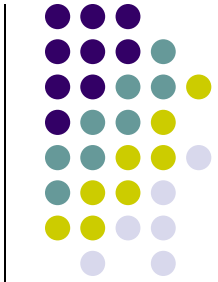
Дисциплина:

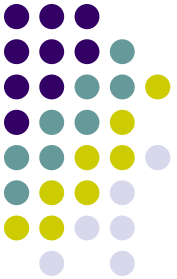
МАТЕМАТИКА ППИ

- Лектор: Ахкамова Юлия Абдулловна
- доцент кафедры математики и методики обучения математике ЮУрГГПУ
- akhkamovayua@cspu.ru



Учебный вопрос. Корреляция.Коэффициент корреляции. Основы регрессионного анализа

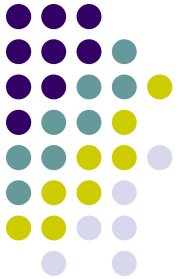
ПОДВОПРОСЫ



- 1. Корреляция.Коэффициент корреляции.
- 2. Основы регрессионного анализа

ПОДВОПРОС

- **Корреляция.Коэффициент корреляции.**



- **Применение статистических методов при обработке материалов** психологических исследований **дает большую возможность извлечь из экспериментальных данных полезную информацию.**
- **Одним из самых распространенных методов статистики является корреляционный анализ.**

Термин «корреляция» впервые применил французский палеонтолог Ж. Кювье, который вывел «закон корреляции частей и органов животных» (этот закон позволяет восстанавливать по найденным частям тела облик всего животного). В статистику указанный термин ввел английский биолог и статистик Ф. Гальтон (не просто «связь» – relation, а «как бы связь» – corelation).

- **Корреляционный анализ занимается степенью связи между двумя случайными величинами X и Y.**

- **<u>Основные приемы</u> <u>корреляционного анализа</u>:**
  1.) Вычисление выборочных коэффициентов корреляции.
  2.) Составление корреляционной таблицы.
  3.) Проверка статистической гипотезы значимости связи.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Корреляционная зависимость между случайными величинами X и Y называется линейной корреляцией, если обе функции регрессии являются линейными. В этом случае обе линии регрессии являются прямыми; они называется прямыми регрессии.**
- Для достаточно полного описания особенностей корреляционной зависимости между величинами недостаточно определить форму этой зависимости и в случае линейной зависимости оценить ее силу по величине коэффициента регрессии.

Например, ясно, что корреляционная зависимость возраста Y учеников средней школы от года X их обучения в школе является, как правило, более тесной, чем аналогичная зависимость возраста студентов высшего учебного заведения от года обучения, поскольку среди студентов одного и того же года обучения в вузе обычно наблюдается больший разброс в возрасте, чем у школьников одного и того же класса.

Для оценки тесноты линейных корреляционных зависимостей между величинами X и Y по результатам выборочных наблюдений **вводится понятие выборочного коэффициента линейной корреляции, определяемого формулой:**

$$r_B = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad (1)$$

где **σ_X и σ_Y -выборочные средние квадратические отклонения величин X и Y**, которые вычисляются по формулам:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\overline{X^2} - (\overline{X})^2}\,,\ \sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\overline{Y^2} - (\overline{Y})^2}\,,\ \overline{Y^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_{y_i} y_j^2 \qquad (2)$$

- Следует отметить, что основной смысл выборочного коэффициента линейной корреляции r_B состоит в том, что он представляет собой эмпирическую (т.е. найденную по результатам наблюдений над величинами X и Y) оценку соответствующего генерального коэффициента линейной корреляции r:
- $r=r_B$ (3)
- **Выборочное уравнение линейной регрессии Y на X имеет вид:** $$Y-\overline{Y}=r_B\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\overline{X})$$ (4)

где $r_B\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=b$. То же можно сказать о выборочном уравнений линейной регрессии X на Y:

$$X-\overline{X}=r_B\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-\overline{Y})$$ (5)

- ***Основные свойства выборочного коэффициента линейной корреляции:***
- **1. Коэффициент корреляции двух величин, не связанных линейной корреляционной зависимостью, равен нулю.**
  2. Коэффициент корреляции двух величин, связанных линейной корреляционной зависимостью, равен 1 в случае возрастающей зависимости и -1 в случае убывающей зависимости.

