Математика ППИ

Лекция 11.

Неопределённый интеграл, его свойства . Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Математика ППИ

Лекция 11.

Неопределённый интеграл . Методы интегрирования: замена переменной.

Цели и задачи:

- Дать понятие первообразной и неопределенного интеграла.
- Изучить основные свойства интеграла.

Цели и задачи:

- Изучить основные методы интегрирования: интегрирование методом замены переменной, по частям.

Вопросы лекции

1. Первообразная и неопределенный интеграл.

2. Основные свойства неопределённого интегра. 3. Интегрирование разложением, внесением под знак дифференциала.

4. Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2004. с. 340-375;

[3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004.. с. 229-275;

- *Интеграл* (от лат. integer — целый), одно из важнейших понятий математики. Оно возникло в связи с потребностью, с одной стороны, отыскивать функции по их производным.
- Например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки.

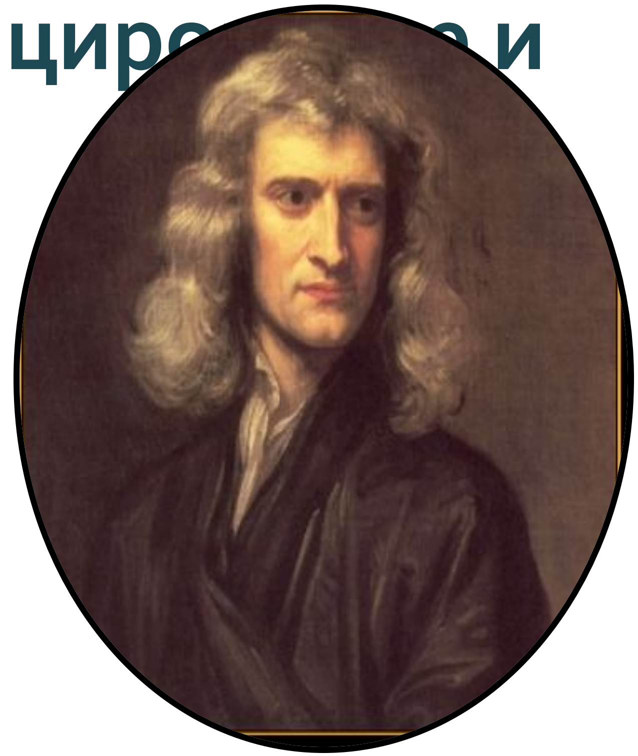
- А с другой — измерять площади, объёмы, длины дуг, работу сил за определённый промежуток времени и т. п. В соответствии с этим различают неопределённые и определённые интегралы, вычисление которых является задачей *интегрального исчисления*.

- Немецкий учёный Г. Лейбниц одновременно с английским учёным И. Ньютоном и независимо от него открыл основные принципы дифференциального и интегрального исчислений в 80-х годах XVII века.

- Теория приобрела силу после того, как Лейбницем и Ньютоном было доказано, что дифференцирование и интегрирование –

взаимно обратные

операции.



Исаак Ньютон
(1643 – 1727)

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)

Символ $\int$ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова summa).

Работы Коши и Вейерштрасса подвели итог многовековому развитию интегрального исчисления.

Огюстен Луи Коши (1789 – 1857)

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 -1897)

Работы Коши и Вейерштрасса подвели итог многовековому развитию интегрального исчисления.

Огюстен Луи Коши (1789 – 1857)

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 -1897)

Учебный вопрос.

- **Первообразная и неопределенный интеграл.**

Первообразная и неопределённый интеграл.

- **Определение.** **Функция F*(x)* называется первообразной для функции f(x) на отрезке [a; b] если во всех точках этого отрезка выполняется равенство F'(x)=f(x).**

- Пример. Найти первообразную от функции

$$f(x) = x^2$$

Из определения первообразной следует, что

$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Действительно,

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' = \frac{1}{3}\left(3x^2\right) = x^2$$

- Замечание. Задача отыскания функции по заданной производной этой функции решается, например, в инерциальных системах счисления пути самолёта. В них с помощью акселерометров определяются ускорения движения самолёта. По ускорениям вычисляются скорости, а по скоростям – пройденный самолётом путь с указанием его текущих координат.
- Замечание. Легко видеть, что если для данной функции f(x) существует первообразная, то эта первообразная не является единственной.

- **Пример.**

Рассмотрим функцию

$f(x) = x^2$ и найдём её первообразные.

