# Тема урока

**Элементы комбинаторики. Перестановки.**

**Комбинаторные задачи делятся на несколько групп:**

Задачи на перестановки

Задачи на размещение

Задачи на сочетание

# Открываем новое
# Факториал

Определение.

**Факториалом** натурального числа *n* называется произведение всех натуральных чисел от 1 до *n*.

Обозначение *n!*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

*Пример:*

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

**Запомни:** $0! = 1 \quad 1! = 1$

## Таблица факториалов:

| ***n*** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***n!*** | 1 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5 040 | 40 320 | 362 880 | 3 628 800 |

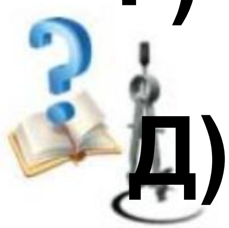
# Установите соответствие

А) $2! =$

Б) $3! =$

В) $4! =$

Г) $5! =$



Д) $6! =$

1) $6$

2) $24$

3) $2$

4) $720$

5) $120$

# Проверка !

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 5 | 4 |

# Вычислите

а)

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 56 \cdot 6 = 336$$

# Вычислите

б) $$\frac{5!-3!}{4!}=\frac{5\cdot4\cdot3!-3!}{4\cdot3!}=\frac{3!\,(20-1)}{4\cdot3!}=$$

$$=\frac{19}{4}=4{,}75$$

# Вычислите

в) $$\frac{7!\cdot 8}{7\cdot 8!}=\frac{7!\cdot 8}{7\cdot 7!\cdot 8}=\frac{1}{7}$$

г) $$\frac{7!\cdot 4!}{6!\cdot 5!}=\frac{6!\cdot 7\cdot 4!}{6!\cdot 4!\cdot 5}=\frac{7}{5}=1{,}4$$

# Запомните

$$\boxed{n! = (n-1)! \cdot n}$$

$$\frac{(n-1)! \cdot n}{2n!} = \frac{1}{2}$$

# Вычислите :

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!} \qquad \frac{7!+8!-6!}{31\cdot 6!}$$

**10** **2**

## Вычислите :

$$\frac{P_8}{P_6}$$

$$\frac{P_5 + P_4}{P_3}$$

**56**

**24**

# Вычислите :

$$\frac{P_6 - P_4}{P_3}$$

$$\frac{P_8 - P_7}{7 \cdot P_7}$$

**116**

**1**

# На примерах учимся

Найдите значение выражения

$$а)\ \frac{15!}{14!} =$$

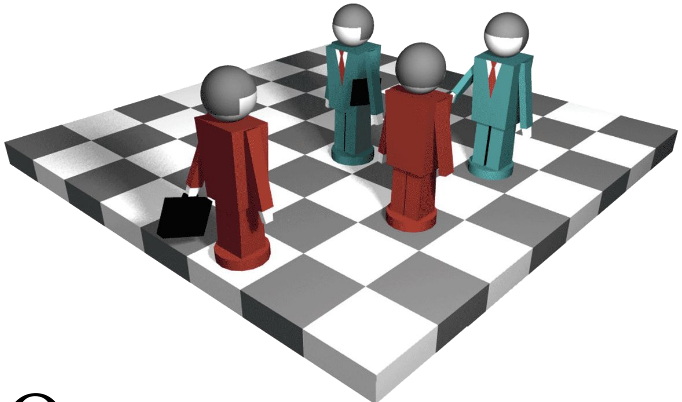
$$б)\ \frac{8!}{10!} =$$

$$в)\ \frac{42!}{40!} =$$

$$г)\ \frac{16!}{14! \cdot 3!} =$$

$$д)\ \frac{28!}{4! \cdot 26!} =$$

$$е)\ \frac{45!}{43! \cdot 3!} =$$



# Открываем новое

# Перестановки

Определение.