- **3. Абсолютная величина коэффициента корреляции двух величин, связанных линейной корреляционной зависимостью, удовлетворяет неравенству $0<|r|<1$.** При этом коэффициент корреляции положителен, если корреляционная зависимость возрастающая, и отрицателен, если корреляционная зависимость убывающая.
  4. Чем ближе $|r|$ к 1, тем теснее прямолинейная корреляция между величинами Y, X.
- **По своему характеру корреляционная связь может быть прямой и обратной, а по силе – сильной, средней, слабой. Кроме того, связь может отсутствовать или быть полной.**

Сила и характер связи между параметрами

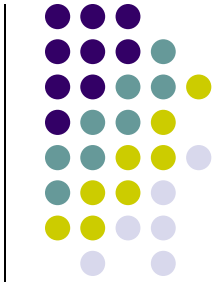
Сила связи	Характер связи	
	Прямая (+)	Обратная (-)
Полная	1	-1
Сильная	От 0,7 до 1	От -0,7 до -1
Средняя	От 0,3 до 0,7	От -0,3 до -0,7
Слабая	От 0,3 до 0	От -0,3 до 0
Связь отсутствует	0	0

Пример 1 . Изучалась зависимость между качеством Y (%) и количеством X (шт). Результаты наблюдений приведены в виде корреляционной таблицы:

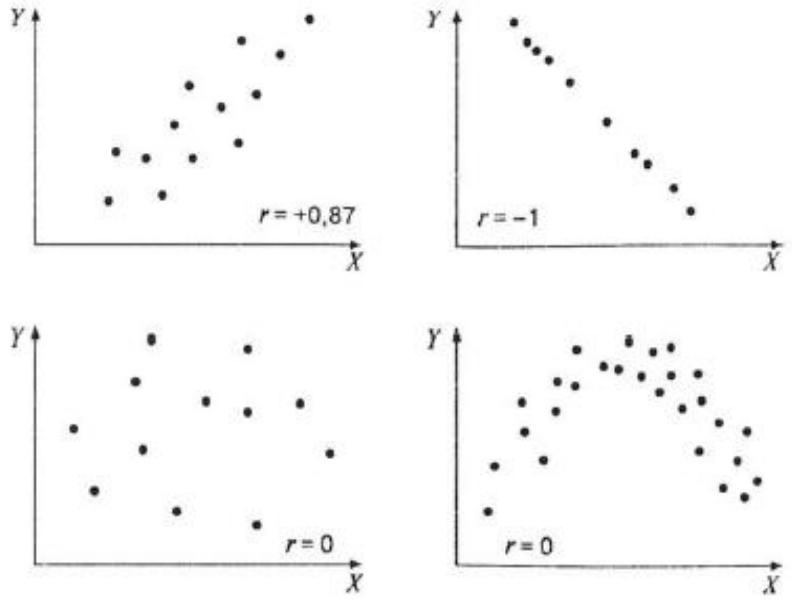
Y\X	18	22	26	30	n_y
70	5				5=5+0+0+0
75	7	46	1		54=7+46+1+0
80		29	72		101=0+ 29+72+0
85			29	8	37=0+0++29+8
90				3	3=0+0+0+3
n_x	12=5+ 7+0+0 +0	75=0+ +46+29+0+0	102=0+1+72+29+ 0	11=0+0+0 +8+3	200=200

