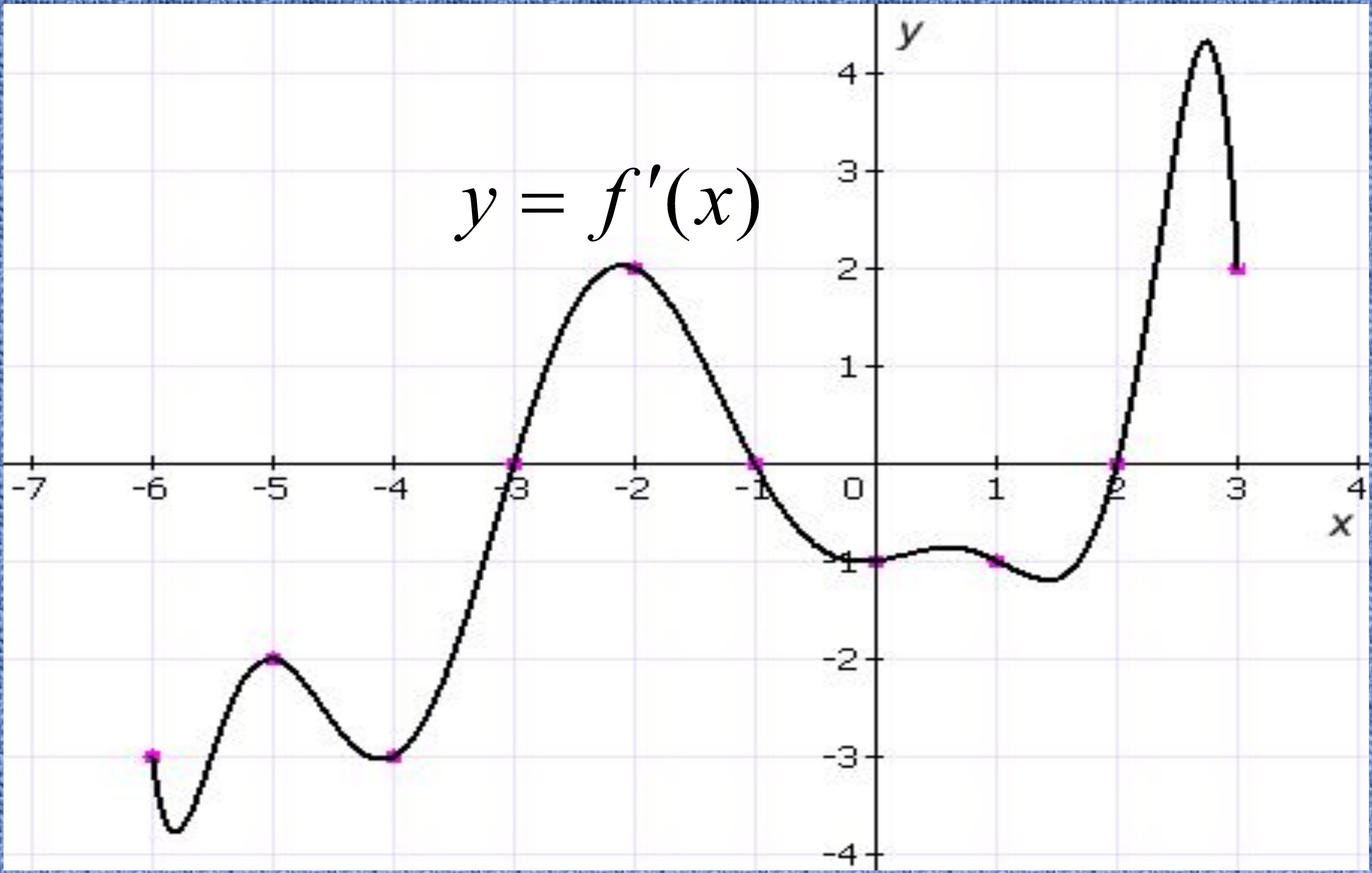
Математика уступает свои крепости лишь сильным и смелым.

А.П. Конфорович

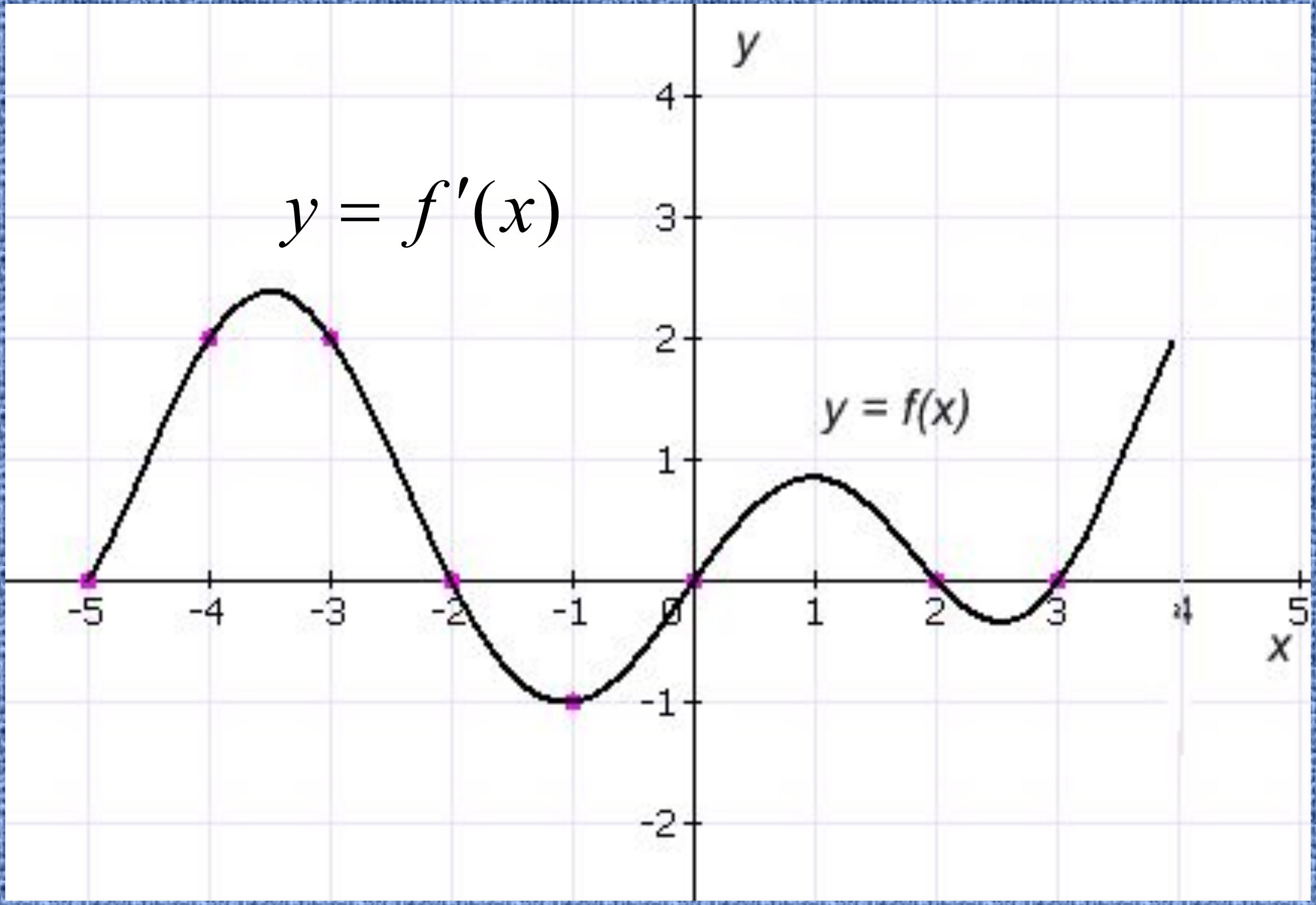
Результат учения равен произведению способности на старательность. Если старательность равна нулю, То и все произведение равно нулю. А способности есть у каждого!

