Дисциплина:

Математика

- Лектор: Ахкамова Юлия Абдулловна
- доцент кафедры математики и методики обучения математике ЮУрГГПУ
- akhkamovayua@cspu.ru

ЛЕКЦИЯ № 18

Основные формулы комбинаторики. Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ:

1. Правило сложения и правило произведения комбинаторики.
2. Основные формулы комбинаторики (перестановки, размещения, сочетания)

Примеры решения задач .

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ:

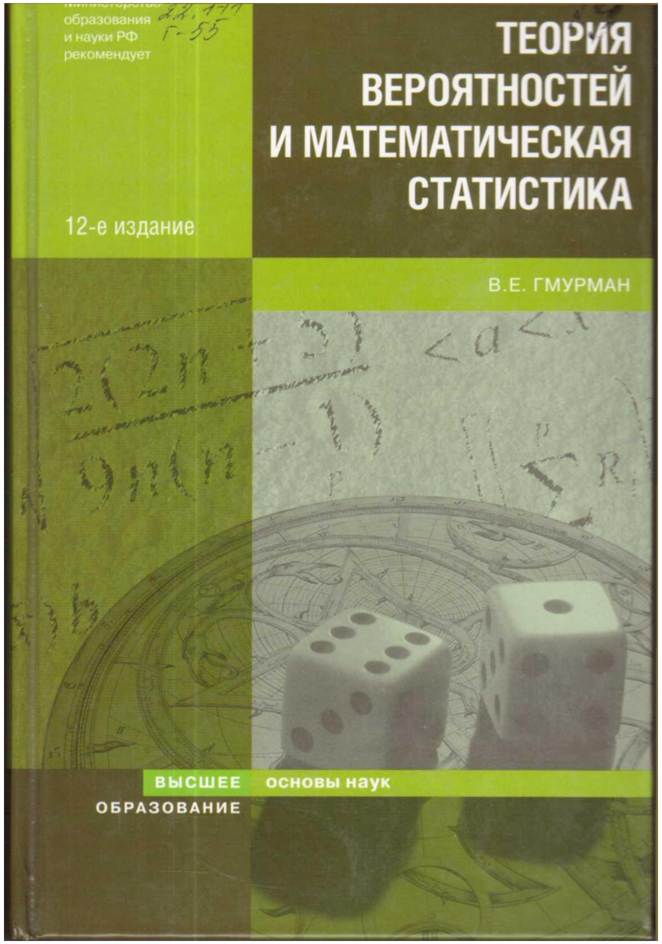
- 3.Теоремы сложения вероятностей.
- 4.Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

- Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении.
- Баврин И.И. Высшая математика.
- Данко П.Е., Попов А.Г и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть II.

ЛИТЕРАТУРА

- Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, Высшее образование, 2009.



ЛИТЕРАТУРА

- Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшее образование. 2007.

Основные понятия комбинаторики

- **Пусть задана некоторая конечная совокупность различных элементов, которую будем называть <u>генеральной совокупностью</u>.**
- **Любой конечный набор, даже повторяющихся, элементов генеральной совокупности будем называть <u>выборкой</u>. Количество элементов, составляющих выборку, назовем ее объемом.**

- **Задачами поиска <u>количества (числа) всех выборок заданного объема</u>, составленных из элементов данной генеральной совокупности, <u>удовлетворяющих определенным условиям</u>,**
- **занимается раздел дискретной математики - комбинаторика.**

Учебный вопрос.

- Правила сложения и произведения комбинаторики.

- **Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.**
- *При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. То есть в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.*

Правило сложения

- **Если некоторое событие A может появиться n способами, а событие B – k способами, то событие *А или В* может появиться n+k способами.**

Правило произведения

- **Если некоторое событие A может появиться n способами, а событие B – k способами, то событие *А и В* может**
- **появиться $n \cdot k$ способами.**
- **Эти правила легко обобщаются на любое конечное число событий.**

Задача 1.

- **На завтрак в буфете Вова может выбрать плюшку, бутерброд, пряник или кекс, а запить может чаем, соком, ряженкой. Из скольки вариантов завтрака может Вова выбирать?**

Ответ к задаче 1.

Правило сложения

- **Если некоторое событие *A* может появиться *n* способами, а событие *B* – *k* способами, то событие *A или B* может появиться n+k способами.**

Правило произведения

- **Если некоторое событие *A* может появиться *n* способами, а событие *B* – *k* способами, то событие *A и B* может**
- **появиться $n \cdot k$ способами.**
- **Эти правила легко обобщаются на любое конечное число событий.**

- **В зависимости от условий, которым подчиняются элементы выборки, обычно рассматриваются два способа выбора элементов: с повторением, без повторения.**

- Выборка элементов множества называется <u>упорядоченной выборкой</u>, если учитывается не только состав выборки, но и <u>порядок следования ее элементов</u>.
- В противном случае выборка считается неупорядоченной.