- **Требуется вычислить выборочный коэффициент линейной корреляции зависимости Y от X.**
- *Решение.* $\bar{x}_{\text{в}} = 24{,}24;\ \bar{y}_{\text{в}} = 79{,}475;$
- $s_x = 7{,}68;\ s_y = 15{,}25.$
- $\overline{xy}$ найдем по таблице, которую составлять будем на практическом занятии.
- $r_{\text{в}} = 0{,}7837;$
- y-$\bar{y}_{\text{в}} = r_{\text{в}} \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}_{\text{в}})$
- y-79,475=0,7837$\cdot \frac{15{,}25}{7{,}68}(x - 24{,}24)$
- y-79,475=0,7837·1,98· (*x*-24,24)
- y-79,475=1,5517·(*x*-24,24)
- y-79,475=1,5517*x*-1,5517·24,24
- y-79,475=1,5517*x*-37,61

- **<u>Вывод:</u> Корреляционная зависимость между величинами X и Y –**
- прямая и сильная.
- **По форме корреляционная связь может быть линейной или нелинейной.**
- **Для линейной корреляционной связи можно выделить два основных направления: положительное («прямая связь») и отрицательное («обратная связь»).**
- **Сила связи напрямую указывает, насколько ярко проявляется совместная изменчивость изучаемых переменных.**

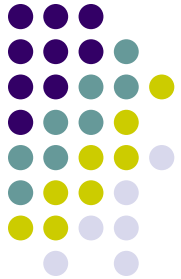


В психологии функциональная взаимосвязь явлений эмпирически может быть выявлена только как вероятностная связь соответствующих признаков. Наглядное представление о характере вероятностной связи дает диаграмма рассеивания – график, оси которого соответствуют значениям двух переменных, а каждый испытуемый представляет собой точку.



Примеры рассеивания и соответствующих коэффициентов корреляции

- **В малых выборках для дальнейшей интерпретации корректнее отбирать сильные корреляции на основании уровня статистической значимости.**
- **Для исследований, которые проведены на больших выборках, лучше использовать абсолютные значения коэффициентов корреляции.**
- **Основная статистическая гипотеза, которая проверяется корреляционным анализом, является ненаправленной и содержит утверждение о равенстве корреляции нулю в генеральной совокупности H_0: $r_{xy} = 0$.**



- При ее отклонении принимается альтернативная гипотеза $H_1: r_{xy} \neq 0$ о наличии положительной или отрицательной корреляции – в зависимости от знака вычисленного коэффициента корреляции.
- На основании принятия или отклонения гипотез делаются содержательные выводы.
- Однако к интерпретации выявленных корреляционных связей следует подходить осторожно.
- С научной точки зрения, простое установление связи между двумя переменными не означает существования причинно-следственных отношений.

- *Существует множество ситуаций, в которых его применение целесообразно. Например: установление связи между интеллектом школьника и его успеваемостью;*
- *между настроением и успешностью выхода из проблемной ситуации;*
- *между уровнем дохода и темпераментом и т. п.*
- Коэффициент Пирсона находит широкое применение в психологии и педагогике.

- **При вычислениях на компьютере статистическая программа (SPSS, Statistica) сопровождает вычисленный коэффициент корреляции более точным значением *p*-уровня.**
- **Для статистического решения о принятии или отклонении H_0 обычно устанавливают $\alpha = 0,05$, а для большого объема наблюдений (100 и более) $\alpha = 0,01$.**

- Если $p \leq \alpha$, H_0 отклоняется и делается содержательный вывод, что обнаружена статистически достоверная (значимая) связь между изучаемыми переменными (положительная или отрицательная – в зависимости от знака корреляции).
  Когда $p > \alpha$, H_0 не отклоняется, содержательный вывод ограничен констатацией, что связь (статистически достоверная) не обнаружена.
- Если связь не обнаружена, но есть основания полагать, что связь на самом деле есть, следует проверить возможные причины недостоверности связи.