Тема урока:

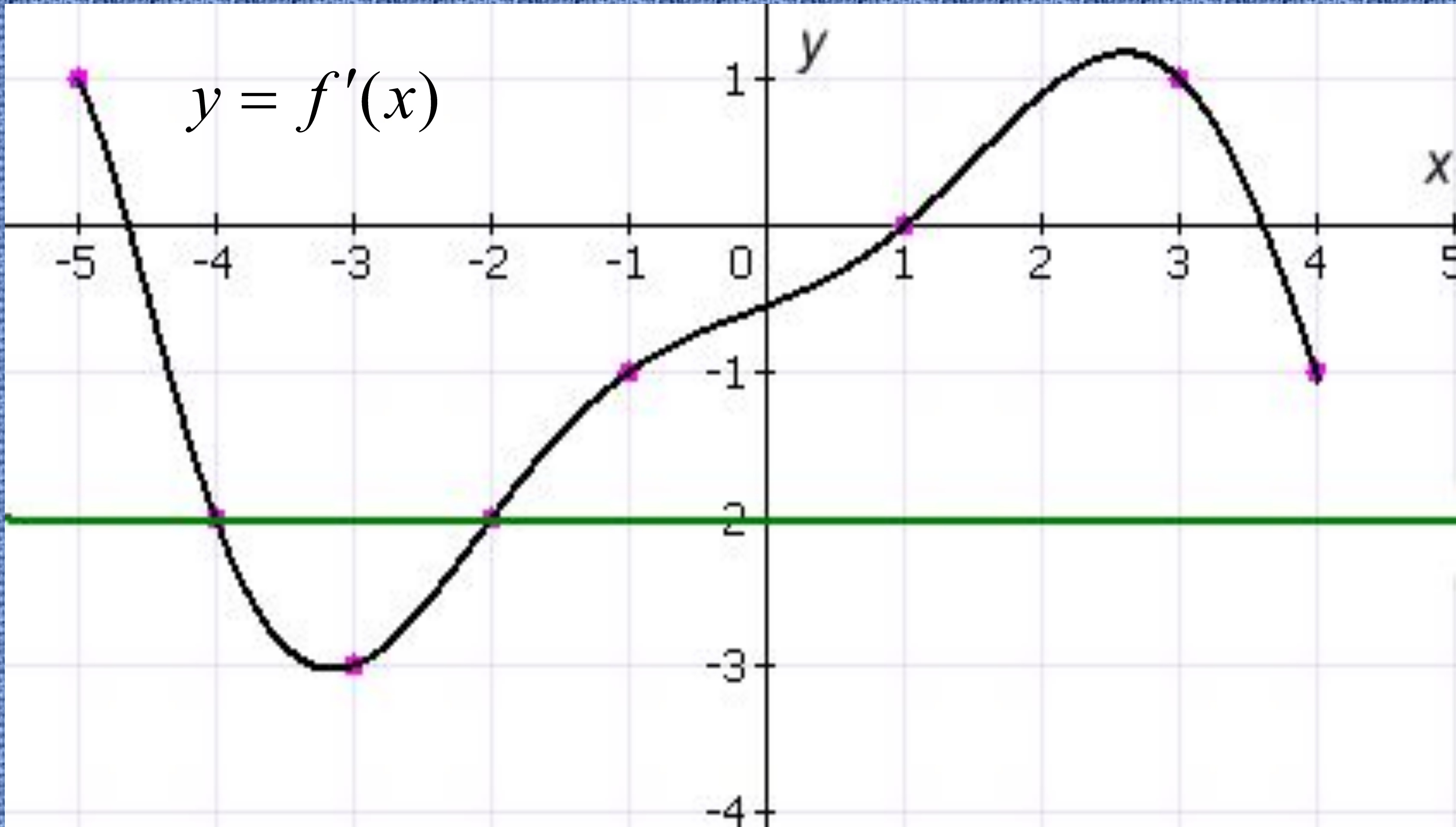
Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке



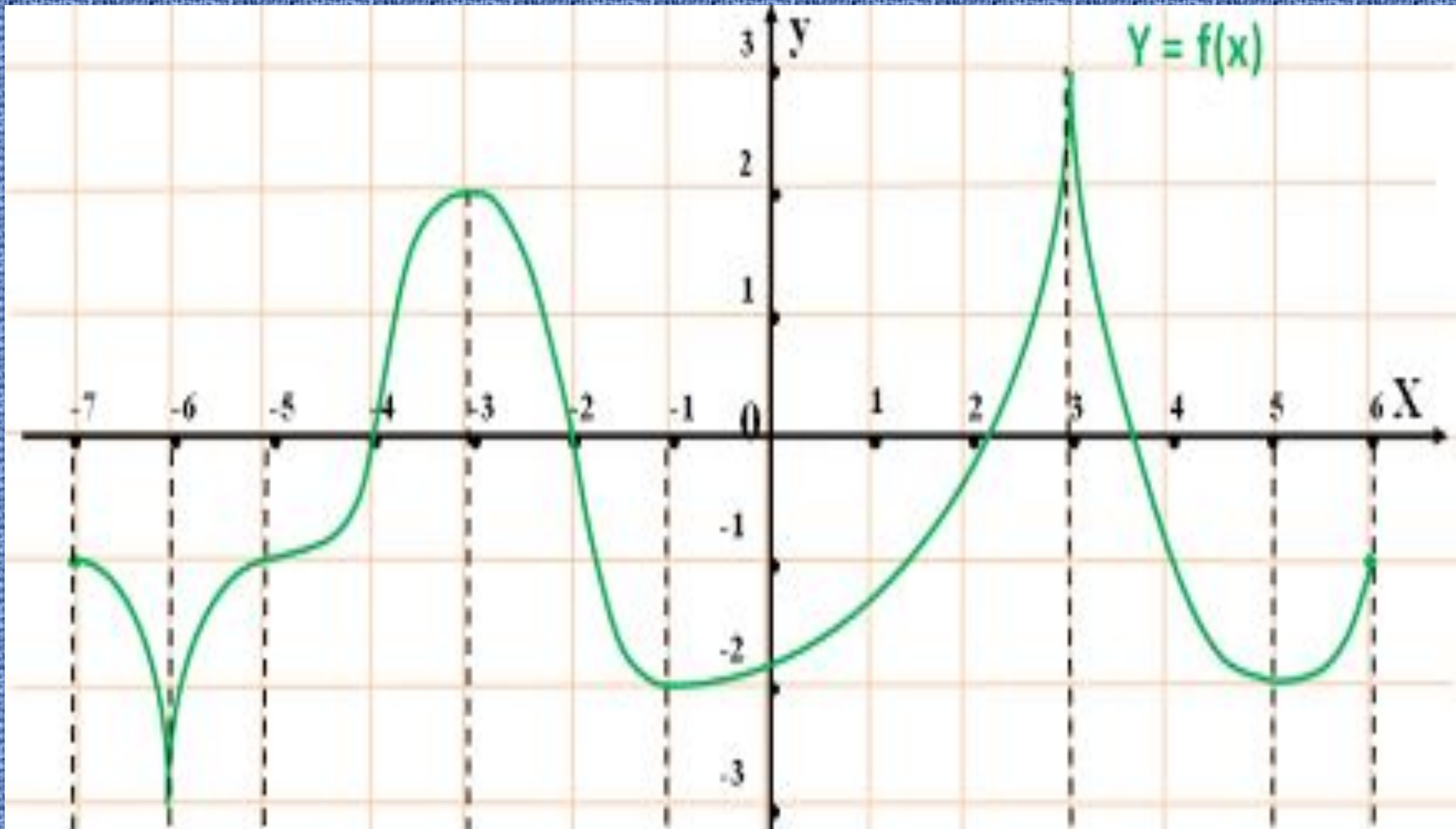
Функция y = f(x) определена на отрезке [-6;3]. График её производной изображен на рисунке.
Определите промежутки возрастания и убывания функции f(x).



