



Лекция 12
Числовые ряды. Признаки
сходимости числовых рядов.

Основные понятия

Пусть задана бесконечная последовательность чисел:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

Выражение вида $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) называется *числовым рядом*.

Числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называются членами ряда, а u_n - общим членом ряда.

Зная общий член ряда можно найти все его члены.

Пример. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2^n}$. Найти его первые три члена.

Решение.

$$u_1 = \frac{5 \cdot 1 + 1}{2^1} = \frac{6}{2} = 3, \quad u_2 = \frac{5 \cdot 2 + 1}{2^2} = \frac{11}{4}, \quad u_3 = \frac{5 \cdot 3 + 1}{2^3} = \frac{16}{8} = 2$$

Т.е. ряд можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2^n} = 3 + \frac{11}{4} + 2 + \dots$$

Также можно решить обратную задачу: зная несколько первых членов ряда можно составить формулу для его общего члена.

Пример 1. Составить формулу общего члена ряда

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots +$$

Решение: Знаменатели членов данного ряда являются квадратами натуральных чисел, поэтому общий член данного ряда будет иметь вид:

$$u_n = \frac{1}{n^2}$$

Пример 2. Составить формулу общего члена ряда

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots +$$

Решение. Числители членов этого ряда – это четные числа вида $2n$, а знаменатели – числа, которые можно получить по формуле $3n + 2$, (из формулы общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$ первый член которой $a_1 = 5$, а разность $d = 3$).

Т.е. общий член ряда имеет вид: $u_n = \frac{2n}{3n + 2}$

Сумма первых n членов ряда (1) называется n -й *частичной суммой* ряда и обозначается: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots$$

Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (1), то ряд называется *сходящимся*, а этот предел называется *суммой ряда*.

Если предел частичных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или равен бесконечности $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то числовой ряд называется *расходящимся*.

Пример. Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots +$.

Решение. Составляем общий член ряда: $u_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Находим n -ю частичную сумму ряда:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Вычисляем предел n -ой частичной суммы $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Таким образом, ряд сходится и его сумма равна $S = 1$.

Свойства рядов

Пусть дан числовой ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1)

Свойство 1. Если ряд (1) сходится и его сумма равна S , то ряд

$$cu_1 + cu_2 + cu_3 + \dots + cu_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} cu_n$$

где c – произвольное число, также сходится и его сумма равна cS .

Свойство 2. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, и их суммы

соответственно равны S_1 и S_2 , сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ и их суммы равны $S_1 \pm S_2$.

Свойство 3. Если у ряда (1) отбросить конечное число членов, то полученный ряд и ряд (1) сходятся или расходятся одновременно.

Ряд вида

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

называется *остатком ряда* (1).

Ряд геометрической прогрессии

Ряд вида

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0) \quad (2)$$

называется *рядом геометрической прогрессии*.

Данный ряд часто используется при исследовании сходимости рядов.

Сумма первых n членов прогрессии равна: $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$

Находим предел этой суммы: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1-q}$

В зависимости от величины q возможны следующие случаи:

1. Если $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, ряд (2) сходится и его сумма равна: $S = \frac{a}{1-q}$

2. Если $|q| > 1$, $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ и ряд (2) расходится.

3. Если $|q| = 1$, то ряд (2) принимает вид $a + a + a + \dots + a + \dots$ ($q = 1$) (для него $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = n \cdot a = \infty$, т.е. ряд расходится) или $a - a + a - a + \dots$ ($q = -1$) (в этом случае $S_n = 0$ при n четном и $S_n = a$ при n нечетном, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует и ряд (2) расходится)

Признаки сходимости числовых рядов

Необходимый признак. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточное условие расходимости). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{3n+4}$.

Решение. Находим предел общего члена ряда: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-2}{3n+4} = \frac{5}{3} \neq 0$.
Следовательно, ряд расходится.

Необходимое условие сходимости не гарантирует сходимость ряда. Выполнение необходимого признака означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Примером такого ряда является ряд вида $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ (3)
Этот ряд называется *гармоническим*.