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

- **Основы регрессионного анализа**

- **Задачи, решаемые методами регрессии и корреляции, непосредственно связаны между собой.** В то время, как в корреляционном анализе оценивается интенсивность, теснота связи, в регрессионном анализе исследуется ее форма. Иногда **регрессию рассматривают как частный случай корреляции, считая тем самым корреляцию более широким понятием.**
- Корреляция в широком смысле слова означает связь, соотношение между объективно существующими явлениями и процессами. **Не каждую корреляцию можно отождествлять с причинной связью. При изучении совместного изменения явлений может быть установлена так называемая ложная корреляция.**

- Под ложной корреляцией понимается **чисто количественная сопряженность в вариации изучаемых явлений, не имеющая логического объяснения по содержанию.**
- **Для эффективного изучения связи необходимо использовать совокупности единиц достаточно большого объема и однородные в отношении тех признаков, связь которых изучается.**

Прямолинейная зависимость имеет место, когда с возрастанием (или убыванием) значений признака-фактора значения результативного признака увеличиваются (или уменьшается) более ли менее равномерно. Линейное уравнение парной регрессии: $\hat{y}_x = a + bx$

- где $\hat{y}_x$ среднее значение результативного признака при определенном значении факторного признака *x;*
- *a* – свободный член уравнения регрессии;
- *b* – коэффициент регрессии, который показывает, на сколько единиц в среднем изменится результативный признак *y* при изменении факторного признака *x* на одну единицу его измерения.

- Криволинейная форма связи может выражаться различными видами функций, из которых наиболее часто используются парабола второго порядка, гипербола, показательная, степенная.
- С целью проверки качества модели связи используются математические критерии адекватности.
- Оценки неизвестных параметров уравнения регрессии находят обычно методом наименьших квадратов (МНК):

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 \rightarrow \min$$

Система нормальных уравнений МНК для прямой:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases}$$

Отсюда: $a = \frac{\Delta_a}{\Delta}; b = \frac{\Delta_b}{\Delta}$

где Δ – определитель системы; Δ_a - частный определитель, получаемый путем замены коэффициентов при *a* членами правой части системы уравнений; Δ_b – частный определитель, получаемый путем замены коэффициентов при *b* членами правой части системы уравнений.

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Тогда

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2};$$

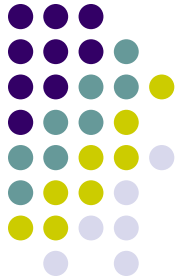
$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Параметры *a* и *b* могут быть выражены следующим образом:

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$b = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$$

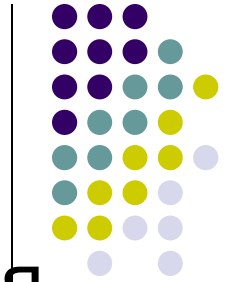
Выводы



- Задача оценки степени тесноты связи между признаками решается методами корреляционного анализа.
- Если линейный коэффициент корреляции мало отличается от теоретического корреляционного отношения, то зависимость между переменными близка к линейной. Это позволяет использовать теоретическое корреляционное отношение в качестве меры линейности связи между признаками.

- Задача восстановления средних значений результативного признака по заданным значениям факторного признака решается методами регрессионного анализа.
- Использование методов корреляции и регрессии предполагает вычисление основных параметров распределения (средних величин, дисперсии).

Вопросы для самопроверки



- Что представляют собой корреляционная связь?
- Что следует понимать под корреляцией и регрессией?
- Какие задачи решает корреляционный метод анализа?
- Что такое ложная корреляция. Каковы причины ее возникновения?
- Какими показателями измеряется теснота связи?

Библиография

- Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики: Учебник/ Под ред. И.И. Елисеевой. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2004.
- Кургузов В.В. Корпоративная статистика: экономико-статистическое моделирование материально-технического снабжения и сбыта. – 2006.
- Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel / Д. М. Левин, Д. Стефан, Т. С. Кребиль, М. Л. Беренсон. - 4-е изд.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.
- Статистика: Учебник/ Под ред. В. С. Мхитаряна. – М.: Экономист, 2005.
- Салин В. Н. Чурилова Э. Ю. Курс теории статистики для подготовки специалистов финансово-экономического профиля: Учебник/ В. Н. Салин, Э. Ю. Чурилова – 2006.
- Практикум по теории статистики: Учеб. пособие/ Под ред. Проф. Р. А. Шмойловой. – М:. Финансы и статистика, 2004.