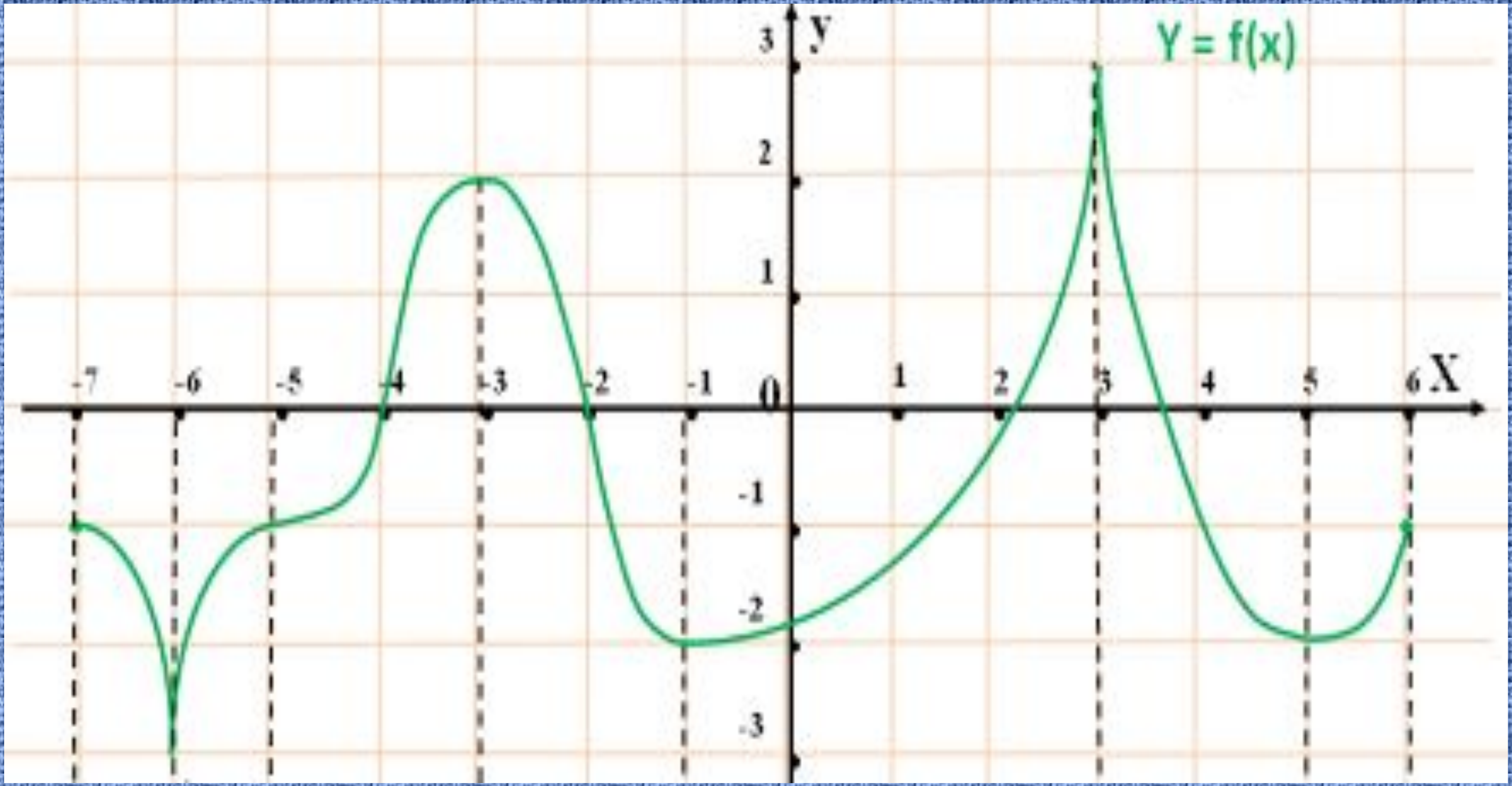
Функция y = f(x) определена на отрезке [-5;4]. График её производной изображен на рисунке. Определите точки максимума и минимума функции f(x).



Функция y = f(x) определена на отрезке [-5;4]. График её производной изображен на рисунке. Определите сколько существует точек на графике функции f(x) , касательные в которых параллельны прямой *y = 5 – 2x.*



Функция y = f(x) определена на отрезке [-7;6]. Её график изображен на рисунке. Найдите точки минимума функции. Определите точки в которых её производная равна 0.

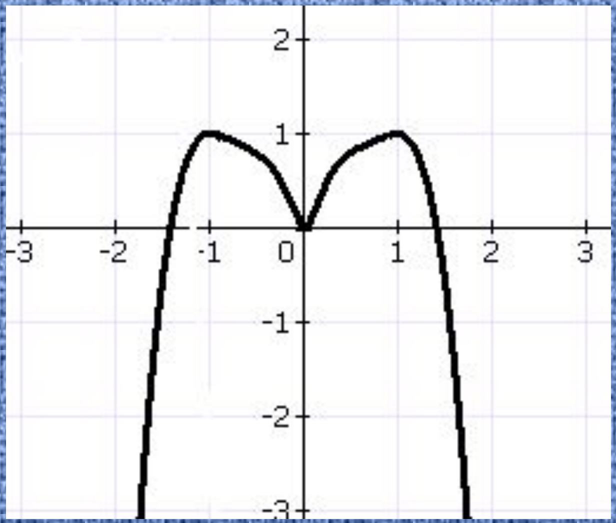


Функция y = f(x) определена на отрезке [-7;6]. Её график изображен на рисунке. Найдите точки максимума функции. **Определите точки в которых производная этой функции не существует.**

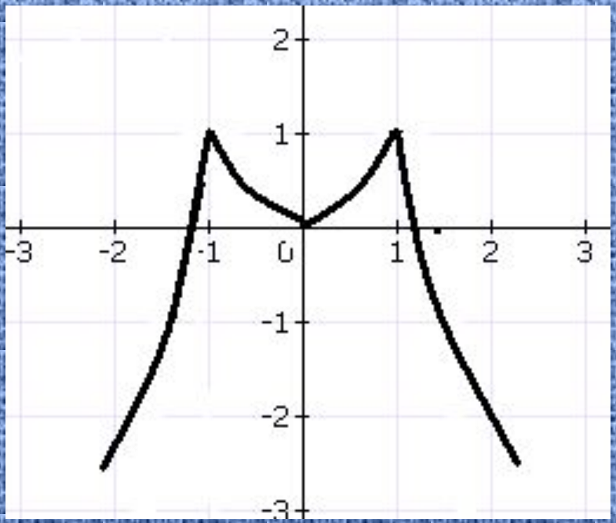
На каком рисунке изображен график функции

$$y = 2x^2 - x^4$$

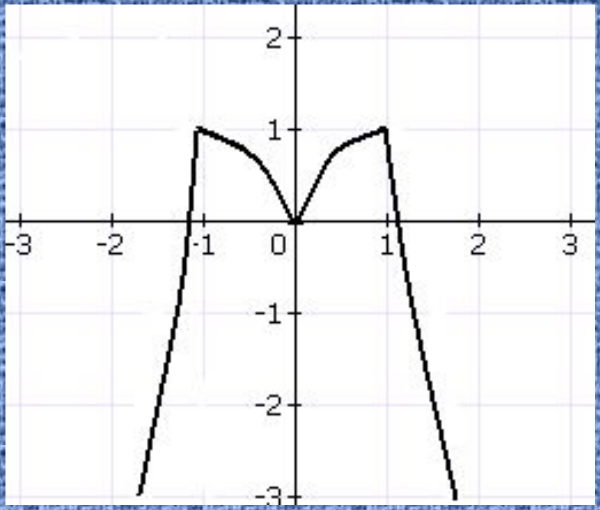
1



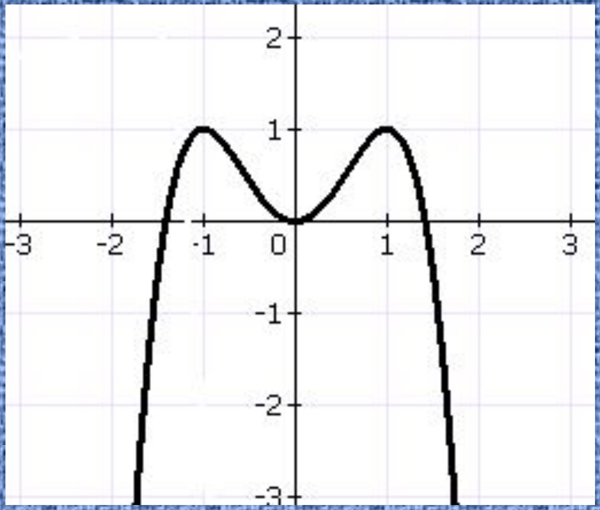
3



2



4



Тест: Исследование функции по графику.

