

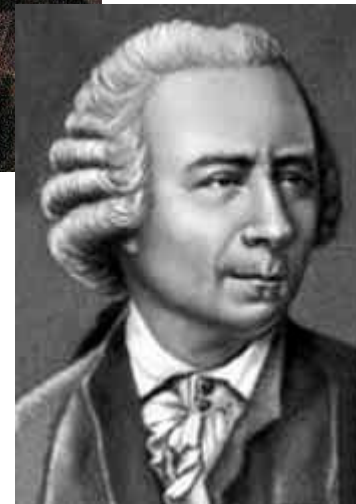
# Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

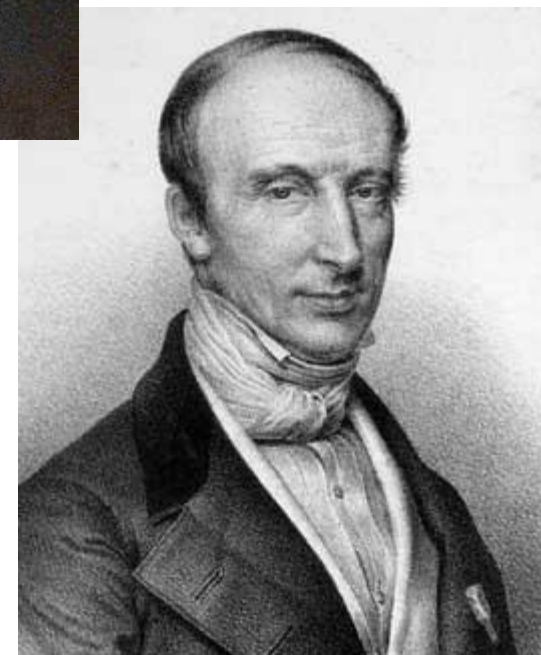
Презентация  
Поляковой Валерии,  
группа 15-60, ИПП  
Преподаватель: доц.  
Светлаков Алексей  
Николаевич

# История развития

- Это понятие на интуитивном уровне использовалось ещё во второй половине 17 века английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном (1642 - 1727), а также математиками 18 века - швейцарским, немецким и русским математиком Леонардом Эйлером (1707 - 1783) и французским математиком, астрономом и механиком Жозефом Луи Лагранжем (1736 - 1813).

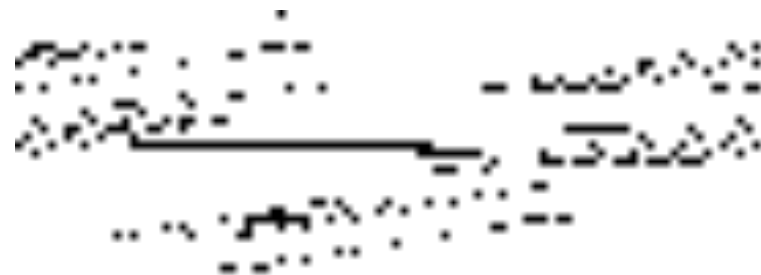


- Это было связано с тем, что ученые того времени не ставили перед собой задачу построения теории пределов. Первые строгие определения предела последовательности дали в 1816 году чешский математик, философ, теолог Бернхард Больцано (1781 - 1848) и французский математик Огюстен Луи Коши (1789 - 1857) в 1821 году.



# Первый замечательный предел

- Первым замечательным пределом называется предел отношения синуса бесконечно малой дуги к той же дуге, выраженной в радианной мере



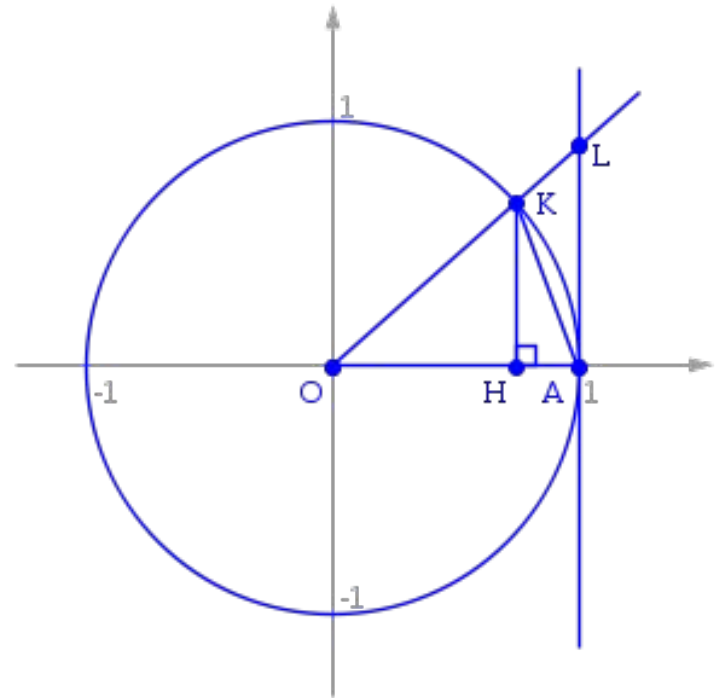
# Доказательство

- Рассмотрим односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \quad \text{и докажем,}$$

что они равны 1:

- Пусть  $x \in (0; \pi/2)$ . Отложим этот угол на единичной окружности ( $R=1$ ).
- Точка  $K$  — точка пересечения луча с окружностью, а точка  $L$  — с касательной к единичной окружности в точке  $(1; 0)$ . Точка  $H$  — проекция точки  $K$  на ось  $Ox$ .



