Розділ 1. Основи теорії ймовірностей

Тема 8. Випадковий вектор. Граничні теореми теорії ймовірності.

1. Двовимірний випадковий вектор.
2. Дискретний випадковий вектор, закон розподілу, числові характеристики.
3. Кореляційний момент, коефіцієнт кореляції.

Системою *n* ВВ називається впорядкований набір *n* ВВ

$$(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$$

X_i – компоненти системи

Інші назви:

***n – вимірна* ВВ**

n – вимірний випадковий вектор

Можливі значення (реалізації) системи *n* ВВ позначаються так:

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n\right)$$

(X_1, X_2) - двовимірна ВВ

(усі її реалізації можна зобразити на площині X_1oX_2)

Системи *n* ВВ поділяються на

1. **Дискретні (якщо компоненти дискр.)**
2. **Неперервні (якщо компоненти неп.)**

Закон розподілу системи *n* ВВ

Законом розподілу (ЗР) системи *n* ВВ називається будь-яке співвідношення між реалізаціями системи та відповідними їм імовірностями

ЗР системи має різні форми

Найпростіша форма – для дискретних систем (таблиця)

ЗАКОН РОЗПОДІЛУ СИСТЕМИ ДВОХ ДВВ

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	$P(y_j)$
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…	p_{n1}	$P(y_1)$
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…	p_{n2}	$P(y_2)$
…	…	…	…	…	…	…	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	…	p_{nj}	$P(y_J)$
…	…	…	…	…	…	…	
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{im}	…	p_{nm}	$P(y_m)$
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	…	$P(x_i)$	…	$P(x_n)$	1

Універсальна форма ЗР системи-

функція розподілу

(як для дискретної так і для неперевної системи)

Щільність розподілу імовірностей

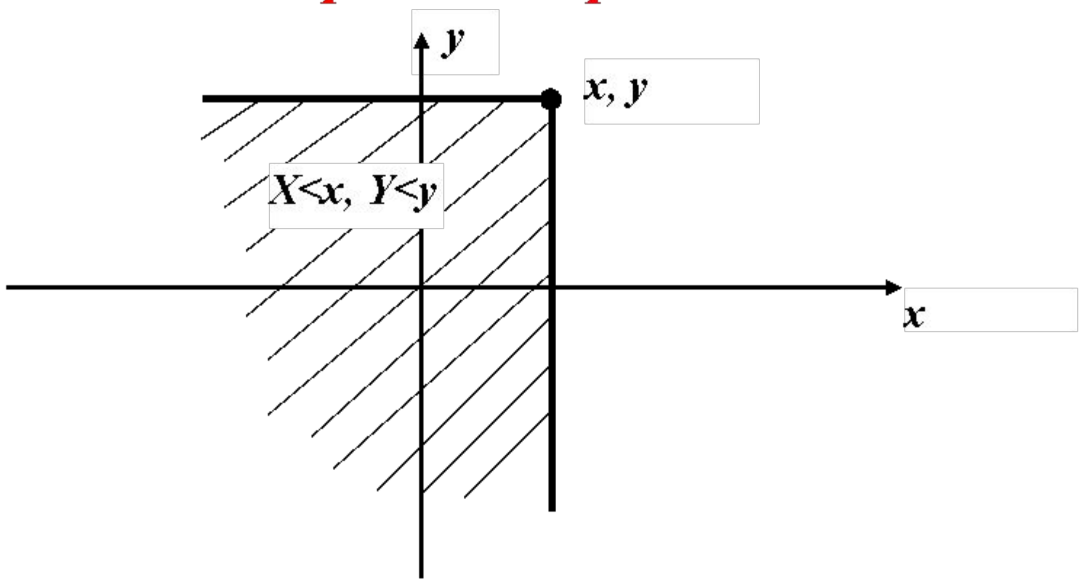
(тільки для неперевної системи)

Функція розподілу СВВ

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = P\left(\prod_{i=1}^{n}(X_i < x_i)\right)$$

$$F(x, y) = P((X < x)(Y < y))$$

Геометричне зображення



Властивості $F(x, y)$

1.

Щільність імовірностей системи *n* НВВ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_i \ldots \partial x_n}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \, \partial x_2}$$

Властивості *f*(*x*, *y*)

1. *f*(*x*, *y*) $\geq$ **0**

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$ **- умова норм.**

3. $$P(a < X < b,\ c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$

$$P((x,y) \in D) = \iint_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$$

4. $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

5. $$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\;dy$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\;dx$$

Умова незалежності ВВ

Дві ВВ наз незалежними, якщо ЗР кожної з них не залежить від того, яких значень набуде інша

Незалежність двох ДВВ *X* та *Y*, що входять до системи, рівносильна

$$P(x_{i,}\ y_j) = P(x_i)\ P(y_j)$$

Незалежність двох ДВВ та НВВ *X* та *Y*, що входять до системи, рівносильна

$$F(x_{,}\ y) = F_1(x)\ F_2(y)$$

Незалежність двох НВВ *X* та *Y*, що входять до системи, рівносильна

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

Якщо дві ВВ *X* та *Y*, що входять до системи, незалежні, то, знаючи ЗР окремих ВВ, можна знайти ЗР системи.

