Дискретная математика

Предполные классы

Функционально полной называется такая система функций Σ, через функции которой можно выразить любую логическую функцию.

Например, $\boxed{\Sigma = \{\vee, \wedge, \neg\}}$. Эта система функционально полна, так как любая функция имеет булеву формулу.

Теорема.

Произвольная система Σ' будет функционально полной, если она сводится к функционально полной системе Σ.

Это означает, что через функции системы Σ' можно выразить все функции системы Σ.

Определение. Функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сохраняет 0, если $y = f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Определение. Функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сохраняет 1, если $y = f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Определение. Функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ монотонная, если для любых двух наборов значений аргументов σ и τ, таких что $\sigma \leq \tau$ выполняется $f(\sigma) \leq f(\tau)$.

Утверждение 1. Класс T_0 – функций, сохраняющих 0, замкнут.

Утверждение 2. Класс T_1 – функций, сохраняющих 1, замкнут.

Утверждение 3. Класс S – самодвойственных функций замкнут.

Утверждение 4. Класс L – линейных функций замкнут.

Теорема о булевой формуле монотонной функции. У каждой булевой формулы, отличной от 0 и 1 существует булева формула без отрицаний. Каждая булева формула без отрицаний описывает монотонную функцию, отличную от 0 и 1.

Что бы проверить, есть ли у данной функции булева формула без отрицаний, достаточно построить ее сокращенную ДНФ. Если она содержит отрицания, значит, булевой формулы без отрицаний у этой функции не существует. Следовательно, она немонотонна.

Утверждение 5. Класс M – монотонных функций замкнут.

Лемма 1.

Если функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – немонотонна, то подстановкой n - 1 константы из нее можно получить отрицание.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - немонотонна. Тогда существуют два набора аргументов σ и τ, таких что $\sigma \le \tau$, при этом $f(\sigma) > f(\tau)$.

Пусть набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, набор $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, причем $f(\sigma) = 1$, а $f(\tau) = 0$.

Образуем цепочку соседних наборов, переводящих σ в τ:

$$\sigma = \delta^1 \le \delta^2 \le \ldots\ \delta^{k-1} \le \delta^k = \tau.$$

Среди этих наборов есть $\delta^i \leq \delta^{i+1}$, которые отличаются лишь в одной координате $\delta_j^i = 0$ и $\delta_j^{i+1} = 1$. Но при этом $f(\delta^i) = 1$, а $f(\delta^{i+1}) = 0$. Остальные координаты этих наборов одинаковы. Если подставить значения остальных координат вместо n - 1 переменной функции $y = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$. Функция оставшейся одной переменной является отрицанием:

$$g(x^i) = \overline{x}^i .$$

Лемма 2.

Если функция $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ – нелинейна, то подстановкой n - 2 констант из нее можно получить дизъюнкцию и конъюнкцию.

Доказательство. Пусть $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ – нелинейна. Тогда в ее полиноме Жегалкина есть конъюнкция различных переменных. Обозначим эту конъюнкцию $K = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$. Подставим вместо переменных $x_{i_3}, x_{i_4}, \ldots, x_{i_k}$ единицу, вместо переменных, не вошедших в конъюнкцию K – нули.

Заменим $x_{i_1} = x,\ x_{i_2} = y$. Полином Жегалкина примет вид:

$$xy \oplus \alpha x \oplus \beta y \oplus \gamma.$$

В зависимости от вида функции $y = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$ коэффициенты α, β и γ могут принимать различные значения. Покажем, что в каждом случае суперпозиция полученной функции и отрицания будет являться конъюнкцией или дизъюнкцией переменных $x_{i_1} = x,\ x_{i_2} = y$.

№	$\alpha\beta\gamma$	Полином Жегалкина	Булева формула	Суперпозиция
0	000	xy	xy	$xy = f_0(x, y)$
1	001	$xy \oplus 1$	$\overline{xy}$	$xy = \bar{f}_1(x, y)$
2	010	$xy \oplus y$	$\bar{x}y$	$xy = f_2(\bar{x}, y)$
3	011	$xy \oplus y \oplus 1$	$\overline{\bar{x}y} = x \vee \bar{y}$	$x \vee y = f_3(x, \bar{y})$
4	100	$xy \oplus x$	$x\bar{y}$	$xy = f_4(x, \bar{y})$
5	101	$xy \oplus x \oplus 1$	$\overline{x\bar{y}} = \bar{x} \vee y$	$x \vee y = f_5(\bar{x}, y)$
6	110	$xy \oplus x \oplus y$	$x \vee y$	$x \vee y = f_6(x, y)$
7	111	$xy \oplus x \oplus y \oplus 1$	$\overline{x \vee y}$	$x \vee y = \bar{f}_7(x, y)$

Теорема 1 о функциональной полноте.

Для того чтобы система функций Σ была функционально полна в слабом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну немонотонную и хотя бы одну нелинейную функцию.

Лемма 3.

Если функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – несамодвойственна, то подстановкой отрицания из нее можно получить константы 0 и 1.

Теорема 2 о функциональной полноте (теорема Поста).

Для того чтобы система функций Σ была функционально полна (в сильном смысле), необходимо и достаточно, чтобы она содержала

хотя бы одну немонотонную,

хотя бы одну нелинейную,

хотя бы одну несамодвойственную,

хотя бы одну не сохраняющую 0,

хотя бы одну не сохраняющую 1 функцию.