- *На практике не всегда возможно и удобно выписывать все выборки, чтобы определить их число, поэтому запишем формулы, позволяющие определять число различных выборок элементов множества.*

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС.

- Основные формулы комбинаторики (перестановки, размещения, сочетания)

Введем обозначение:

- **Правило сложения**
- **Если некоторое событие A может появиться n способами, а событие B – k способами, то событие A *или* B может появиться n+k способами.**
- **Правило произведения**
- **Если некоторое событие A может появиться n способами, а событие B – k способами, то событие A *и* B может**
- **появиться $n \cdot k$ способами.**
- **Эти правила легко обобщаются на любое конечное число событий.**

- Пусть задано множество, состоящее из n элементов.

Размещения.

- Всякая упорядоченная выборка без возвращений, состоящая из k элементов множества, называется **размещением без повторений** из n элементов по k.
- ***Число размещений*** *вычисляется по формуле*

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Задание

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Правило сложения**
- **Если некоторое событие *A* может появиться *n* способами, а событие *B* – *k* способами, то событие *A или B* может появиться n+k способами.**

$$A_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 6\cdot 7 = 42$$

- **Правило произведения**
- **Если некоторое событие *A* может появиться *n* способами, а событие *B* – *k* способами, то событие *A и B* может**
- **появиться $n \cdot k$ способами.**
- **Эти правила легко обобщаются на любое конечное число событий.**

Ответ к заданию Вычислим число размещений

- б)в)

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} =$$

$$= 6\cdot 7\cdot 8 = 336$$

$$A_{10}^8 = \frac{10!}{(10-8)!} = \frac{10!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2} =$$

$$= 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 1814400$$

Задача 2.

- **Собрание по важному вопросу избрало комиссию, в состав вошли 8 человек. Члены счетной комиссии должны распределить обязанности председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами можно распределить обязанности?**

Ответ к задаче 2.

- **Собрание по важному вопросу избрало комиссию, в состав вошли 8 человек.Члены счетной комиссии должны распределить обязанности председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами можно распределить обязанности? По правилу произведения или по формуле**

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} =$$

$$= 6\cdot 7\cdot 8 = 336$$

Размещения с повторениями

- **Всякая упорядоченная с возвращением выборка, состоящая из *k* элементов множества, причем каждый элемент множества может повториться в выборке до *k* раз, называется <u>размещением с повторением</u> из *n* элементов по *k*.**
- ***<u>Число всех размещений</u> с повторениями***

$$\widetilde{A}_n^k = n^k$$

Задача 3

- **В коридоре висят три лампочки, каждая независимо от другой может быть включена или выключена. Сколько имеется различных способов освещения (и неосвещения) коридора?**

Ответ к задаче 3

- В коридоре висят три лампочки, каждая независимо от другой может быть включена или выключена. Сколько имеется различных способов освещения (и неосвещения) коридора?
- Решение ---,+++,+--,-+-,--+,++-,-++,+-+.
- Или по формуле $\widetilde{A}_n^k = n^k$

$$\widetilde{A}_2^3 = 2^3 = 8$$

Перестановки

- **Размещения из *n* элементов по *n* называются перестановками из *n* элементов.**
- **Число перестановок из *n* элементов вычисляется по формуле**

$$\boxed{P_n = n!}$$

Задача 4

- **Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?**

Ответ к задаче 4

- **Правило сложения**
- **Если некоторое событие A может появиться n способами, а событие B – k способами, то событие *A или B* может появиться n+k способами.**
- **Правило произведения**
- **Если некоторое событие A может появиться n способами, а событие B – k способами, то событие *A и B* может**
- **появиться $n \cdot k$ способами.**
- **Эти правила легко обобщаются на любое конечное число событий.**

Задача 5.

Сколькими способами можно расставить 9 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение:

Если обозначить 4 определенные книги как одно целое, то получается 6 книг, которые можно переставлять способами.4 определенные книги можно переставлять

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$ способами.