**Перестановкой** *из n элементов называется каждое расположение (без повторений) этих элементов в определенном порядке.*

*Число перестановок из n элементов* ***обозначают*** $P_n$

***Читают*** *«P из n».*

*Число всевозможных перестановок из n элементов* ***вычисляется по формуле****:*

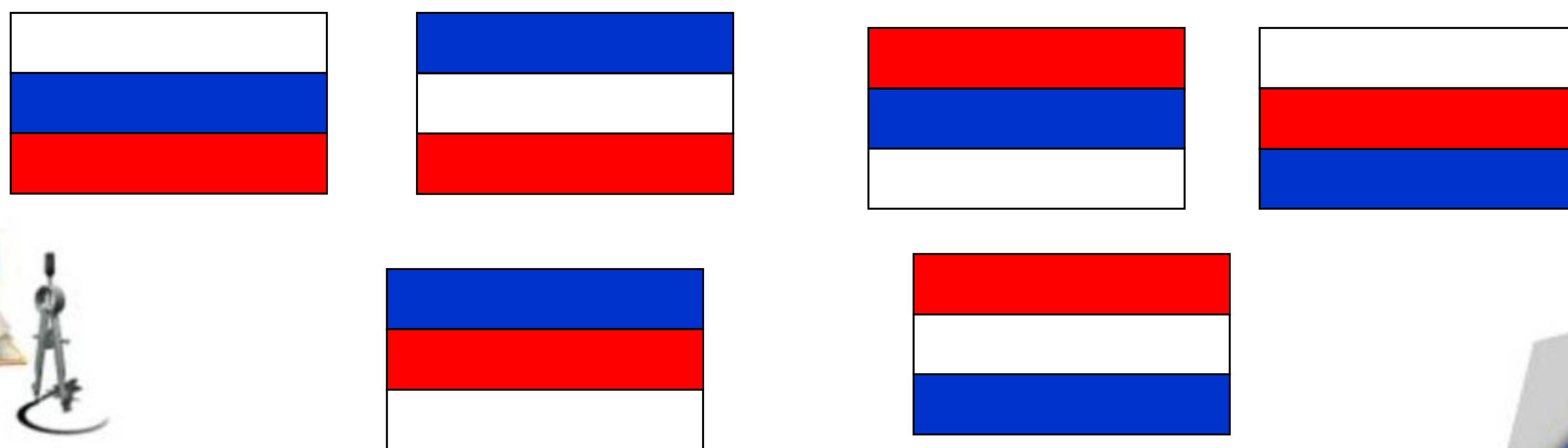
$$P_n = n!$$

# *Открываем новое*

**Государственные флаги некоторых стран состоят из трёх горизонтальных полос разного цвета. Сколько существует различных вариантов флагов с белой, синей и красной полосой?**

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

**Ответ: 6 вариантов.**



# Открываем новое

## Пример 1

**Сколькими способами** *могут быть расставлены восемь участниц финального забега на восьми беговых дорожках?*

**Решение:** $P_8 = 8! = 40\ 320$

**Ответ: 40320.**

## Открываем новое

# Пример 2

***Сколько различн**ых четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, причём в каждом числе цифры должны быть разные?*

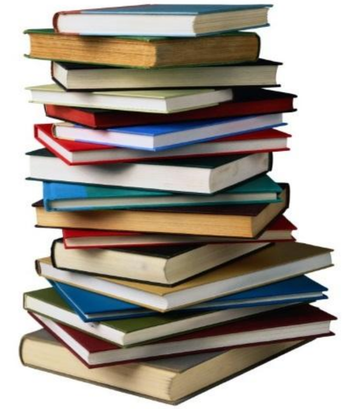
Решение:

Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить **Р**4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно **Р**3. Значит, искомое число четырёхзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, равно

**Р**4 - **Р**3 = 4! – 3! = 24 – 6 = 18.

# Открываем новое

## Пример 3



Имеется девять различных книг, четыре из которых – учебники.
Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не девять, а шесть книг. Это можно сделать **Р**6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить **Р**4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению **Р**6 · **Р**4. Получаем:

