



ЛЕКЦИЯ № 5-6

***Задачи приводящие к понятию
дифференциальных уравнений.
Виды дифференциальных уравнений
первого порядка***

Основные понятия

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и её производные. Такие уравнения называются *дифференциальными*.

$$F(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0$$

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называют *обыкновенным*, в противном случае - дифференциальным уравнением в частных производных.

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

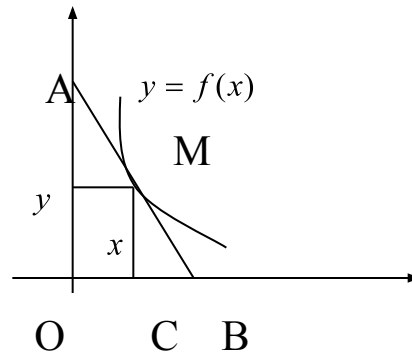
Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ - дифференциальное уравнение третьего порядка, а уравнение $x^2 y' + 5xy = y^2$ - дифференциальное уравнение первого порядка.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его интегрированием, а график решения - интегральной кривой.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задача. Найти кривую, проходящую через точку $A(4;1)$, зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

Решение. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка кривой, уравнение которой $y = f(x)$. Для определенности предположим, что кривая расположена в первой четверти.



Для составления уравнения воспользуемся геометрическим смыслом производной:
 $y' = \operatorname{tg} \alpha$. Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}(\angle MBC) = \frac{MC}{BC}$. Но
 $\operatorname{tg}(\angle MBC) = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $MC = y$

По условию задачи $AM = MB$, следовательно, $OC = CB = x$.

Таким образом. Получаем $-\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ или $y' = -\frac{y}{x}$. Решением полученного уравнения является функция $y = \frac{4}{x}$

Другие задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

- Закон измерения массы радия описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

где $k > 0$ - коэффициент пропорциональности, $m(t)$ - масса радия в момент t .

- Закон изменения температуры тела в зависимости от времени,

описывается уравнением $\frac{dT}{dt} = k(T - t_0)$

где $T(t)$ - температура тела в момент времени t , k - коэффициент пропорциональности, t_0 - температура воздуха.

- «Закон размножения бактерий» описывается уравнением $\frac{dm}{dt} = km$, где $k > 0$.

- Закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем

моря описывается уравнением $\frac{dp}{dh} = -kp$

где $p(h)$ - атмосферное давление воздуха на высоте h , $k > 0$

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого называется уравнение , связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и ее производную первого порядка.

Обозначение:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = f(x, y)$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, $C = const$, удовлетворяющая исходному уравнению при любых значениях постоянной C .

Геометрически общее решение представляет собой множество интегральных кривых на плоскости, зависящих от одного параметра C .

Частным решением дифференциального уравнения называется решение , полученное из общего решения при фиксированном значении постоянной C .

Для того чтобы из общего решения выделить одно частное решение задают так называемые начальные условия $y = y_0$ при $x = x_0$.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям называется *задачей Коши*

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка может быть сформулирована следующим образом:

Найти решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

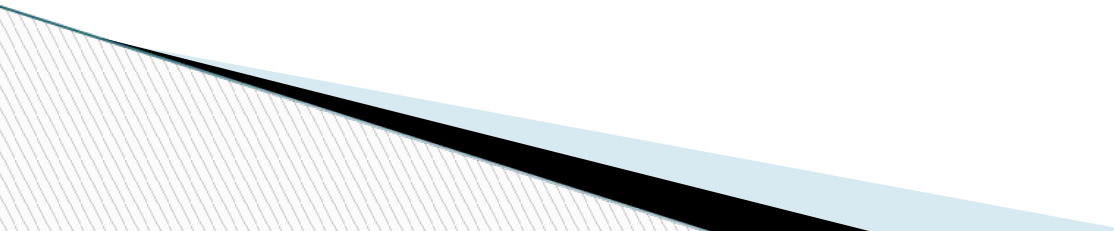
Другими словами: найти интегральную кривую этого уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши:

Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D , содержащей точку

- $M_0(x_0; y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x, C)$ этого уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

Виды дифференциальных уравнений первого порядка

- Дифференциальные уравнения с разделенными переменными
 - Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными
 - Однородные дифференциальные уравнения
 - Линейные дифференциальные уравнения
 - Уравнения Бернулли
 - Уравнения в полных дифференциалах
 - Уравнения Лагранжа и Клеро
- 

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Дифференциальное уравнение вида $M(x)dx + N(y)dy = 0$ называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*.

Его общим интегралом является

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \text{ где } C - \text{ произвольная постоянная}$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$(x - 2)dx + (y + 1)dy = 0$$

Решение. Проинтегрируем обе части этого уравнения:

$$\int (x - 2)dx + \int (y + 1)dy = C$$

вычислив интегралы, получим:

$$\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{y^2}{2} + y = C$$

Получили общее решение или общий интеграл исходного уравнения.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot \varphi(y) \quad \text{или} \quad M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Алгоритм решения:

По определению производной $y' = \frac{dy}{dx}$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(y)$$

Умножим обе части уравнения на dx , получим:

$$dy = f(x) \cdot \varphi(y) dx$$

Разделяем переменные: $\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x) dx$

Проинтегрируем обе части уравнения: $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x) dx$

Окончательно будем иметь: $\hat{O}(y) = F(x) + C$ - общее решение или общий интеграл.