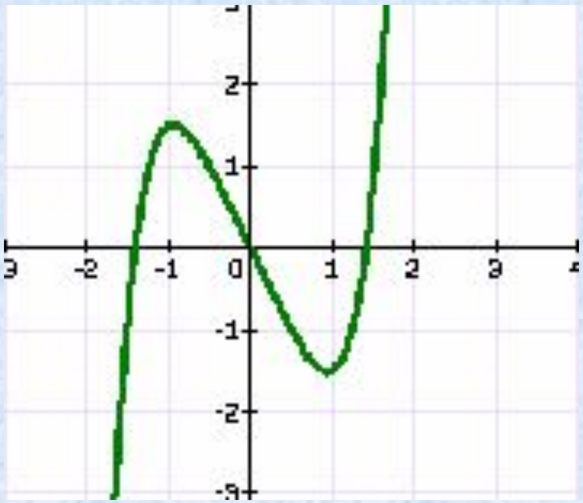
- Тест состоит из 5 вопросов.
- К каждому вопросу предложено 4 ответа, один из них верный.
- **Желаю удачи!**

1. Для какой функции на интервале

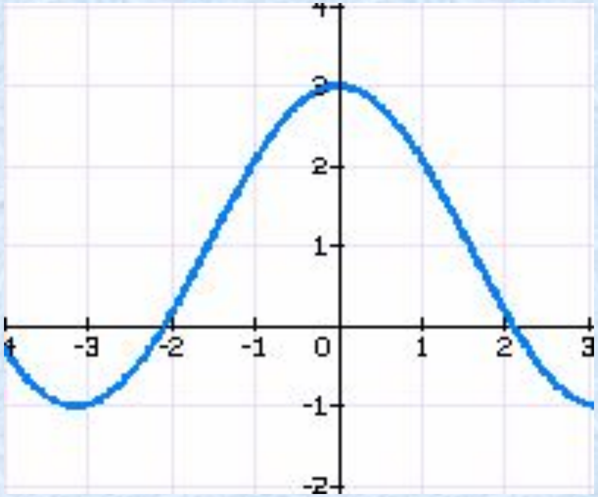
1вар.: [1; 2] производная отрицательна?

2 вар.: [-1; 0] производная отрицательна?

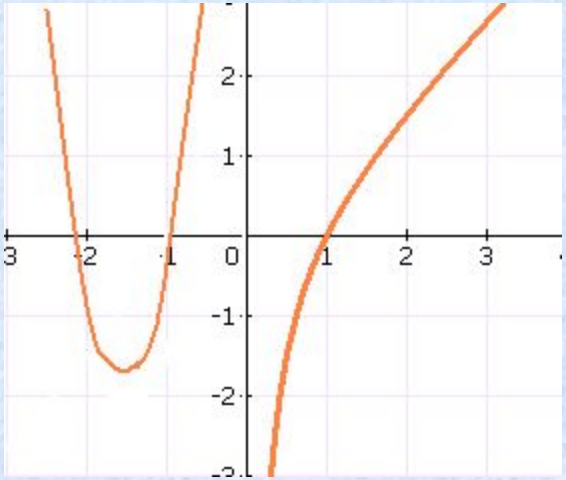
1



3



2



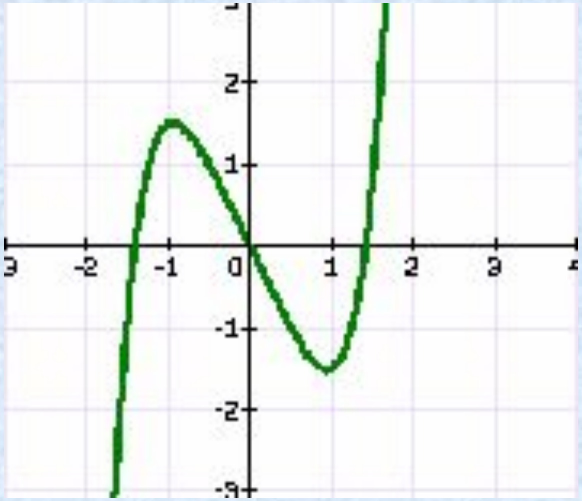
4

На каком рисунке график функции имеет точку

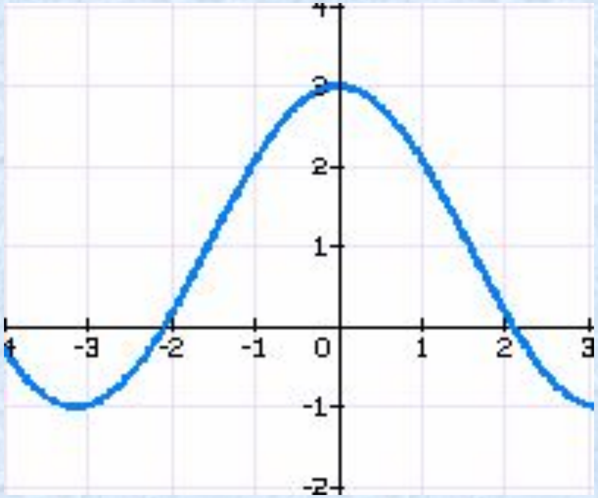
1 вар.: максимума при x=-1?

2 **вар.:** минимума при x = 0?

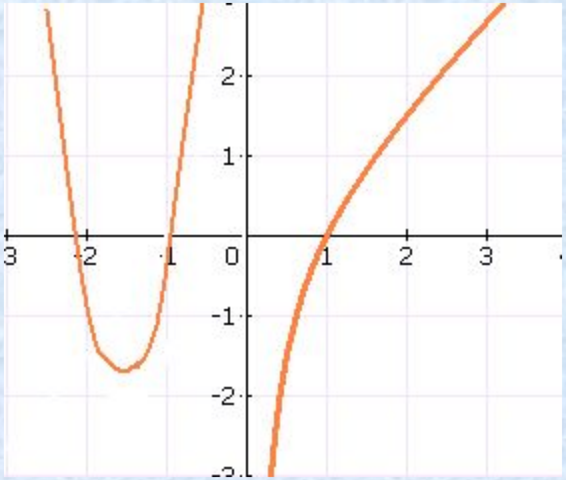
1



3



2

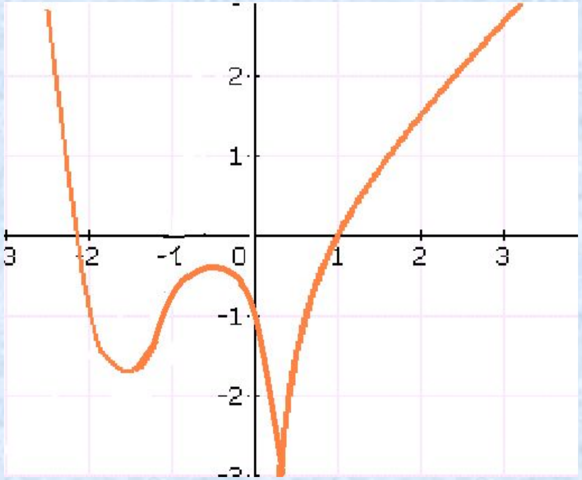


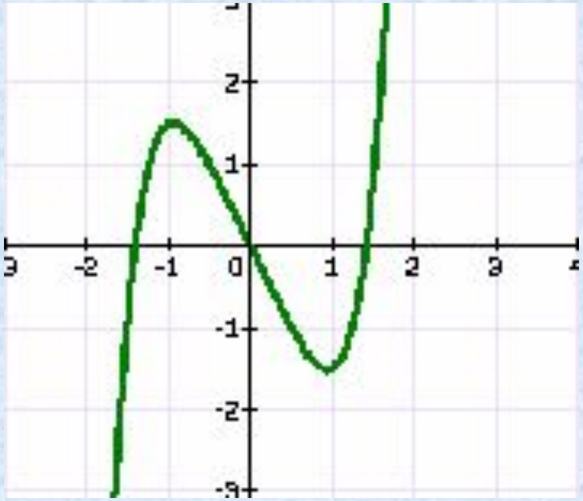
4

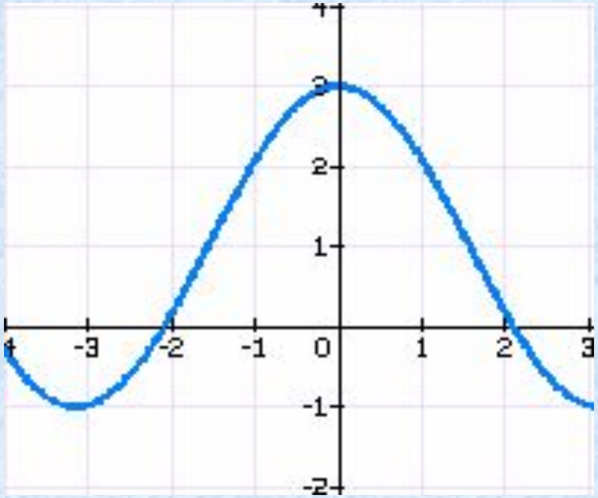
На каком рисунке график функции имеет ровно две критические точки на интервале

1 вар.: [-2;2]?

2 вар.: [-2;0]?