Достаточные признаки сходимости рядов

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (4)$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (5)$$

Признак сравнения 1. Если для числовых рядов (4) и (5) выполняется неравенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (4), а из расходимости ряда (4) следует расходимость ряда (5).

Данный признак справедлив также и в тех случаях, когда неравенство выполняется не для всех членов ряда, а начиная с некоторого номера N .

Признак сравнения 2. Если для рядов (4) и (5) существует конечный, отличный от нуля предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 < A < \infty)$

то ряды (4) и (5) сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Если для числового ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Если $l = 1$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Признак Даламбера применяют когда общий член ряда содержит выражение $n!$ или a^n .

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+2}$.

Решение.

Общий член ряда $u_n = \frac{4^n}{n+2}$, тогда $u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)+2} = \frac{4^{n+1}}{n+3}$.

Находим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{n+3} \div \frac{4^n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} \cdot (n+2)}{(n+3) \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot (n+2)}{n+3} = 4 > 1$$

Следовательно, ряд расходится.

Интегральный признак сходимости Коши.

Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; \infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), u_3 = f(3), \dots, u_n = f(n), \dots$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ будет сходиться или расходиться в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Пример. Исследовать на сходимость гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Решение.

Общий член ряда $u_n = \frac{1}{n}$, тогда функция $f(x) = \frac{1}{x}$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1; \infty)$.

Тогда

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln x) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$$

Т.е. несобственный интеграл расходится, значит исследуемый гармонический ряд тоже расходится

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Если среди членов ряда есть как положительные, так и отрицательные члены, то ряд называется *знакопеременным*.

Если два соседних члена знакопеременного ряда имеют противоположные знаки, то ряд называется *знакочередующимся*:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

или

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots + (-1)^n u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$$

Признак Лейбница. Если для знакочередующегося ряда выполняются условия:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине, т.е.

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$$

2) общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

то знакочередующийся ряд сходится.

Если хотя бы одно из условий признака Лейбница не выполняется, то знакочередующийся ряд расходится.

Пример 1. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$.

Решение. Находим несколько первых членов ряда и сравниваем их:

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \frac{1}{9} > \frac{1}{11} > \dots$$

Первое условие признака Лейбница выполняется.

Вычисляем предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = 0$$

Второе условие тоже выполнено, значит исходный знакочередующийся ряд сходится.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

Решение. Проверяем оба условия признака Лейбница:

1) Сравниваем члены ряда:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \dots$$

Первое условие признака Лейбница не выполняется, поэтому ряд является расходящимся.

Абсолютная и условная сходимость

Если знакочередующийся ряд сходится, т. е. для него выполнены условия признака Лейбница и ряд, составленный из абсолютных величин исходного знакочередующегося ряда тоже сходится, то знакочередующийся ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Если же знакочередующийся ряд сходится, т. е. для него выполнены условия признака Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин исходного знакочередующегося ряда расходится, то знакочередующийся ряд называется *условно сходящимся*.

Пример 1. Исследовать знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$ на

сходимость.

Решение. Запишем данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{81} + \frac{1}{324} - \dots$$

Члены этого ряда убывают по абсолютной величине:

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{18} > \frac{1}{81} > \frac{1}{324} \dots$$

Общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = 0.$$

Значит, знакочередующийся ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин членов этого ряда:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{81} + \frac{1}{324} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

Сходимость этого ряда исследуем по признаку Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3} < 1.$$

Значит, ряд сходится, поэтому знакочередующийся ряд абсолютно сходится.

Пример 2. Исследовать знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ на

сходимость.

Решение. Представляем ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

Так как

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \dots \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

то знакочередующийся ряд сходится.

Составляем ряд из абсолютных величин

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Сходимость этого ряда исследуем по интегральному признаку:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (2\sqrt{b} - 2) = \infty.$$

То есть ряд расходится, следовательно исходный знакочередующийся ряд является условно сходящимся.

Функциональные ряды

Если члены ряда являются функциями от аргумента x :

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x), \quad (10.6)$$

то такие ряды называются *функциональными*.

Совокупность всех значений x , при которых функциональный ряд сходится, называют *областью сходимости ряда*.

