

Модуль 5

Алгебра высказываний.

Формальные теории.

Предикаты.

Силлогизмы Аристотеля

Типы категорических суждений:

- А – общеутвердительное суждение
«Всякое S суть P»
- Е – общеотрицательное суждение
«Никакое S не суть P»
- I – частноутвердительное суждение
«Некоторые S суть P»
- О – частноотрицательное суждение
«Некоторые S не суть P»



СИ
ЛЛ
ОГ
ИЗ
М

Пример парадокса:

“Сказанное Платоном – ложно, - говорит Сократ. –
Сказанное Сократом – истинно, - говорит Платон”

Алгебра высказываний

3

Примеры высказываний: «Москва – столица России» - истинное, «5 – четное число» – ложное, «студент 2 курса» – не высказывание, т.к. не является утверждением, « $x-1=4$ » – не высказывание, т.к. неизвестно, какое значение примет x

Логические операции - **отрицание** « \neg », **конъюнкция** – двухместная логическая операция \wedge («и») – по высказываниям A, B определяет высказывание $A \wedge B$ (« A и B »), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B истинны. **Дизъюнкция** – двухместная логическая операция \vee («или») – по высказываниям A, B определяет высказывание $A \vee B$ (« A или B »), которое истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A, B – истинно. **Импликация** – двухместная логическая операция \rightarrow («если..., то...») – по высказываниям A, B определяет высказывание $A \rightarrow B$ («если A , то B »), которое ложно тогда и только тогда, когда A - истинно, B – ложно. A называется посылкой, B – заключением. **Эквиваленция** – двухместная логическая операция \leftrightarrow («если и только если..., то...») определяет высказывание $A \leftrightarrow B$ («если и только если A , то B »), которое истинно тогда и только тогда, когда A, B оба истинны или оба ложны.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ – ПРИМЕРЫ

ТАВТОЛОГИЙ

1. Коммутативность: $A \vee B = B \vee A, A \wedge B = B \wedge A.$

2. Ассоциативность:

$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C), A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$

3. Дистрибутивность:

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$

4. Идемпотентность: $A \vee A = A, A \wedge A = A.$

5. Закон двойного отрицания: $\neg\neg A = A.$

6. Закон исключения третьего: $A \vee \neg A = 1.$

7. Закон противоречия: $A \wedge \neg A = 0.$

8. Законы де Моргана:

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B.$

9. Свойства операций с логическими константами:

$A \vee 1 = 1, A \vee 0 = A, A \wedge 1 = A, A \wedge 0 = 0.$

Здесь A, B и C – любые буквы

Формальные теории

Составляющие формальной теории:

1. Алфавит. 2. Формулы 3. Аксиомы 4. Правила вывода

Определение. *Выводом* формальной теории называется последовательность формул A_1, A_2, \dots, A_n , в которой все формулы – либо аксиомы, либо получаются из предыдущих по правилам вывода.

Определение. Говорят, что формула A *выводима* из множества формул Γ (обозначение: $\Gamma \vdash A$), если существует вывод A_1, A_2, \dots, A_n , где $A_n = A$, и есть три возможности:

- $A_i \in \Gamma$;
- A_i - аксиома;
- A_i получаются из предыдущих формул по правилам вывода.

1. Алфавит составляют:

- Пропозициональные буквы (от англ. proposition – высказывание) – заглавные буквы латинского алфавита (иногда с индексами – натуральными числами): $A, B, C, \dots, A_1, B_1, C_1, \dots$
- Логические связки: \neg, \rightarrow .
- Скобки: $(,)$.

Иногда в исчислении высказываний допускаются формулы с другими логическими связками, но при этом учитывается, как они выражаются через инверсию и импликацию. Так, $A \wedge B = \neg(A \rightarrow \neg B)$, $A \vee B = \neg A \rightarrow B$.

2. Формулы определяются следующим образом.

Определение. 1) Всякая пропозициональная буква есть формула. 2) Если A, B – формулы, то формулами являются также $\neg A, A \rightarrow B$. 3) Символ является формулой тогда и только тогда, когда это следует из 1) и 2).

3. Аксиомы задаются тремя схемами аксиом:

$$A1. A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

$$A2. (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

$$A3. (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B).$$

4. Правило вывода Modus ponens (сокращенно MP) – правило отделения

$$A, A \rightarrow B \vdash B.$$

Благодаря этому правилу от посылки «если A , то B », используя посылку « A », мы как бы отделяем заключение « B ».