- Решение. Первообразные

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 \qquad F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1 \qquad F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$$

- **Теорема.** Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то любая первообразная для $f(x)$ имеет вид $Ф(x)=F(x)+C$, где $C=const$.

- **Доказательство**. В силу определения первообразной : F’(x)=f(x). Пусть Ф(x) – другая первообразная, тогда Ф’(x)=f(x). Рассмотрим функцию .

Найдём

$$\varphi'(x) = \left(F(x) - \Phi(x)\right)' = F'(x) - \Phi'(x) =$$

$$= f(x) - f(x) = 0$$

Таким образом, производная равная нулю. Такое возможно лишь если , $\varphi(x) = C$

Следовательно, $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x) = C$

откуда $F(x) = \Phi(x) + C$

▲

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x) = \Phi(x) + C$ для функции f(x) на некотором интервале называется ***неопределённым интегралом*** от функции f(x) на этом интервале и обозначается

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

где $\int$ - знак интеграла,

$f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение,

- подынтегральная функция.

- **Пример.** $$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

Проверим результат:

$$\left(\sin x + C\right)' = \cos x$$

- **Отыскание всех первообразных для данной функции или одной из них называется *интегрированием.***
- ***Интегрирование*** **– есть действие, обратное дифференцированию. С геометрической точки зрения неопределённый интеграл представляет совокупность (семейство) *интегральных кривых .***

- Естественно возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существуют первообразные, а значит и неопределённый интеграл?

  На этот вопрос отвечает теорема существования неопределённого интеграла, которую мы примем без доказательства.

- **Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, то для неё на этом интервале существует первообразная, то есть неопределённый интеграл.**

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС,

- **Основные свойства неопределённого интеграла.**

Основные свойства неопределённого интеграла.

- **1.** Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: если $F'(x) = f(x)$,

то

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$$

- **2.** Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

- **3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции, плюс произвольная постоянная**

$$\int d\left(F\left(x\right)\right)=F\left(x\right)+C$$

Справедливость последующего равенства легко проверить дифференцированием (дифференциалы от обеих частей равенства равны

$$d\left(F\left(x\right)\right)$$

- 4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых

$$\int (f(x) \pm g(x))dx =$$
$$= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

- 5. Числовой множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx$$

6. Свойство инвариантности (постоянства) формул интегрирования.

- Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции,
- т.е., если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

Доказательство.

Возьмём функцию $F(u)=F(\varphi(x))$;

для её дифференциала в силу теоремы об инвариантности вида первого дифференциала имеем:

$$d(F(u))=F'(u)du=f(u)du$$

отсюда

$$\int f(u)du=\int dF(u)=F(u)+C$$

▲

7.

$$\int f(kx \pm b)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx \pm b) + C$$

Установить соответствие между функциями и первообразными.

1. $f(x) = x^n$

2. $f(x) = C$

3. $f(x)=\sin x$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

5. $f(x) =\cos x$

6. $f(x)= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

а. $F(x) = Cx+C_1$

б. $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

в. $F(x) = \mathrm{tg}\, x+C$

г. $F(x) = \sin x+C$

д. $F(x) = \mathrm{ctg}\, x+C$

е. $F(x) = -\cos x+C$

Таблица основных интегралов (через u(x)!)

1. $\int u^{\alpha} dx = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

3. $\int \sin u \, dx = -\cos u + C$

4. $\int \cos u \, dx = \sin u + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 u} = tg\, u + C$

6. $$\int \frac{dx}{\sin^2 u} = -ctgu + C$$

7. $$\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$$

8. $$\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$$

9. $$\int e^u du = e^u + C$$

10. $$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

11. $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$$

12. $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$$

13. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

14. $$\int \frac{dx}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

15. $$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\,\frac{u}{2}\right| + C$$

16. $$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

- **Замечание.** Таблица основных интегралов в силу свойства инвариантности формул интегрирования оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией от неё.