Функциональный ряд вида, членами которого являются степенные функции, называется *степенным рядом*.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (10.7)$$

Числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются *коэффициентами степенного ряда*.

Ряд (10.7) разложен по степеням x .

Рассматриваются также степенные ряды, разложенные по степеням $(x - x_0)$:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (10.8)$$

При $x = 0$ всякий степенной ряд вида (10.7) или (10.8) сходится. Поэтому область сходимости степенного ряда содержит по крайней мере одну точку ($x = 0$).

Об области сходимости степенного ряда можно судить из теоремы:

Теорема Абеля. Если степенной ряд (10.7) сходится в точке $x = x_0$, то он сходится при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд (10.7) расходится в точке $x = x_0$, то он расходится при всех x , для которых $|x| > |x_0|$.

Для всякого степенного ряда (10.7), который имеет ненулевые точки сходимости и точки расходимости, существует такое число $R > 0$, что ряд сходится во всех точках интервала $(-R; R)$ и расходится вне этого интервала.

Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а число R называется *радиусом сходимости*. Если $R = 0$, то степенной ряд (10.7) сходится только при $x = 0$., если $R = \infty$, то степенной ряд (10.7) сходится на всей числовой прямой.

Для ряда (10.8) интервал сходимости имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Для нахождения области сходимости степенного ряда необходимо сначала найти радиус сходимости, затем записать интервал сходимости и исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = \pm R$.

Для отыскания радиуса сходимости можно пользоваться следующими способами:

- 1) Если среди коэффициентов ряда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ нет равных нулю, т.е. ряд содержит все целые положительные степени x (или $x - x_0$), то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

- 2) Если степенной ряд содержит не все степени x , то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно по признаку Даламбера.

Пример 1. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$.

Решение. Радиус сходимости степенного ряда найдем по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

$$a_n = \frac{n!}{4^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{4^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{4^n} \div \frac{(n+1)!}{4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! 4^{n+1}}{4^n (n+1)!} = \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 4 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Т.е. степенной ряд сходится только при $x = 0$.

Пример 2. Найти интервал сходимости ряда $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$

Решение. Так как $a_n = a_{n+1} = 1$, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1.$$

Следовательно, интервал сходимости ряда является интервал $(-1; 1)$.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Решение. Находим сначала радиус сходимости:

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}. \quad \text{Тогда} \quad |R| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Интервал сходимости имеет вид $(-1; 1)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = \pm 1$.

При $x = -1$ получим знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \dots$$

Сходимость этого ряда исследуем по признаку Лейбница: так как члены ряда убывают по абсолютной величине

$$1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \frac{1}{25} > \dots \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

то знакочередующийся ряд сходится.

Поэтому точка $x = -1$ принадлежит области сходимости ряда.

При $x = 1$ получим знакочередующийся ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, сходимость которого исследуем по интегральному

признаку: $u_n = \frac{1}{n^2}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то ряд тоже сходится. Значит, точка $x = 1$ принадлежит области сходимости.

Следовательно, областью сходимости степенного ряда будет интервал $[-1; 1]$.

Пример 4 Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 3^n}$

и исследовать его сходимость на концах интервала сходимости.

Решение. Используем признак Даламбера

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(x-1)^{n+1}|}{|(n+1) \cdot 3^{n+1}|} \div \frac{|(x-1)^n|}{|n \cdot 3^n|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1| \cdot n}{3(n+1)} = \frac{|x-1|}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно, данный ряд сходится при

$$\frac{|x-1|}{3} < 1, \text{ т.е. при } |x-1| < 3$$

или

$$-3 < x-1 < 3, \quad -2 < x < 4.$$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -2$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно, а при $x = 4$

числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится как гармонический.

Значит область сходимости ряда $[-2; 4)$.

Пример 5. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{3} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{3^3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{3^n} + \dots$$

Решение. Данный ряд содержит не все степени x , поэтому для определения интервала сходимости применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{x^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{3} \right| = \frac{x^2}{3}.$$

Таким образом, ряд сходится при

$$\frac{x^2}{3} < 1, \quad x^2 < 3, \quad |x| < \sqrt{3}.$$

Итак, интервал сходимости ряда имеет вид $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

При $x = \pm\sqrt{3}$ получаем ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm\sqrt{3})^{2n-1}}{3^n} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \dots,$$

которые расходятся. Следовательно, точки $x = \pm\sqrt{3}$ не принадлежат области сходимости ряда.