Тогда всего перестановок по правилу умножения будет

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280.$$

Перестановки с повторениями

- **Всякая упорядоченная с возвращением выборка, в которую 1-ый элемент множества входит k_1 раз, 2-ой – k_2 раз, *n*-ый – k_n раз, называется перестановкой с повторением из *n* элементов.**
- ***Число всех перестановок с повторениями при условии, что*** $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$

$$\widetilde{P}_{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Задача 6

- **Сколько существует различных шестизначных чисел, в которых цифра «3» повторяется один раз, цифра «1»- два раза, цифра «5» – три раза?**

Ответ к задаче 6

- Сколько существует различных шестизначных чисел, в которых цифра «3» повторяется один раз, цифра «1»- два раза, цифра «5» – три раза?

$$\widetilde{P}_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$$

$$\widetilde{P}_{1,2,3} = \frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = \frac{6!}{2\cdot 6} = \frac{720}{2\cdot 6} = 60$$

Сочетания

- **Всякая неупорядоченная без возвращения выборка, состоящая из *k* элементов множества, называется сочетанием из *n* элементов по *k*.**
- ***Число сочетаний вычисляется по формуле***

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Задача 7.

Пусть имеется множество, содержащие 4 буквы: {А,В,С,Д}. Записать все возможные сочетания из указанных букв по три.

Решение:

Здесь в число сочетаний не включены, например АВС, ВСА, т.к. у нас уже есть АВС, потому что порядок элементов в сочетании не учитываются.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Задача 8.
Нужно выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся книг. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: $C_{10}^{4} = \dfrac{10!}{4!(10-4)!} = \dfrac{10!}{4!\cdot 6!} = 210.$

Задача 9.
Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

Решение: $7_{ш} = 3_{ч} + 4_{б}$ Белые шары: $C_{10}^{4} = \dfrac{10!}{4!\cdot 6!} = 210.$

Черные шары: $C_{5}^{3} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = 10.$ Тогда $C_{10}^{4} \cdot C_{5}^{3} = 20 \cdot 10 = 2100$

Задача 10.

Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на 2 подгруппы, в одной из которых должно быть не более 5, а во второй – не более 9 человек?

Решение:

Первая подгруппа может состоять либо из 3, либо из 4, либо из 5 человек: вычислим

C_{12}^{3}, C_{12}^{4}, C_{12}^{5}.

Имеем $C_{12}^{3}+C_{12}^{4}+C_{12}^{5}=1507$

Сочетания с повторениями

- **Всякая неупорядоченная с возвращениями выборка, состоящая из *k* элементов множества, называется сочетанием с повторением из *n* элементов по *k*.**
- **Число всех сочетаний с повторениями**

$$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Задача 11.

- В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами
- можно купить 9 пирожных?

В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

Решение. В задаче требуется найти число всевозможных групп по 9 элементов, которы
можно

составить из данных трех различных элементов, причем указанные элементы в каждой

группе могут повторяться, а сами группы отличаются друг от друга хотя бы одним
элементом.

Это задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из трех элементов по девять.

Следовательно,

$$\overline{C}_3^9 = C_{11}^9 = C_{11}^2 = \frac{11\cdot 10}{2!} = 55.$$

Вывод по формулам комбинаторики

ВЫБОРКА	Без повторения	С повторением
УПОРЯДОЧЕННАЯ	Число размещений $$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$	Число размещений с повторением $$\widetilde{A}_n^k = n^k$$
НЕУПОРЯДОЧЕННАЯ	Число сочетаний $$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$	Число сочетаний с повторением $$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

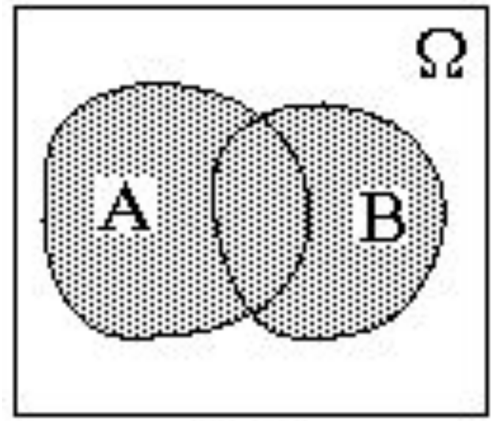
- Выучить определения и формулы размещения, сочетания без повторений, с повторениями.
- **Баврин И.И. Высшая математика,2007. С. 515-516.**
- **Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении, 2003. С.220-221.**

- <u>**Учебный вопрос.**</u>

Теоремы сложения вероятностей.