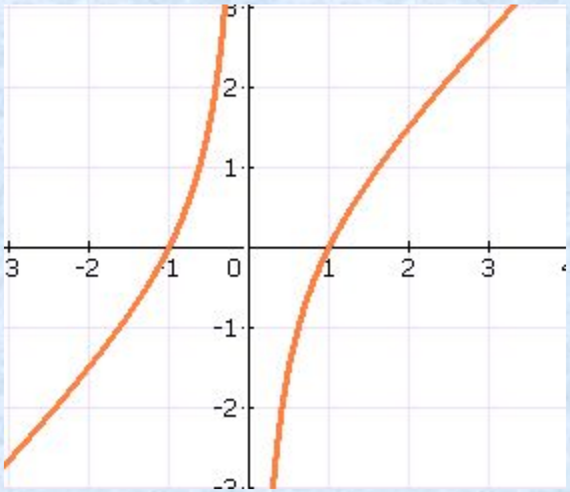


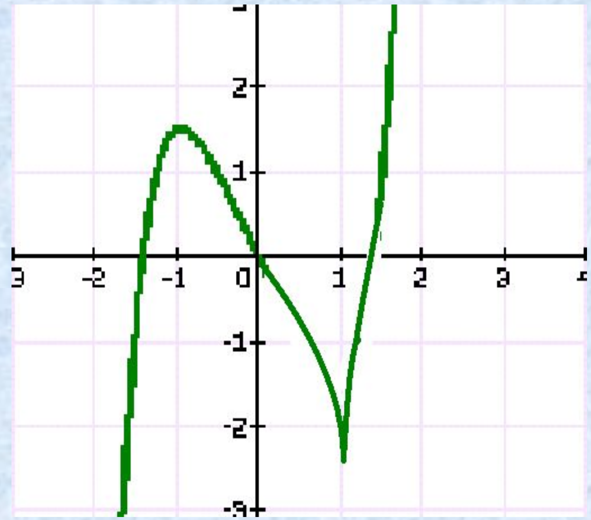


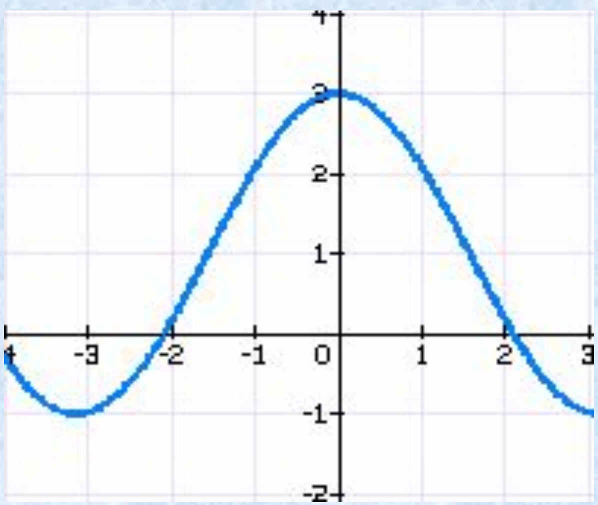
Какая функция определена, а её производная нет при:

1 вар.: $x = 0$;

2 вар.: $x = 1$.



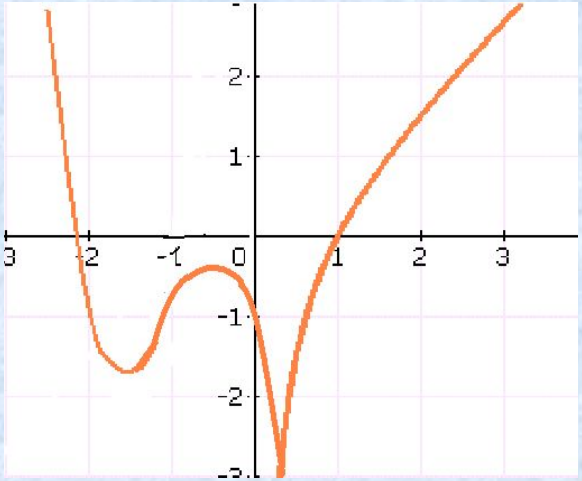


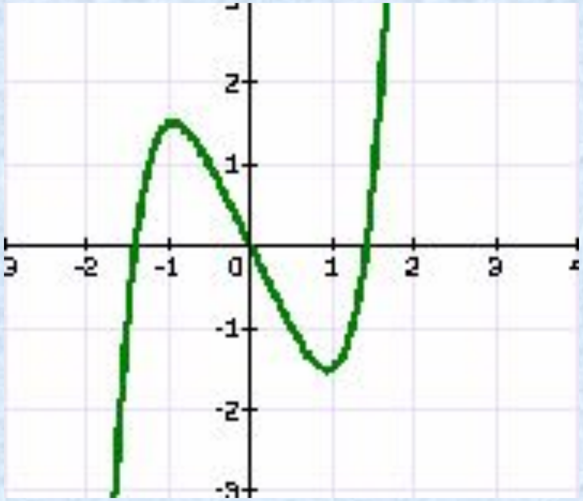


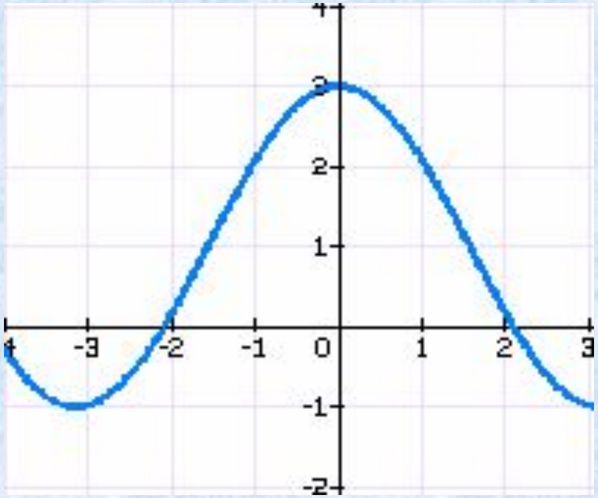
На каком рисунке производная функции равна нулю в точке:

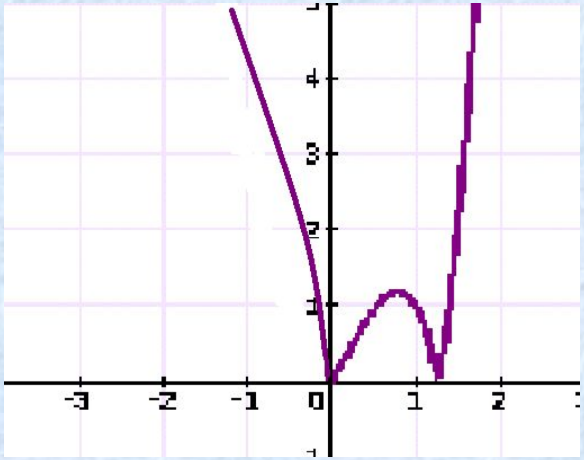
1 вар.: $x = 0$?

2 вар.: $x = 1$?









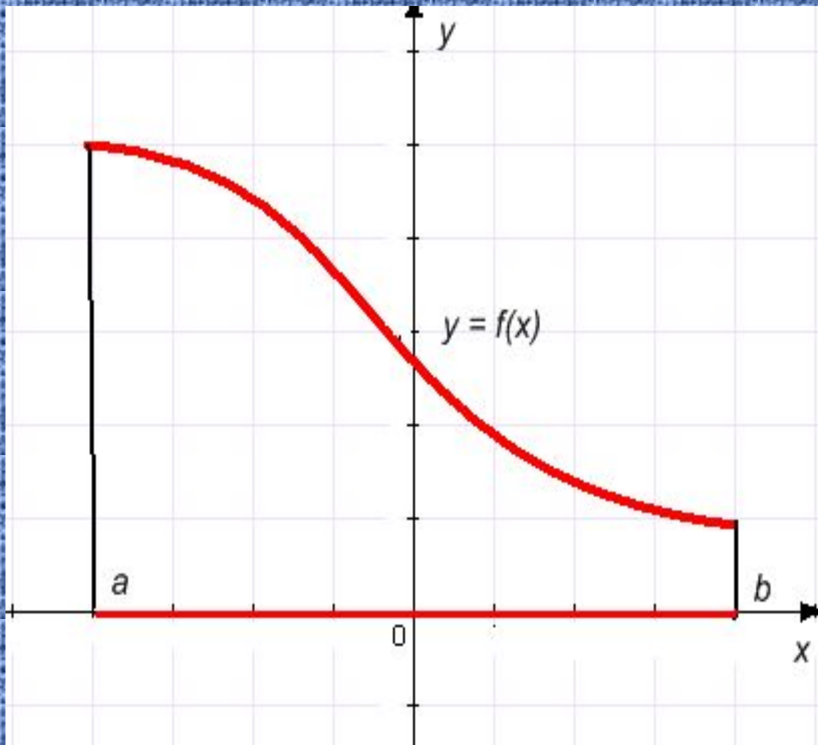
Чебышев Пафнутий Львович (1821-1894), знаменитый русский математик, основатель Петербуржской математической школы

