarrow \angle HAK = \angle KAP$

$\Rightarrow KP = KH = 9$

$KP = 9$
 $KF = 9$ } $\Rightarrow FP = 18$

$BC = 12$

$\Rightarrow S = ah = 12 \cdot 18 = 216$ Ответ 216

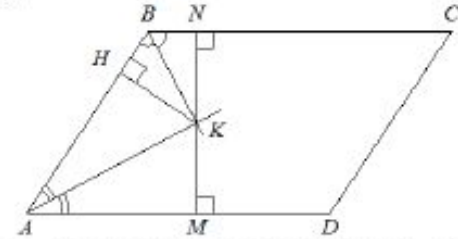


Почему FP -
высота
трапеции?

26 Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 12$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 9.

Решение.

Пусть KH , KN и KM — перпендикуляры, опущенные из точки K к сторонам AB , BC и AD соответственно (см. рис.). Тогда по свойству биссектрис $KM = KH = KN = 9$.



Кроме того, точки M , K и N лежат на одной прямой и $MN = MK + KN = 18$ — высота параллелограмма $ABCD$.

По формуле площади параллелограмма находим $S_{ABCD} = BC \cdot MN = 12 \cdot 18 = 216$.

Ответ: 216.

**Задача решена
1 балл**



Указания к тренингу.

Внимательно читайте задание и
отвечайте на поставленный вопрос.

Успехов!

bliliy@yandex.ru