- Очевидно, что:

$$S_{\triangle OKA} < S_{\text{sect}KOA} < S_{\triangle OAL}$$

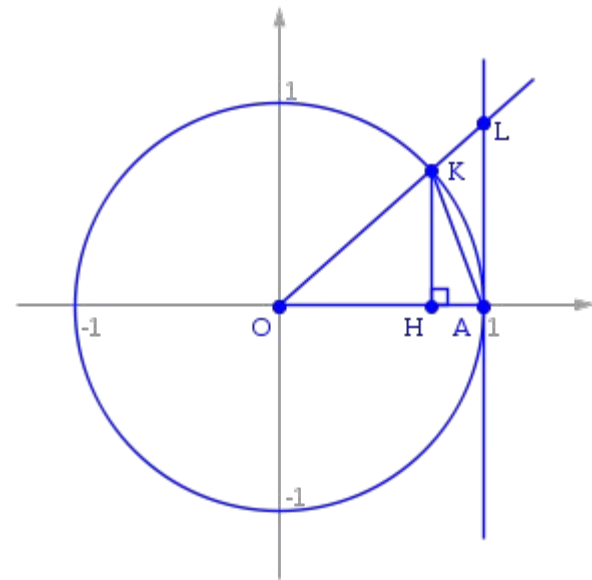
(где —  $S_{\text{sect}KOA}$  — площадь сектора KOA)

$$S_{\triangle KOA} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OK| \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{\text{sect}KOA} = \frac{1}{2} R^2 x = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAL} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |LA| = \frac{\text{tg } x}{2}$$

(из  $\triangle OAL: |LA| = \text{tg } x$ )



- Подставляя в (1), получим:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Так как при  $x \rightarrow 0^+$   $\sin x > 0$ ,  $x > 0$ ,  $\operatorname{tg} x > 0$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Умножаем на  $\sin x$ :

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

- Перейдём к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}$$

- Найдём левый односторонний предел (так как функция четна, в этом нет необходимости, достаточно доказать это для правого предела):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \left[ \begin{array}{l} u = -x \\ x = -u \\ u \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^- \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

- Правый и левый односторонний пределы существуют и равны 1, а значит и сам предел равен 1.



# Следствия

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

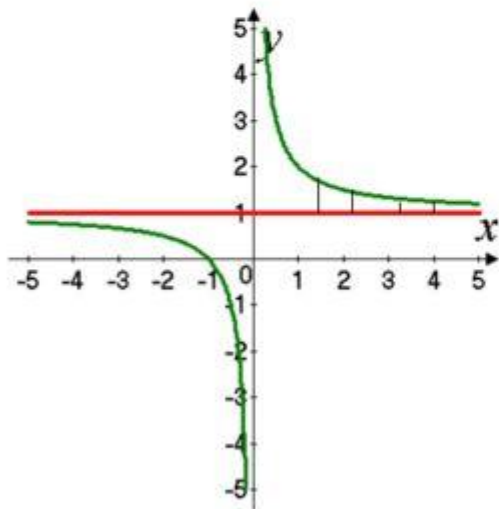
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[ \begin{array}{l} u = \arcsin x \\ x = \sin u \\ u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left[ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \\ x = \operatorname{tg} u \\ u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = 1$$

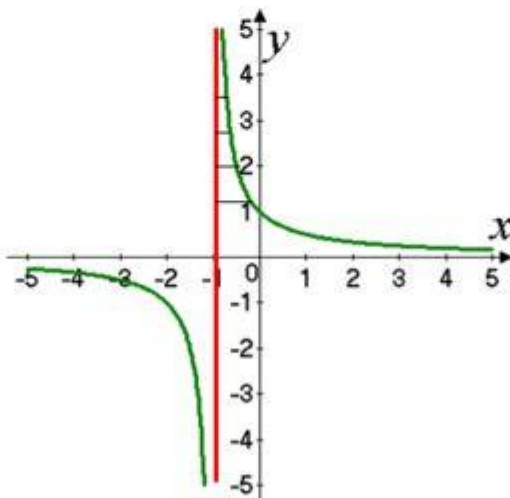
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 1^2 = 1$$

# Применение пределов на практике

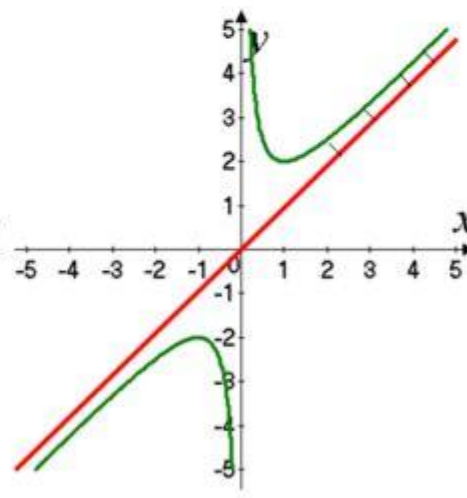
- Теория пределов очень активно применяется в экономических расчетах, например, в доказательствах и расчетах, которые связаны с непрерывными процессами; в финансовых рентах.
- Пределы функции применяются для нахождения асимптот графика функции при ее исследовании.



Горизонтальная асимптота



Вертикальная асимптота



Наклонная асимптота

# Список литературы

- Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. ( В 3-х томах ) - М.: Дрофа, 2004.
- Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа (в двух частях). — М.: Физматлит, 2005.
- Кричевец А.Н., Шикин Е.В., Дьячков А.Г. Математика для психологов. — М.: ФЛИНТА, 2013
- Светлаков А.Н. – видеолекции с сайта <http://mathdialogue.livejournal.com/>

# Спасибо за внимание!