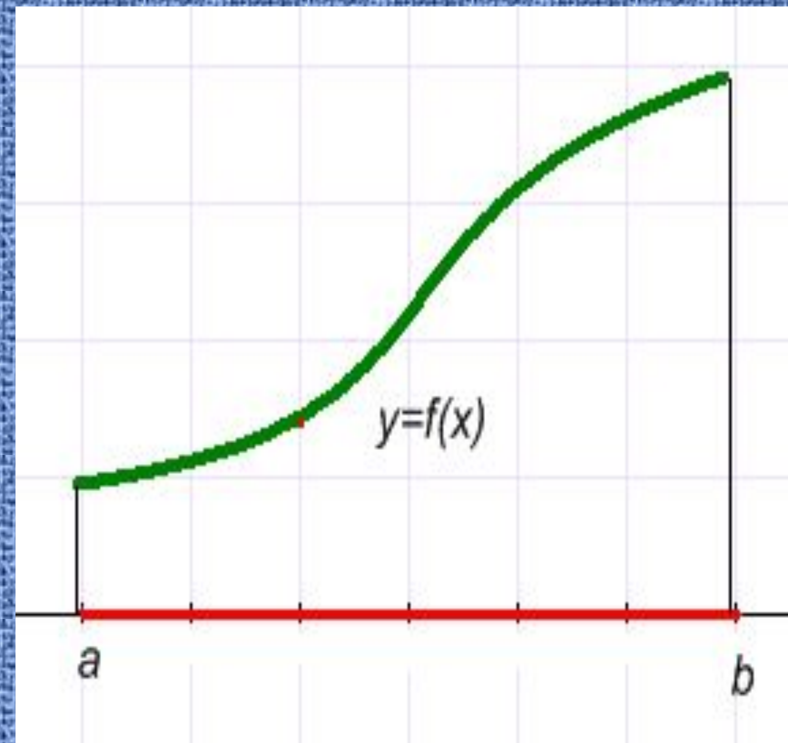
“…Особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды”.

Теорема Вейерштрасса

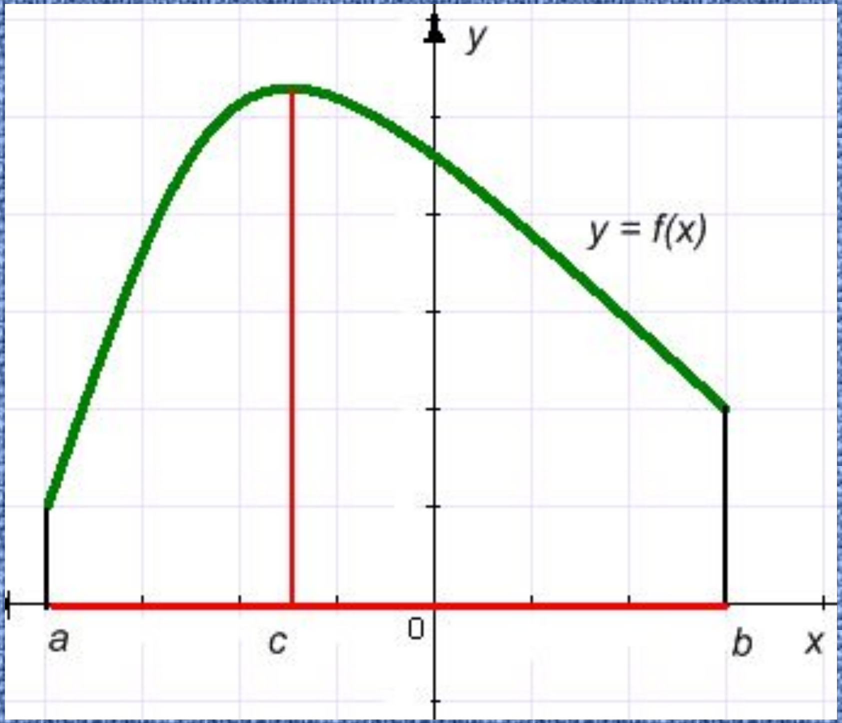
Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815-1897 гг.) - немецкий математик

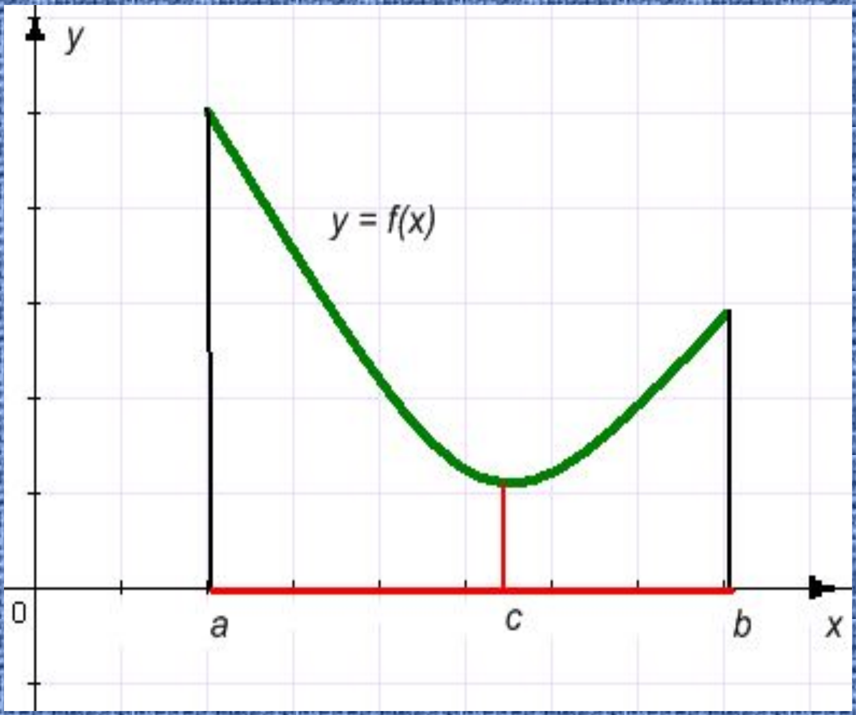
Непрерывная на отрезке [*a*;*b*] функция *f* принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.





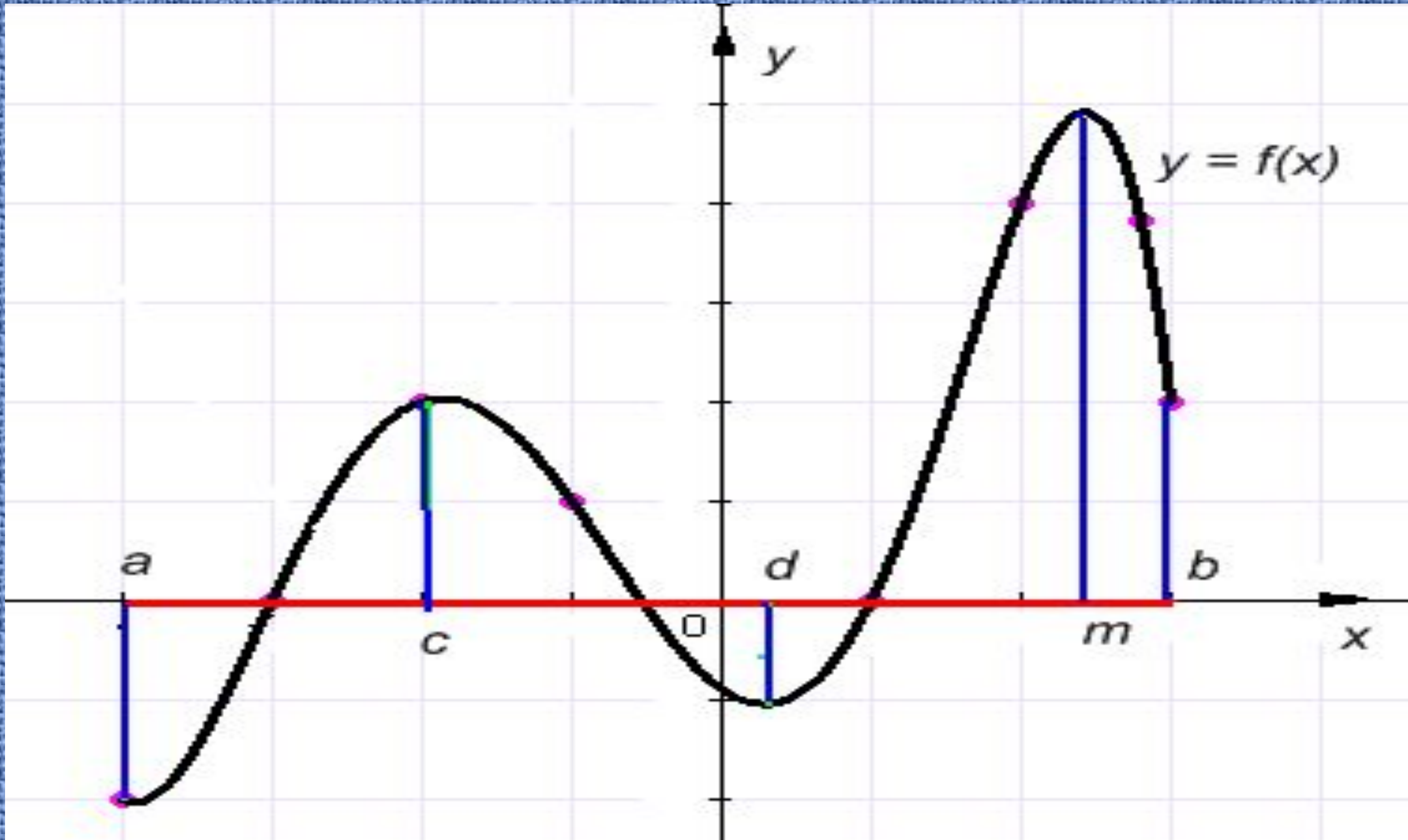
Если функция f(x) возрастает (убывает) на [a;b], то наибольшего или наименьшего значения она достигает на концах этого отрезка.





