Математический анализ
Часть I

- В классическом понимании, математический анализ – это дифференциальное и интегральное исчисление, т.е. дисциплина, изучающая функции, производные, интегралы и ряды.

- Одним из фундаментальных понятий математического анализа является понятие **предела последовательности.**

- **Последовательностью** в математике называется любое упорядоченное бесконечное множество.

- **Числовой последовательностью** называют упорядоченное множество вещественных чисел.

- Обозначается числовая последовательность следующим образом: $\{x_n\} = \{x_1\,, x_2, x_3, \dots\}$.

Определение 1. Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N \qquad |x_n - a| < \varepsilon$. Обозначается следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \{x_n\}$ называют **бесконечно малой последовательностью.**

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\{x_n\}$ называют **бесконечно большой последовательностью.**

Если $\{x_n\}$ имеет конечный предел a, $\{x_n\}$ называют **сходящейся последовательностью.**

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(ax_n \pm by_n) = a\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm b\lim\limits_{n\to\infty} y_n,$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n,$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0.$

Пусть X – множество произвольной природы, Y – множество вещественных чисел $(Y \subset R)$

Определение 2. Правило f, по которому $\forall x \in X$ ставится в соответствие число $y \in Y$, называется **функцией** $y = f(x)$, X называется **областью определения** функции, Y - **множеством значений** функции.

- Если X - числовое множество $(X \subset R)$, то $y = f(x)$ - вещественная функция вещественной переменной x. График такой функции – линия, геометрическое место точек $\left(x, f(x)\right)$, $x \in X.$

Если $X = R_n$, то есть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in R$, то $y = f(x_1, \dots x_n)$ - вещественная функция n вещественных переменных $x_1, \dots, x_n$.

Функцию $y = f(x)$ можно задать **явно** (формулой $y = f(x)$), **неявно** (уравнением, не разрешенным относительно y), **таблицей** или **алгоритмически**.

- **Элементарные функции:**

1. Степенная $y = x^a$, x>0, $a \in R$.
2. Показательная $y = a^x, a > 0, x \in R$.
3. Логарифмическая $y = \log_a x, x \in R, a > 0, a \neq 1$.
4. Тригонометрические $y = \sin x, y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$.
5. Обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x, y = \mathrm{arctg}\, x, y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Элементарными считаются также все функции, полученные суперпозицией функций классов 1-5, например $y = e^{\sin x}$ – элементарная функция.

- Функции одной вещественной переменной могут иметь следующие **общие свойства:**
- 1. **Четность,** если $f(-x) = f(x)$ или
- **нечетность,** если $f(-x) = -f(x)$.
- 2. **Периодичность,** если существует такое
- число $T > 0$, что $f(x + T) = f(x)$.
- 3. **Монотонность,** если $\forall\ x_1 < x_2$
- а) $f(x_1) \leq f(x_2)$, тогда $f(x)$ монотонно возрастает,
- $f(x) \uparrow$;
- б) $f(x_1) \geq f(x_2)$, тогда $f(x)$ монотонно убывает, $f(x)\ \downarrow$;
- 4. **Ограниченность,** если $\forall\ x \in X \quad |f(x)| \leq M < \infty$.
- Возможна ограниченность функции только сверху, если $\forall\ x \in X \quad f(x) \leq M$, или только снизу, если
- $\forall\ x \in X \quad f(x) \geq m$.

- **Определение 3.** Конечное число b называется **пределом функции** $\boldsymbol{f(x)}$ при x, стремящемся к
- конечному числу a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b,$ если

$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon > 0}\ \exists\, \boldsymbol{\delta > 0}$ такое, что $\forall\, x$: $|x-a| < \delta$
$|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то:

1) $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x) \pm \beta\, \mathrm{g}(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \beta \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot \mathrm{g}(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

-
- Говорят, что:
- 1) x стремится к числу a слева, обозначается $x \to a - 0$, если x стремится к a, оставаясь
- меньше a, то есть левее точки a на числовой оси.
- 2) x стремится к числу a справа, обозначается $x \to a + 0$, если x стремится к a, оставаясь
- больше a, то есть правее точки a на числовой оси.
- Предел $f(x)$ при $x \to a - 0$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$, называется пределом слева функции $f(x)$ в точке a.
- Предел $f(x)$ при $x \to a + 0$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, называется пределом справа функции $f(x)$ в точке a.

- **Замечательные пределы**
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ =1,
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,\ e = 2{,}71828\ldots$
- На основе замечательных пределов получены следующие пределы:
- 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$
- 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,$
- 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a.$

- Следует также помнить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\log_a x)^m}{x^k} = 0, \quad a > 1, \quad k, m > 0$;

2) $\lim\limits_{x\to+0} x^k \log^m{}_a x = 0, \quad k, m > 0$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0, \; a > 1$.

• Непрерывность функции

Определение 4. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке $\boldsymbol{x_0}$,** если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Если не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называется
- **точкой разрыва функции** $f(x)$.

- Если $f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$, то
- x_0 - **точка устранимого разрыва** $f(x)$.
- Если $\exists$ конечные $f(x_0 \pm 0)$, но
- $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$, то x_0 - **точка разрыва I рода** $f(x)$. Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ не существует или бесконечен,
- x_0 - **точка разрыва I I рода** $f(x)$.

•

Производная функции

- Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке X. Возьмем произвольную точку $x \in X$ и дадим ей приращение Δx : $x + \Delta x \in X$.
- Тогда значение функции $f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
- **Определение 5.** Если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то он называется **производной функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x}$.**
- Из определения следует, что $(const)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$

Таблица основных производных

- 1) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 2) $(a^x)' = a^x \ln a$;
- 3) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 4) $(\sin x)' = \cos x$; 5) $(\cos x)' = -\sin x$;
- 6) $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 7) $(c\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{-\sin^2 x}$; 8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- 9) $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- 11) $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

- Правила дифференцирования

- 1) $(cf(x))' = cf'(x)$; 2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) + g'(x)$;

3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g\prime(x)}{g^2(x)}$; 5) $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$;

- Критерий монотонности функции
- Функция $f(x)$ монотонна на промежутке X тогда и только тогда, когда $f'(x)$ знакопостоянна на X. Причем,
- 1) если $\forall x \in X \; f'(x) > 0$, то $f(x) \uparrow$,
- 2) если $\forall x \in X \; f'(x) < 0$, то $f(x) \downarrow$.

Необходимое условие локального экстремума функции в точке

Если x_0 - точка локального экстремума $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Достаточное условие локального экстремума функции в точке

Если $f'(x_0) = 0$ и $f'(x)$ меняет знак в точке x_0,

то x_0 - точка локального экстремума $f(x)$.

Неопределенный интеграл

- **Определение 6.** Функция $F(x)$ называется **первообразной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**, если $F'(x) = f(x)$.
- Совокупность всех первообразных $\{F(x) + \mathrm{C}\}$ функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**: $\int f(x)dx = F(x) + C$.
- Из определения 6 следует, что $\int 0 \cdot dx = C$.

- **Свойства неопределенного интеграла:**

1. $\int \mathrm{c}f(x)dx = \mathrm{c}\int f(x)dx$,

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

- ## Методы интегрирования

Замена переменной

$x = \varphi(t)$: $\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$

Интегрирование по частям

$u = u(x), v = v(x) \quad \int udv = uv - \int vdu.$

Таблица простейших неопределенных интегралов

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$; 2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$; 3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$;

4) $\int cosx\ dx = \sin x + c$; 5) $\int \sin x\ \ dx = -\cos x + c$;

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg\,x} + c$; 7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg\,x} + c$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$; 9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + c.$