Пример.

Если у человека грипп, он болен.

У человека грипп.

Человек болен.

Теорема о дедукции

Теорема дедукции. Пусть Γ – множество формул, A, B – формулы. Тогда $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$. Т.е. если формула B выводима из списка гипотез Γ , дополненного формулой A , то формула $A \rightarrow B$ выводима из списка гипотез Γ .

Справедлива и обратная теорема.

Теорема. $\Gamma \vdash A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, A \vdash B$.

Построение вывода в логике

высказываний

Докажем, что выводима формула $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Сокращенно это записывается так: $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

По теореме, обратной теореме дедукции, посылку можно перенести в левую часть:

$\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B$. Прделаем эту операцию еще раз: $\neg B \rightarrow \neg A, A \vdash B$.

Таким образом, нам нужно доказать, что из формул $\neg B \rightarrow \neg A$ и A выводима формула B . Сначала мы запишем гипотезы.

1. $\neg B \rightarrow \neg A$ – гипотеза.

2. A – гипотеза.

Формулу B удобно получить из аксиомы А3. Поэтому запишем эту аксиому:

3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$ А3.

К формулам 1 и 3 можно применить правило вывода Modus ponens

4. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$. MP 1, 3.

Посылку в формуле 4 можно получить из аксиомы А1, если заменить B на $\neg B$:

5. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$. А1 с подстановкой вместо B – $\neg B$.

Далее дважды применяем правило Modus ponens:

6. $\neg B \rightarrow A$. MP 2, 5.

7. B . MP 6, 4.

А1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

А2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

А3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$.

Правила преобразования в предложение:

1. Замена импликации по формуле: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$. В результате в формуле остаются связки: \neg , \vee , \wedge .

2. Преобразование выражений с инверсиями по закону двойного отрицания:

$\neg\neg A = A$, законам де Моргана: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$.

В результате инверсии остаются только перед буквами.

3. Приведение формулы к конъюнктивной нормальной форме с помощью дистрибутивных законов:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

4. Преобразование конъюнктивной нормальной формы во множество предложений $AB \Rightarrow A, B$.

Правило резолюций. Даны предложения: $C_1 = P \vee C_1'$, $C_2 = \neg P \vee C_2'$, где P - пропозициональная буква, C_1' и C_2' – предложения (в частности, пустые или содержащие только одну букву или ее отрицание). Правило резолюций формулируется так: $C_1, C_2 \vdash C_1' \vee C_2'$. C_1, C_2 называются *резольвируемыми предложениями*, а $C_1' \vee C_2'$ – *резольвентой*.

Примеры применения метода резолюций

Пример 1. Методом резолюций доказать теорему $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Доказательство. Запишем инверсию исходной формулы:
 $\neg(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$.

Заменяем все импликации по соответствующей формуле:
 $\neg(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) = \neg(\neg\neg A \vee (\neg A \vee B))$.

Применим закон двойного отрицания и закон де Моргана:
 $\neg(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) = \neg(A \vee (\neg A \vee B)) = \neg A \wedge \neg(\neg A \vee B) =$
 $= \neg A \wedge \neg\neg A \wedge \neg B = \neg A \wedge A \wedge \neg B$.

Получаем предложения: $\neg A$, A , $\neg B$. Резольвируем их:

1. $\neg A$ – предложение.
2. A – предложение.
3. $\neg B$ – предложение.
4. \square . R 1, 2.

Примеры применения метода резолюций 1

Пример 2. Методом резолюций доказать теорему

$$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B).$$

Доказательство. Запишем инверсию исходной формулы:

$$\neg(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)).$$

Заменяем все импликации по соответствующей формуле:

$$\neg(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)) = \neg(\neg A \vee (\neg B \vee A \wedge B)).$$

Применим закон двойного отрицания и закон де Моргана:

$$\begin{aligned} \neg(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)) &= \neg\neg A \wedge \neg(\neg B \vee (A \wedge B)) = \\ &= A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B) = A \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg B). \end{aligned}$$

Получаем предложения: A , B , $\neg A \vee \neg B$.

1. A – предложение.
2. B – предложение.
3. $\neg A \vee \neg B$ – предложение.
4. $\neg B$. R 1, 3.
5. \square . R 2, 4.

Определение. n -местным предикатом на множестве X называется n -местная функция, каждый аргумент которой принадлежит множеству X , а значениями которой являются 0 или 1.