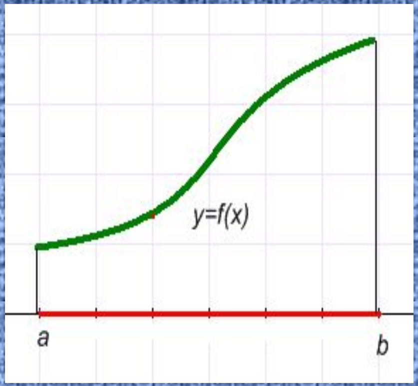
Если функция *y = f(x)* на отрезке [*a*; *b*] имеет лишь одну критическую точку и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение

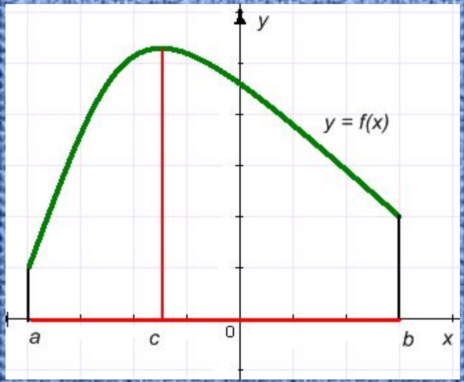
fmax = fнаиб. fmin = fнаим.

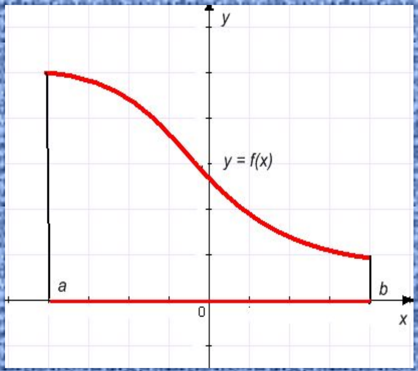


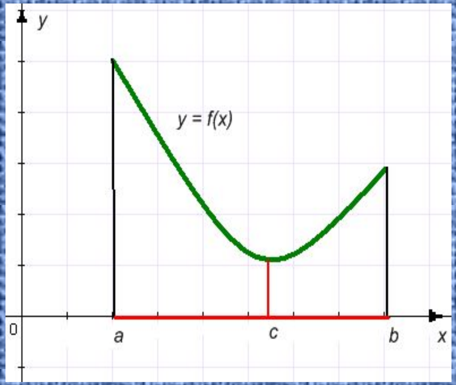
Наибольшего (наименьшего) значения непрерывная на [*a*; *b*] функция достигает либо на концах отрезка, либо в критических точках, лежащих на этом отрезке.

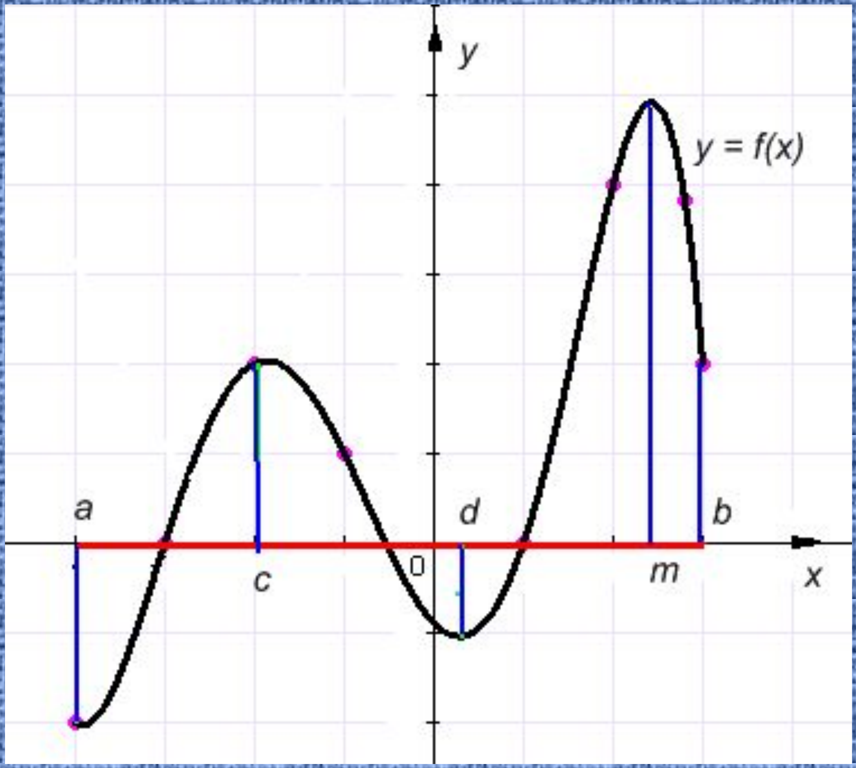
Проанализируйте все рассмотренные случаи. В каких точках функция достигает **наибольшего (наименьшего)** значений?











Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на [a;b]

1. Найти критические точки функции на интервале (*a*; *b*);
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$,
3. Среди всех вычисленных значениях функции выбрать наибольшее и наименьшее

Наибольшее значение

$$\max_{[a;b]} f(x)$$

Наименьшее значение

$$\min_{[a;b]} f(x)$$

Задача:

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 2$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение.

1. $D(f) = R$, значит функция непрерывна на рассматриваем отрезке.
2. Найдем критические точки функции: $f'(x) = x^2 + 2x - 3$

   $f'(x) = 0$, если $x^2 + 2x - 3 = 0$, отсюда $x = -3$ или $x = 1$.

   $x = -3$ не лежит на рассматриваем отрезке.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке.

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 3\cdot(-2) - 2 = -\frac{8}{3} + 4 + 6 - 2 = 8 - 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3};$$