- **Пример.**

$$\int \sin(5x)dx = \int \sin(5x)\frac{5}{5}dx = \int \sin(5x)\frac{1}{5}d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5}\int \sin(5x)d(5x) = \begin{vmatrix} 5x = t \\ d(5x) = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\int \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos(5x) + C$$

Пример $\int\left(\frac{4}{\cos^2 x} + x^3 - 3\sqrt{x}\right)dx$

$$4\int\frac{1}{cos^2x}dx + \int x^3dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$4\int\frac{1}{cos^2x}dx + \int x^3dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$4\int\frac{1}{cos^2x}dx + \int x^3dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

Найти интегралы для функций:

1) $f(x) = 10x$

$F(x) = 5x^2 + C$

2) $f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 + C$

3) $f(x) = \sin x + 5$

$F(x) = -\cos x + 5x + C$

4) $f(x) = 5\cos x$

$F(x) = 5\sin x + C$

5) $f(x) = 6x^2$

$F(x) = 2x^3 + C$

6) $f(x) = 3 - 2x$

$F(x) = 3x - x^2 + C$

Верно ли что:

а)

$$\int x^5 dx = 5x^4 + C$$

в)

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

б)

$$\int 3x^2 dx = 6x + C$$

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

Интегрирование разложением, внесением под знак дифференциала.

Непосредственное интегрирование - **вычисление интеграла с помощью**

- **его свойств,**
- **тождественных преобразований подынтегральной функции,**
- **таблицы основных интегралов.**

Использование при этом свойства линейности неопределённого интеграла называется *методом разложения* вычисления интеграла.

Таблица основных интегралов в силу свойства инвариантности формул интегрирования оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией.

Например,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 5x} = \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{\sin^2 5x} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x)}{\sin^2 5x} = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x + C$$

Найти интеграл $\int \frac{2x^3 - xe^x - 4}{x} dx.$

Решение:

$$\int \frac{2x^3 - xe^x - 4}{x} dx = \int \left(2x^2 - e^x - \frac{4}{x} \right) dx =$$

$$= 2\int x^2 dx - \int e^x dx - 4\int \frac{dx}{x} = \frac{2}{3}x^3 - e^x - 4\ln|x| + C.$$

Интегрирование внесением под знак дифференциала.

Известно, что дифференциал функции равен произведению производной этой функции и дифференциала её аргумента:

$$\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$$

Переход в этом равенстве слева направо называют *подведением множителя* $\varphi'(x)$ *под знак дифференциала.*

Таблица дифференциалов

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx,$$

$$d(a^x) = a^x \ln a \, dx,$$

$$d(e^x) = e^x dx,$$

$$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a},$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x},$$

$$d(\sin x) = \cos x \, dx,$$

$$d(\cos x) = - \sin x \, dx,$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$\left.\begin{matrix} d(\arcsin x) \\ -d(\arccos x) \end{matrix}\right\} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\left.\begin{matrix} d(\operatorname{arctg} x) \\ -d(\operatorname{arcctg} x) \end{matrix}\right\} = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx.$$

Подводя в этом интеграле множитель $\varphi'\left(x\right)$ под знак дифференциала, а затем используя свойство инвариантности формул интегрирования, получим

$$\boxed{\begin{gathered}\int f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx=\int f\left(\varphi\left(x\right)\right)d\left(\varphi\left(x\right)\right)=F\left(\varphi\left(x\right)\right)+C,\\ \text{если}\qquad \int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C.\end{gathered}}$$

Метод интегрирования введением под знак дифференциала используется для интегрирования сложных функций:

- аргумент сложной функции записывается под знак дифференциала;
- затем необходимо разделить подынтегральное выражение на производную этого аргумента.

Пример. **Найти интеграл** $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$.

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^5} = \int (2x-3)^{-5}\,dx = \int \frac{(2x-3)^{-5}\,d(2x-3)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x-3)^{-5}\,d(2x-3).$$

Здесь подынтегральное выражение разделено на 2, так как $d(2x-3) = 2dx,$

$$dx = \frac{d(2x-3)}{2}.$$

Теперь используем свойство инвариантности и применим формулу 1 таблицы относительно переменной интегрирования 2х – 3.

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{-4}}{-4} + C = C - \frac{1}{8(2x-3)^4}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\int f(ax \pm b)dx = \frac{1}{a}F(ax \pm b) + C, \quad где \ F'(x) = f(x)}$$

Примеры.

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}} dx$$

Внести функции под знак дифференциала

1.f(x) = x^n

2.f(x) = C

3.f(x)=sinx

4.f(x) = $\frac{1}{\cos^2 x}$

5.f(x) =cosx

6.f(x)= $-\frac{1}{\sin^2 x}$

1. F(x) =Cx+C1

2. F(x) = $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

3. F(x) =tg x+C

4. F(x) = sin x+C

5. F(x) = ctg x+C

6. F(x) = - cos x+C

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

Замена переменной или подстановка.