**Р**6 · **Р**4 = 6! · 4! = = 17 280.

## Открываем новое

# Пример 4

Сколько вариантов расписания уроков возможно составить, если в день шесть уроков: математика, русский язык, география, биология, физкультура, информатика, если:

**а) урок математики должен быть только первым?**

Так как урок математики должен быть только первым, для остальных уроков остаются варианты расписания только из пяти предметов, т.е

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ способов}$$

Ответ: 120

**б) урок физкультуры не может быть первым?**

Так как урок физкультуры не может быть первым, то из всего количества всех вариантов уроков необходимо исключить случаи, когда урок проходит первым

$P_6$ - $P_5$ = 6! – 5! =720 – 120 = 600 способов

Ответ: 600

**в) урок русского языка не может быть ни первым, ни шестым?**

Так как русский язык не может быть ни первым, ни шестым, то эти случаи необходимо исключить:

$$P_6 - 2\,P_5 = 6! - 2 \cdot 5! =$$

$$= 720 - 240 = 480 \text{ способов}$$

Ответ : 480

**г) урок биологии может быть или четвертым, или шестым?**

Так как урок биологии можно проводить или на четвертом, или на шестом уроке, то на четвертом уроке он может быть проведен в 5! вариантах, и на шестом уроке биология может быть проведена 5! случаях.

Итого $2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240$ способов

Ответ: 240

**д) урок математики и урок информатики должны стоять рядом**

Так как уроки математики и информатики должны стоять рядом, то будем считать пару информатика – математика как один предмет. Тогда из пяти получившихся предметов можно составить только 5! вариантов расписания. Но двухэлементное множество (математика-информатика) можно упорядочить только 2! способами. Значит, общее количество вариантов будет в 2! раза больше.

$$2! \cdot 5! = 240 \text{ способов}$$

Ответ: 240

# *На примерах учимся*

## *№1*

***Сколькими способами*** *могут встать в очередь в билетную кассу: 1)* ***3*** *человека; 2)* ***5*** *человек?*

***Ответ: 1)6 способов; 2)120 способов.***

# №2 На примерах учимся

Сколько различных правильных (с точки зрения русского языка) фраз можно составить, изменяя порядок слов в предложении:

1) «Я пошла гулять»;
2) «Во дворе гуляет кошка»?

***Ответ: 1)6 способов; 2)6 способов.***

# На примерах учимся

## №3

***Сколькими способами*** *можно с помощью букв К, L, М, Н обозначить вершины четырехугольника?*

***Ответ: 24 способа.***

# На примерах учимся

*Сколько существует выражений, тождественно равных произведению abcde, которые получаются из него перестановкой множителей?*

***Ответ: 119 выражений.***

# На примерах учимся

*Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите* ***наибольшее число*** *вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.*

***Ответ: 6 вариантов.***

# На примерах учимся

*Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций:*

*а) Олег находится в конце ряда;*

*б) Олег находится в начале ряда , а Игорь в конце;*

*в) Олег и Игорь стоят рядом;*

*а) (**Олег** находится в конце ряда – **фиксируем**). Число комбинаций равно числу **перестановок 6 мальчиков**, стоящих перед Олегом*

$$а)P_6 = 6! = 720.$$

*б) **Два элемента фиксированы**. Число возможных комбинаций равно **числу перестановок 5 мальчиков**, стоящих между Олегом и Игорем*

$$б)P_5 = 5! = 120.$$

# На примерах учимся

*Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций:*

*а) Олег находится в конце ряда;*

*б) Олег находится в начале ряда , а Игорь в конце;*

*в) Олег и Игорь стоят рядом;*

в*)* ***Пусть Олег и Игорь стоят рядом****. Возможны* ***два*** *варианта их расположения в паре (****Олег – Игорь, Игорь – Олег****). Будем рассматривать эту пару как единый элемент, переставляемый с другими пятью элементами.*

$$в)P_6 = 6! = 720.$$

$$720 + 720 = 1440$$

*Замечание: Такой прием называется «склеиванием» элементов.*

***Ответ: 720; 120;1440.***