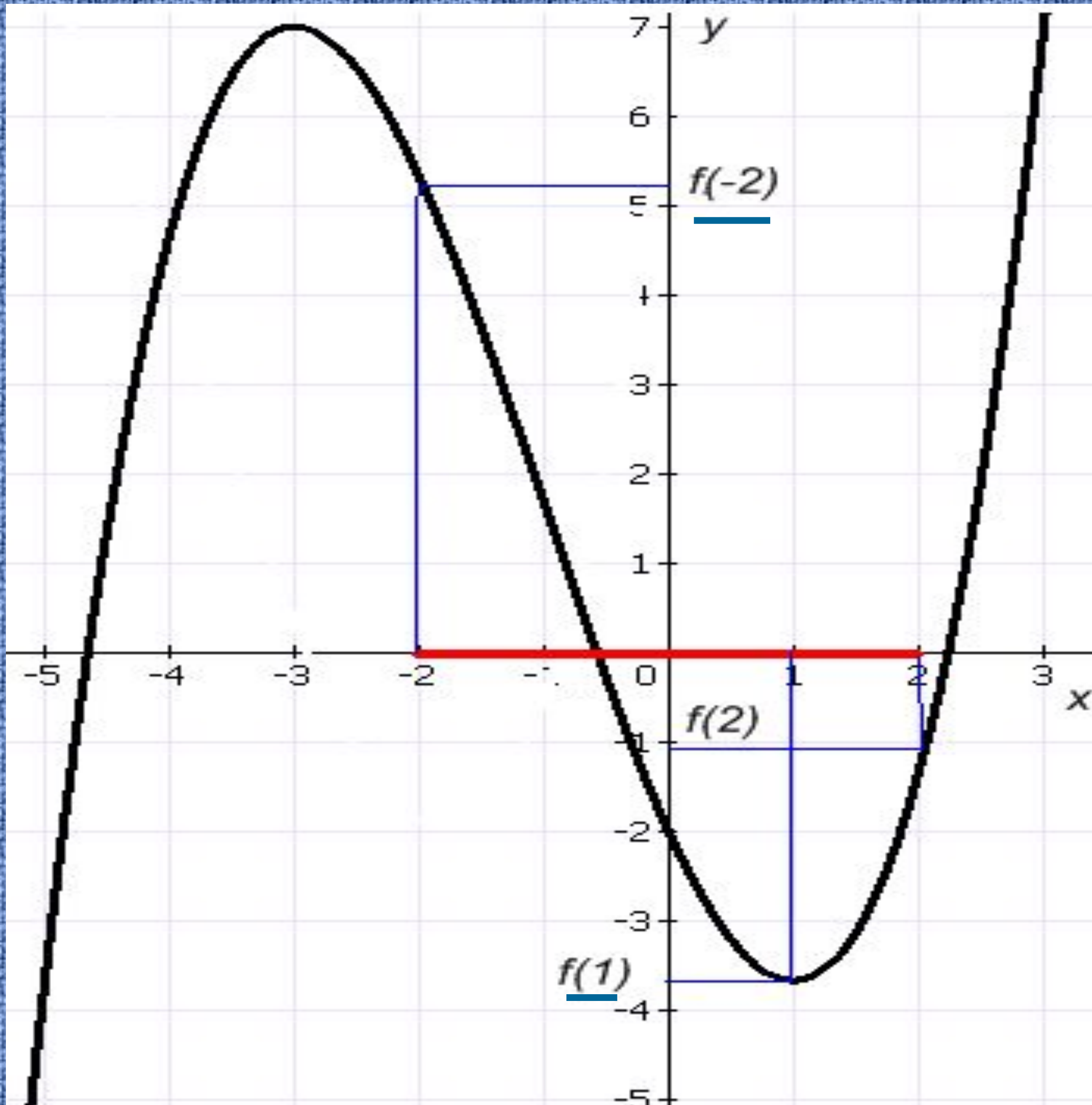
$$f(1) = \frac{1^3}{3} + 1^2 - 3\cdot 1 - 2 = \frac{1}{3} - 4 = -3\frac{2}{3};$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} + 2^2 - 3\cdot 2 - 2 = 2\frac{3}{3} - 4 = 1\frac{1}{3}$$

4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = 5\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \min_{[-2;2]} f(x) = f(1) = -3\frac{2}{3}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$ - наибольшее, а $-3\frac{2}{3}$ - наименьшее значения функции на отрезке [-2;2].



y
x
f(-2)
f(2)
f(1)
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
1
2
3

Решение:

1. $D(f) = R$,
2. Найдем критические точки функции: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, $f(x) = 0$, если $3x^2 - 6x + 3 = 0$. Отсюда, $x = 1$.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке :

$f(-2) = -8 - 12 - 6 + 2 = -24$;

$f(1) = 1 - 3 + 3 + 2 = 3$;

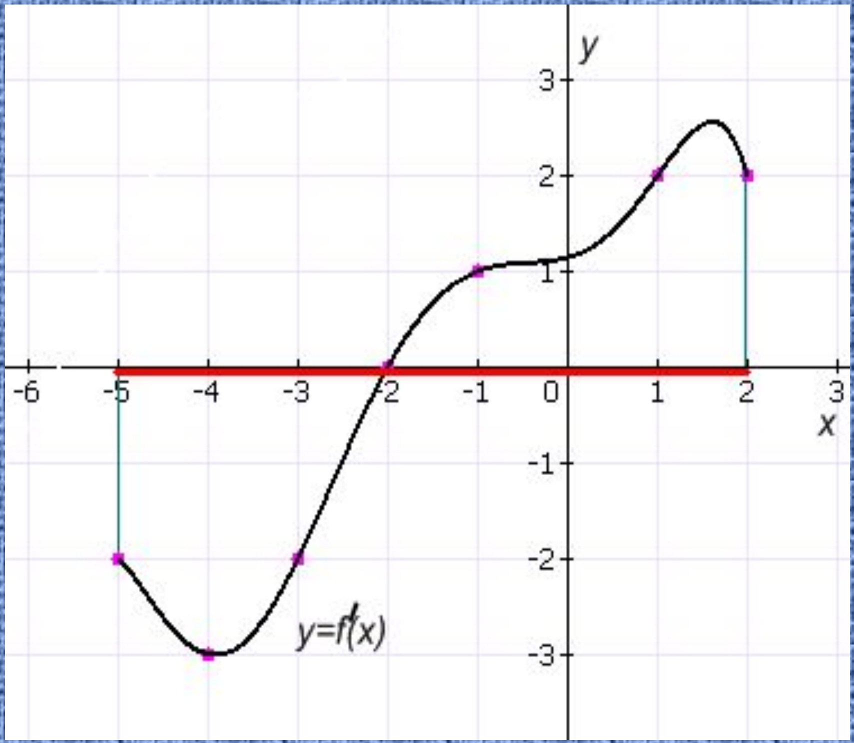
$f(2) = 8 - 12 + 6 + 2 = 4$.

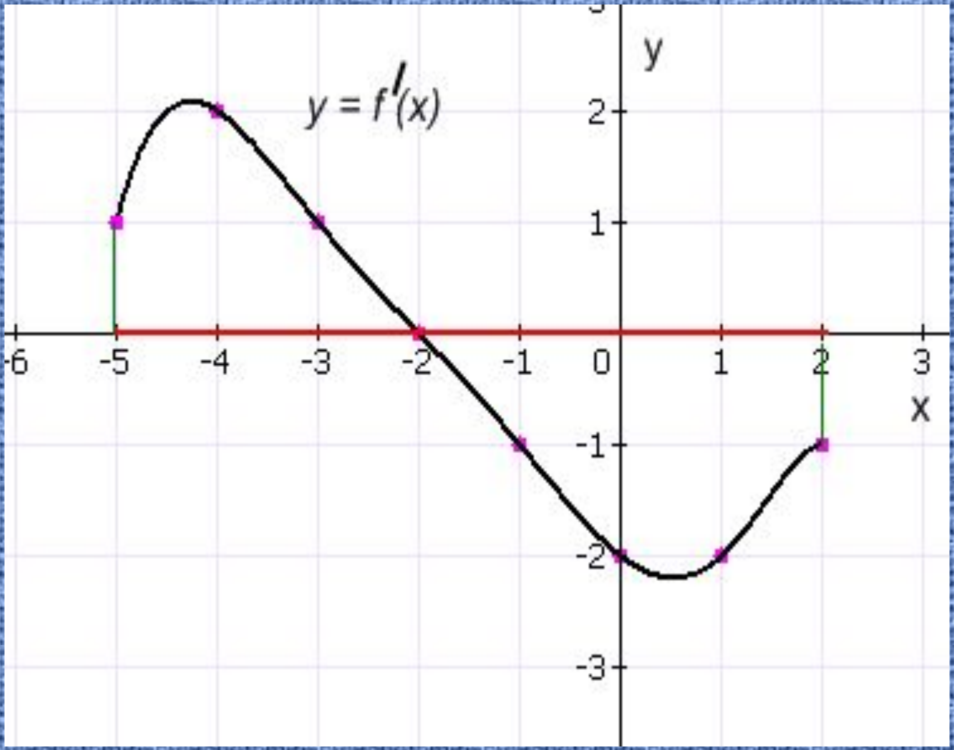
4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее: $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(2) = 4$;

$\min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = -24$.

optimum - "наилучший"

На рисунке изображен график производной функции. Можно ли по этому графику найти в какой точке функция достигает наибольшего (наименьшего) значений? Ответ обоснуйте.





ЕГЭ 2008г, С1

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\sqrt{9-x^2}-2x^3-12x^2+\left|\sqrt{9-x^2}-4\right|$$

Самостоятельная работа

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

I в. $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1$ на отрезке $[-1;4]$.

II в. $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ на отрезке $[-2; 2]$.