Примеры. 1. Предикат $A(x) = "x \leq 2"$ на множестве $X = R$ – одноместный.
2. Предикат $B(x, y) = "xy > 0"$ на множестве $X = R^2$ – двуместный.

Пусть дан n -местный предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множестве X , означающий, что для набора (x_1, x_2, \dots, x_n) выполнено свойство A , и пусть x_i – одна из переменных. Тогда запись $\forall x_i A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ означает, что для всех значений переменной x_i свойство A выполнено. Символ \forall называется *квантором всеобщности (общности)*. Предикат $\forall x_i A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является $(n - 1)$ -местным. Он зависит от переменных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Если дан одноместный предикат $P(x)$, то утверждение $\forall x P(x)$ представляет собой нульместный предикат, то есть истинное или ложное высказывание.

Пример. На множестве $X = R$ дан предикат $A(x) = "x \leq 2"$. Высказывание $\forall x(x \leq 2)$ ложно.

Предикаты. Квантор существования 12

Пусть дан n -местный предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множестве X , означающий, что для набора (x_1, x_2, \dots, x_n) выполнено свойство A , и пусть x_i – одна из переменных. Тогда запись $\exists x_i A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ означает, что существует значение переменной x_i , такое, что выполняется свойство A . Символ \exists называется *квантором существования*. Предикат $\exists x_i A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является $(n - 1)$ -местным. Если дан одноместный предикат $P(x)$, то утверждение $\exists x P(x)$ представляет собой нульместный предикат, то есть истинное или ложное высказывание.

Примеры.

1. На множестве $X = R$ дан предикат $A(x) = "x \leq 2"$. Высказывание $\exists x(x \leq 2)$ истинно.

2. $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество натуральных чисел;

а) $P(x) :=$ « x делится на 2». $P(2) =$ «истина», $P(3) =$ «ложь»;

б) $P(x_1, x_2) :=$ « $x_1 \geq x_2$ ». $P(1, 2) =$ «ложь», $P(3, 2) =$ «истина».

Эквивалентности для кванторов

Имеют место эквивалентности:

$$\exists x \neg A = \neg \forall x A, \quad \forall x \neg A = \neg \exists x A.$$

$$\neg \exists x A = \forall x \neg A, \quad \neg \forall x A = \exists x \neg A.$$

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y), \quad \exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y).$$

Разноименные кванторы можно переставлять только следующим образом:

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y), \quad \exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y).$$

Обратные формулы неверны.

Пример. Очевидно, что высказывание $\forall x \exists y (x + y = 0)$ ($X = R$) истинно. Поменяем кванторы местами. Получим высказывание $\exists y \forall x (x + y = 0)$, которое является ложным.

Выражения с кванторами можно преобразовывать следующим образом:

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x), \quad \exists x (P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

Исчисление предикатов – теория 1

порядка

1. Алфавит составляют:

- Предметные константы – это имена (обозначения) предметов.
- Предметные переменные – буквы конца латинского алфавита с натуральными индексами: $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$
- Предикатные буквы – заглавные буквы латинского алфавита с натуральными индексами, означающие операции над переменными и константами.
- Логические связи: \neg, \rightarrow .
- Квантор всеобщности \forall .
- Синтаксические символы – скобки $(,)$ и запятая.

2. Формула определяется несколькими этапами. Вначале вводится понятие термина.

Определение. 1) Предметные константы и предметные переменные есть *термы*. 2) Если t_1, t_2, \dots, t_n , – термы, то в результате применения к ней функции получится терм. 3) Символ является термом тогда и только тогда, когда это следует из 1) и 2).

Определение. элементарная формула образуется при применении предикатной буквы к термам.

Пример. если " \leq " - предикатная буква, то $\sin x \leq \cos x$ – элементарная формула.

Определение. 1) Всякая элементарная формула есть формула. 2) Если A, B – формулы, то формулами являются также символы $\neg A, A \rightarrow B, \forall y A$. 3) Символ является формулой тогда и только тогда, когда это следует из 1) и 2).

порядка

3. Аксиомы теории первого порядка делятся на два класса:

• Логические аксиомы:

1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$.

4) $\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(t)$, где терм t свободен для переменной x_i в формуле $A(x_i)$.

5) $\forall x_i (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x_i B)$, где x_i – несвободная переменная в формуле A .

Отметим, что аксиомы 1) – 3) – тавтологии, 4) и 5) – общезначимые формулы.

• Собственные аксиомы.