Поэтому областью сходимости ряда будет интервал $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Ряды Фурье

Функциональный ряд вида

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{aligned} \quad (10.9)$$

называется *тригонометрическим рядом*.

Числа a_0, a_n, b_n ($n=1,2,\dots$) называются *коэффициентами тригонометрического ряда*.

Если ряд (10.9) сходится, то его сумма есть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π , т.е. $f(x) = f(x+2\pi)$.

Для представления $f(x)$ в виде ряда (10.7) определим коэффициенты тригонометрического ряда.

Пусть функция $f(x)$ периодическая и представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi, \pi)$, т.е. является суммой этого ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (10.10)$$

Проинтегрируем обе части равенства (10.10)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right),$$

тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} (\sin \pi n - \sin(-\pi n)) = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n} (\cos \pi n - \cos(-\pi n)) = -\frac{1}{n} (\cos \pi n - \cos \pi n) = 0.$$

Следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (10.11)$$

Для определения коэффициентов a_n умножим обе части (10.10) на $\cos kx$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right).$$

При $n \neq k$ имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+k)x + \cos(n-k)x) dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+k)x + \sin(n-k)x) dx = 0.$$

При $n = k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx = \pi$$

Следовательно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_n \pi$$

откуда при $k = n$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (10.12)$$

Умножая обе части (10.10) на $\sin kx$ и интегрируя, получим:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (10.13)$$

Коэффициенты, определяемые по формулам (10.11), (10.12), (10.13) называются *коэффициентами Фурье*, а тригонометрический ряд (10.9) с такими коэффициентами называется *рядом Фурье*.

Теорема Дирихле. Если 2π - периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет условиям:

- 1) $f(x)$ кусочно-непрерывная, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва;
- 2) $f(x)$ кусочно-монотонная, т.е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1) в точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2) в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т.е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3) на концах отрезка, т.е. в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2}.$$

Если функция $f(x)$ имеющая период 2π на отрезке $[0; 2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для неё имеет место разложение (10.10), где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (10.14)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.15)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.16)$$

Пример 1. Периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π определена следующим образом: $f(x) = x, -\pi \leq x \leq \pi$. Разложить эту функцию в ряд Фурье.

Решение. Эта функция кусочно монотонная и ограниченная. Следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье.

По формуле (10.11) найдем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Применяя формулу (10.12) найдем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos nx dx \\ du = dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right] = 0. \end{aligned}$$

На основании формулы (10.13) получим:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin nx dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right] = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Тогда получим ряд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$

Или $\left| f(x) = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right] \right|.$

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

Если разлагаемая в ряд Фурье функция является четной или нечетной, то вычисление коэффициентов ряда Фурье упрощается.

Известно, что

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) - \text{четная} \\ 0, & f(x) - \text{нечетная} \end{cases}$$

Тогда, если функция $f(x)$ - четная, то функция $f(x) \cos nx$ - четная, а $f(x) \sin nx$ - нечетная. Если же $f(x)$ - нечетная, то функция $f(x) \cos nx$ - нечетная, а $f(x) \sin nx$ - четная.

С учетом этого из формул (10.11) - (10.13) получаем формулы для определения коэффициентов ряда Фурье четной функции

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (10.17)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad b_n = 0 \quad (10.18)$$

Таким образом, ряд Фурье для четной функции будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (10.19)$$

Если функция нечетная, то

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad (10.20)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (10.21)$$

т.е. ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (10.22)$$

Пример. Разложить в ряд Фурье 2π - периодическую функцию $f(x) = x^2, x \in (-\pi, \pi)$.

Решение. Данная функция является четной, поэтому ряд Фурье будет иметь вид (10.19). Находим коэффициенты ряда по формулам (10.17) и (10.18):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin nx dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \frac{4}{\pi n^2} (\pi \cos \pi n) = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Значит, ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx.$$