Метод заключается во введении новой переменной интегрирования.

При этом интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки).

Общих методов подбора подстановок не существует.

Введём в интеграле $\int f(x)dx$ новую переменную *t*, положив *x=φ(t)*, где *φ(t)* – непрерывная, дифференцируемая функция. Тогда *dx=φ'(t) dt* и справедливо равенство

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

Это формула замены переменной или метода подстановки. После этого получим новый интеграл, который проще приводится к табличному.

Доказательство.
Находим производную от левой части равенства

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x).$$

Правую часть равенства будем дифференцировать по *x* как сложную функцию, где *t* – промежуточный аргумент, при этом

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$$

и по правилу дифференцирования обратной функции

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

Таким образом, имеем

$$\left(\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f\big(\varphi(t)\big) = f(x)$$

Следовательно, производные по *x* от правой и левой частей равенства равны, что и требовалось доказать. ▲

Замечание 1. После интегрирования в правой части равенства вместо t необходимо подставить его выражение через x на основании равенства $x=\varphi(t)$.

Замечание 2. При замене переменной функцию $x=\varphi(t)$ надо подбирать так, чтобы новый интеграл стал проще.

Замечание 3. При интегрировании иногда целесообразно подбирать замену переменной не в виде $x=\varphi(t)$, а в виде $t=\psi(x)$.

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.

Найти интеграл $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.

Решение.

Выделяем полный квадрат из подкоренного выражения.

$$8-2x-x^2=-\left(x^2+2x-8\right)=-(x^2+2x+1-9)=$$

$$=-\left[(x+1)^2-9\right]=9-(x+1)^2.$$

Теперь сделаем замену переменной $x+1=t$. $dx=dt$.

$$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}=\int \frac{t-1-3}{\sqrt{9-t^2}}dt=\int \frac{t-4}{\sqrt{9-t^2}}dt=$$

$$=\int \frac{tdt}{\sqrt{9-t^2}}-4\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(9-t^2\right)}{\sqrt{9-t^2}}-4\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{9-t^2}-4\arcsin\frac{t}{3}+C.$$

Возвращаясь к старой переменной и учитывая, что $9-t^2=8-2x-x^2$, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}=-\sqrt{8-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Задание на самостоятельную работу

- [1] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2004, с. 340-375.
- [3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004, с. 229-250.
- **Выучить таблицу основных интегралов.**

Математика ППИ

Лекция 12.

Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование тригонометрических функций

Вопросы лекции

1. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

2. Интегрирование тригонометрических функций.

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

Интегрирование по частям.

Одной из причин сложности операции интегрирования является отсутствие формулы интегрирования произведения функций.

Есть метод интегрирования произведения некоторых классов функций, который называется *методом интегрирования по частям.*

Выведем формулу интегрирования по частям.

Пусть *u=u(x)* и *v=v(x)* – дифференцируемые функции и

$$d\left(u \cdot v\right) = udv + vdu$$

Отсюда, интегрируя последнее равенство, получаем:

$$u \cdot v = \int udv + \int vdu$$

или $$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

формулой интегрирования по частям.

Успех формулы интегрирования по частям зависит от умения правильно разбить подынтегральное выражение на множители *u* и *dv*.

Как правило, за *u* выбирается функция, которая при дифференцировании упрощается.

Иногда необходимо применять интегрирование по частям последовательно несколько раз.

Укажем некоторые часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

I. Интегралы вида:

$$\int P(x)\ln x dx, \quad \int P(x)\log_a x dx, \quad \int P(x)\arcsin x\, dx, \quad \int P(x)\arccos x dx,$$

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x dx, \quad \int P(x)\operatorname{arcctg} x dx,$$

где *P(x)* – многочлен.
Во всех случаях за u при интегрировании по частям применяют функцию, являющуюся множителем после *P(x)*.

$$\int P(x)e^{kx}dx, \quad \int P(x)a^{kx}dx, \quad \int P(x)\sin kx\,dx, \quad \int P(x)\cos kx\,dx,$$

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}} dx$$

Решение. (опечатка в du)

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}} dx$$

v

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}} dx$$

Контрольные вопросы:

- 1. В чем заключается метод непосредственного интегрирования ?
- 2. В чем заключается метод интегрирования заменой?
- 3. В чем заключается метод интегрирования по частям?