У каждой теории первого порядка свои собственные аксиомы.

4. Правила вывода.

1) Modus ponens (MP).

$$A, A \rightarrow B \vdash B.$$

2) Правило обобщения Gen.

$$A \vdash \forall x A.$$

Законы логики предикатов

Имеет место следующие равносильности:

$$1) \neg \forall x F(x) = \exists x \neg F(x), \neg \forall x F(x) = \forall x \neg F(x);$$

$$2) \forall x(F(x) \wedge G(x)) = \forall x F(x) \wedge \forall x G(x), \exists x(F(x) \vee G(x)) = \exists F(x) \vee \exists x G(x);$$

$$3) \forall x \forall y F(x, y) = \forall y \forall x F(x, y), \exists x \exists y F(x, y) = \exists y \exists x F(x, y);$$

$$4) \forall x (F(x) \wedge C) = \forall x F(x) \wedge C, \forall x (F(x) \vee C) = \forall x F(x) \vee C;$$

$$5) \exists x (F(x) \wedge C) = \exists x F(x) \wedge C, \exists x (F(x) \vee C) = \exists x F(x) \vee C;$$

$$6) C \rightarrow \forall x F(x) = \forall x (C \rightarrow F(x)), C \rightarrow \exists x F(x) = \exists x (C \rightarrow F(x)).$$

Эти равносильности называются также законами логики предикатов.

Формула C не содержит вхождений переменной x .

Применяются также законы:

$$F \leftrightarrow G := (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F), \quad F \rightarrow G := \neg F \vee G.$$

$$\neg \neg F = F, \neg (F \vee G) = \neg F \wedge \neg G, \neg (F \wedge G) = \neg F \vee \neg G$$

С помощью равносильностей можно преобразовывать формулы.

Формула ЛП G называется логическим следствием формулы F , если G истинна во всех интерпретациях, в которых F истинна. Запись: $F \rightarrow G$.

Имеют место логические следования:

$$7) \exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x G(x), \forall x F(x) \vee \forall x G(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x));$$

$$8) \forall x F(x) \rightarrow H \Rightarrow \exists x(F(x) \rightarrow H), \exists x F(x) \rightarrow H \Rightarrow \forall x(F(x) \rightarrow H),$$

где формула H не содержит вхождений переменной x

Предваренная нормальная форма.

Пусть $F(x)$ – формула, t – терм. Тогда имеют место следующие **теоремы**.

Формула $\forall x F(x) \rightarrow F(t)$, где t – терм, свободный для переменной x в формуле F , есть тавтология.

Формула $F(t) \rightarrow \exists x F(x)$, где t – терм, свободный для переменной x в формуле F , есть тавтология.

Формула ЛП F называется находящейся в **ПНФ**, если она имеет вид:
 $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n F_0$, где $Q_i, i = 1..n$ – один из кванторов (\forall, \exists), $x_i \neq x_j$, если $i \neq j$,
 F_0 – формула, не имеющая кванторов.

Пример - Формула $\forall x \forall y \exists z (Q(x,y) \rightarrow R(z))$ находится в ПНФ.

Для любой формулы ЛП существует логически эквивалентная ей формула, находящаяся в ПНФ. Приведение данной формулы ЛП к ПНФ можно произвести с помощью равносильностей (1-6) и следований (7-8).

Пусть формула F находится в предваренной нормальной форме $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n F_0$, где F_0 есть конъюнктивная нормальная форма. Если Q_r , $1 \leq r \leq n$, есть квантор существования в префиксе $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$, рассмотрим случаи:

1) никакой квантор общности не стоит в префиксе левее Q_r . Тогда выбираем новую (не встречающуюся в формуле) константу c и заменяем все x_r в F_0

на c ; вычеркиваем $Q_r x_r$ из префикса;

2) имеется непустой список Q_{r_1}, \dots, Q_{r_m} , $1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_m < r$, всех кванторов общности, встречающихся в префиксе левее Q_r . Тогда выбираем новый (не встречавшийся в формуле функциональный символ f , заменяем все x_r в F_0 на $f(x_{r_1}, \dots, x_{r_m})$.

Выполняем эту процедуру для всех кванторов существования в префиксе.

Полученная в результате формула имеет, по определению, сколемовскую стандартную форму. Константы и функторы, используемые для замены переменных

кванторов существования, называются сколемовскими функциями.

Пример – Указать ССФ формулы $\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w P(x, y, z, u, v, w)$.