Якщо дві ВВ *X* та *Y*, що входять до системи, залежні, то попередні співвідношення не виконуються.

4. Умовні закони розподілу системи двох випадкових величин

НАГАДУЮ!!!

Дві ВВ наз залежними, якщо ЗР кожної з них залежить від того, яких значень набуде інша

Дискретний випадок

$P(x_i/y_j)$ – імовірність того, що ВВ X набуде значення x_i , за умови, що ВВ Y набуде значення y_j

(Умовна ймовірність ВВ X)

$P(y_j/x_i)$ – імовірність того, що ВВ Y набуде значення y_j , за умови, що ВВ X набуде значення x_i

(Умовна ймовірність ВВ Y)

Умовні ймовірності обчислюються за формулами

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$$

Умовним ЗР ДВВ *X* *за фіксованого значення* $Y = y_j$ *називають співвідношення між усіма можливими значеннями ДВВ X та відповідними їм умовними імовірностями* $P(x_i/y_j)$

$X=x_i$	x_1	x_2	…	x_n
$P(x_i/y_j)$	$P(x_1/y_j)$	$P(x_2/y_j)$	…	$P(x_n/y_j)$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i / y_j) = 1$$

Аналогічно визначається умовний ЗР ДВВ *Y* *за фіксованого значення* $X = x_i$

Таким чином, можна знайти ЗР системи двох залежних ДВВ, якщо знати умовні та безумовні розподіли компонент

$$P(x_i, y_j) = P(y_j)\,P(x_i / y_j)$$

$$P(x_i, y_j) = P(x_i)\,P(y_j / x_i)$$

Неперервний випадок

(X, Y) – система двох НВВ
f(x, y)-щільність імовірностей системи

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx$$

Умовною щільністю імовірностей НВВ, що входить до системи, за фіксованого значення іншої НВВ називають наступні співвідношення

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

З попередніх формул

$$f(x, y) = f_2(y) f(x / y)$$

$$f(x, y) = f_1(x) f(y / x)$$

5. Числові характеристики СВВ

Для (X, Y)   Дискретний випадок

1. $(m_x, m_y) - \textit{мат.сподівання системи}$

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \qquad m_y = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j)$$

2. $(D_x, D_y) - \textit{дисперсія системи}$

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) - m_x^2 \qquad D_y = \sum_{j=1}^{m} y^2{}_j p(y_j) - m_y^2$$

3. $(\sigma_x, \sigma_y) - \textit{с. к. в. системи}$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \qquad \sigma_y = \sqrt{D_y}$$

Для (X, Y)   Неперервний випадок

1. (m_x, m_y) *мат спод системи*

$$m_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx \qquad m_y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)dy$$

2. (D_x, D_y) – *дисп системи*

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx - m_x^2 \qquad D_y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)dy - m_y^2$$

3. (σ_x, σ_y) – *с. к. в. системи*

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \qquad \sigma_y = \sqrt{D_y}$$

Нова ЧХ, яка характеризує взаємозв’язок між ВВ в системі

Кореляційний момент (коваріація)

$$K_{xy} = M\left\lfloor (X - m_x)(Y - m_y) \right\rfloor = Cov(xy)$$

Має вимірність : вим X на вим У

Характеризує

а) ступінь залежності ВВ

б) розсіювання навколо точки $(m_x\, m_y)$

на площині

Дискретний випадок

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_j - m_y)\,p_{ij}$$

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij} - m_x m_y$$

Для (X, Y) Неперервний випадок
Кореляційний момент (коваріація)

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy - m_x m_y$$

Коефіцієнт кореляції (характеризує тільки ступінь тісноти лінійної залежності між ВВ)

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$-1 \le r_{xy} \le 1$$

(вставка 2)

$r_{xy} = 1$ - ***зв'язок між змінними лінійний***

$r_{xy} = -1$ ***- зв'язок між змінними лінійний***

$\mathbf{r_{xy} \to 0}$ ***-лінійного зв'язку між змінними***

x ***та*** *у* ***немає взагалі або він дуже слабкий***

Означення

Дві ВВ *Х та У* наз корельованими, якщо кореляційний момент $K_{xy} \neq 0$ $(r_{xy} \neq 0)$

Дві ВВ *Х та У* наз некорельованими, якщо кореляційний момент $K_{xy} = 0$ $(r_{xy} = 0)$

Дві корельовані ВВ є також залежними.

Обернене твердження правильне не завжди:

якщо дві ВВ залежні, то вони можуть бути як корельованими так і некорельованими