Пример. Решить дифференциальное уравнение:

$$2y'\sqrt{x} = y,$$

Решение.

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad 2\frac{dy}{dx}\sqrt{x} = y$$

Умножаем на dx :

$$2\sqrt{x}dy = ydx$$

Разделяем переменные: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Общее решение:

$$\ln y = \sqrt{x} + C$$

Алгоритм решения уравнения

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Переносим одно слагаемое в правую часть

$$M_1(x)N_1(y)dx = -M_2(x)N_2(y)dy$$

Разделяем переменные:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy$$

Вычисляя интегралы, получим общее решение:

$$M(x) = N(y) + C$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$$

Решение: Данное уравнение приводится к виду:

$$y(x + 1)dx + x(y + 1)dy = 0$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{(x + 1)}{x} dx = -\frac{y + 1}{y} dy$$

Интегрируем:

$$\int \frac{(x + 1)}{x} dx = -\int \frac{y + 1}{y} dy$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = -\int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy$$

Общее решение:

$$x + \ln|x| = -y - \ln|y| + C$$

Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n -го измерения, если при любом t выполняется условие

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Пример 1. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ — однородная функция первого измерения, т.к.

$$f(tx, ty) = t^3 \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Пример 2. Функция $f(x, y) = xy - y^2$ — есть однородная функция второго измерения, т.к.

$$f(tx, ty) = (tx)(ty) - (ty)^2 = t^2(xy - y^2)$$

Пример 3. Функция $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ — есть однородная функция нулевого измерения, т.к.

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx) \cdot (ty)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется *однородным относительно переменных x, y* , если функция $f(x, y)$ есть однородная функции нулевого измерения относительно переменных x, y .

Однородное уравнение может быть представлено в виде $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

С помощью новой переменной u вводимой по формуле

$$y = ux$$

уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Действительно, так как $y = ux$, , то $y' = u'x + u$. Получим:

$$u'x + u = \varphi(u)$$

Откуда $x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$ или $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$

Интегрируя последнее уравнение, получим $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$

Общее решение: $\Phi(u) = \ln|x| + C, \quad \Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(x) + C$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{x + y}{y - x}$$

Решение. Сделаем подстановку $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$ и получим

$$u'x + u = \frac{1 + u}{u - 1} \quad \text{или} \quad \frac{(u - 1)du}{1 + 2u - u^2} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|1 + 2u - u^2| = \ln|C|$$

Откуда

$$x\sqrt{1 + 2u - u^2} = C$$

Подставив в это выражение значение $u = \frac{y}{x}$ получим общий интеграл
данные уравнения

$$x^2 + 2xy - y^2 = C^2$$

Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение вида $y' + p(x)y = g(x)$ называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*, где $p(x)$ и $g(x)$ заданные непрерывные функции.

Решение уравнения следует искать в виде произведения двух функции

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad , \text{ тогда} \quad y' = u'v + uv'$$

Подставляя в уравнение, получим

$$u'v + uv' + p(x)uv = g(x) \quad \text{или} \quad u'v + u(v' + p(x)v) = g(x)$$

Выберем функцию v так, чтобы $\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0$. Интегрируя это уравнение получим

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

Подставляя найденную функцию v в исходное уравнение, получим

$$v(x) \frac{du}{dx} = g(x) \quad \text{отсюда найдём} \quad u = \int \frac{g(x)}{v(x)} dx + C$$

Тогда общее решение уравнения с учетом найденных функций u и v примет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int g(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$$

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

Решение. Полагая $y = u \cdot v$, тогда $\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим

$$v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} u \cdot v = (x+1)^3 \quad \text{или} \quad v \frac{du}{dx} + u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v \right) = (x+1)^3$$

Для определения v будем полагать $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0$.

Откуда $v = e^{2 \int \frac{dx}{x+1}} = (x+1)^2$

Тогда $(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$

Откуда получим

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \frac{(x+1)^2}{2} + C(x+1)^2$$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x)y^n$$

где $p(x)$ и $g(x)$ заданные непрерывные функции, $n \neq 0$, $n \neq 1$, (в частном случае $p(x)$ и $g(x)$ могут быть постоянными) называется *уравнением Бернулли*.

С помощью подстановки $z = y^{1-n}$ уравнение Бернулли можно свести к линейному уравнению.

Разделим уравнение Бернулли на y^n , тогда это уравнение примет вид

$$y^{-n} y' + p(x) y^{1-n} = g(x)$$

Учитывая, что
найдем

$$z' = (1-n) y^{-n} y'$$

$$z' + (1-n) p(x) z = (1-n) g(x)$$

Пример 2. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли, для которого $n = 2$. Разделим обе части данного уравнения на y^2 , получим

$$y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = x^2$$

Сделаем подстановку $z = y^{-1}$, тогда $z' = -y^{-2} y'$

Подставим эти выражения в данное уравнение

$$-z' + \frac{z}{x} = x^2 \quad \text{или} \quad z' - \frac{z}{x} = -x^2$$

Это уравнение является линейным уравнением.

Здесь $p(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = -x^2$, тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[\int e^{-\int \frac{dx}{x}} (-x^2) dx + C \right] \quad \text{или} \quad z = x \left[\int (-x) dx + C \right] = -\frac{x^3}{2} + Cx$$

Возвращаясь к переменной y получим общее решение исходного уравнения

$$\frac{1}{y} = Cx - \frac{x^3}{2} \quad \text{или} \quad y = \frac{2}{2Cx - x^3}$$