- **Суммой** нескольких событий называется событие, состоящие в наступлении в результате испытания хотя бы одного из этих событий.

$$A + B, A \cup B, \quad A \text{ или } B$$



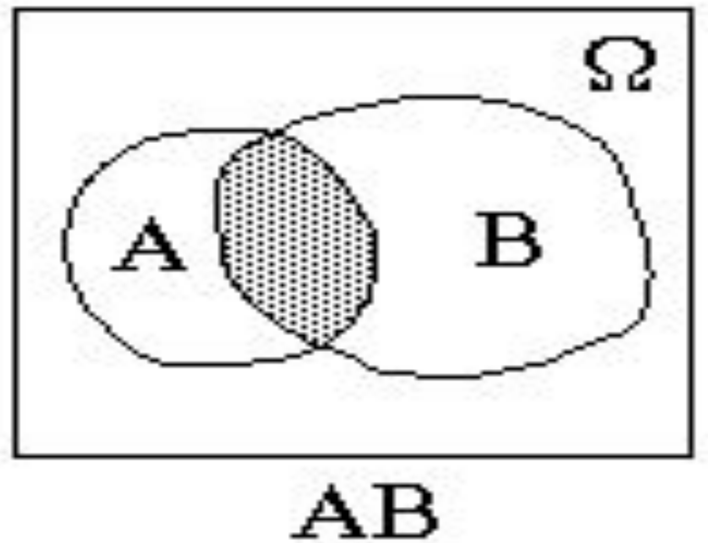
A+B

- Пусть А - идет дождь, а В - идет снег, то (А + В) - либо дождь, либо снег, либо дождь со снегом, т. е. осадки;

- Ω – пространство элементарных исходов испытания.

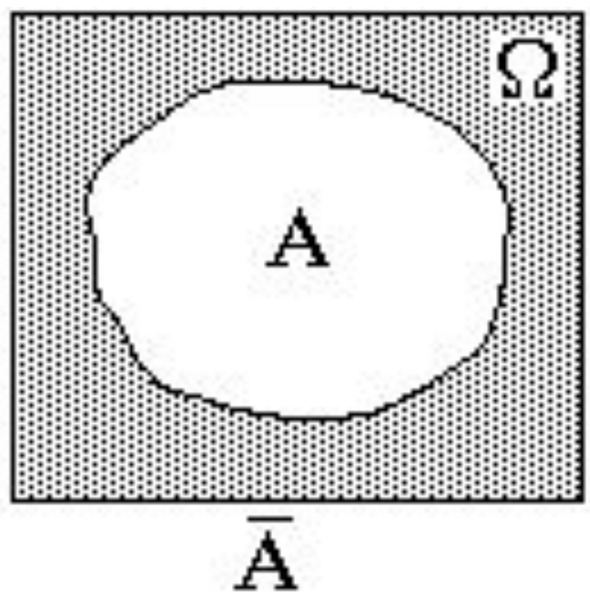
- **Произведением** **нескольких событий называется событие, состоящие в совместном наступлении в результате испытания всех этих событий.**

$$A \cdot B,\ A \cap B,\ A\ и\ B$$

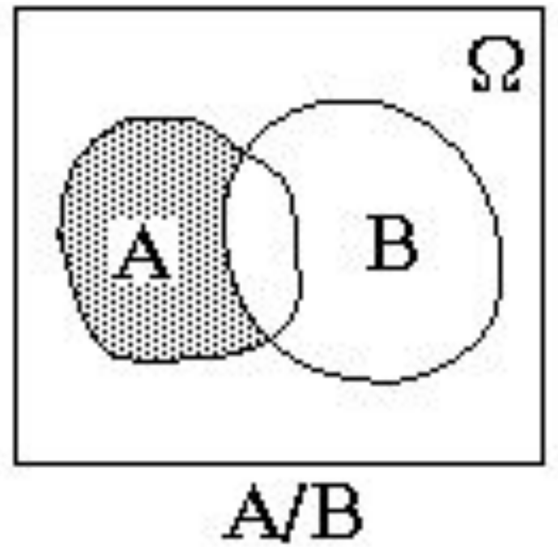


- Пусть события: А – «из колоды карт вынута дама», В – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Значит, А·В означает «вынута дама пик».

Противоположное событие $\bar{A}$ (по отношению к рассматриваемому событию А) – это событие, которое происходит, если не происходит событие А.



- **Разностью** событий A и B называется событие A\B, которое состоит в том, что происходит событие A, но не происходит событие B.



- **Теорема 1 сложения вероятностей.**

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

- **Следствие.**

Если события образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$P(A_1)+\ldots+P(A_n)=1.$$

В частности,

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

- **Пример.** Контрольная работа состоит из трех задач по алгебре и трех по геометрии. Вероятность правильно решить задачу по алгебре равна 0,8, а по геометрии - 0,6. Какова вероятность правильно решить все три задачи хотя бы по одному из предметов?
- Решение.

Обозначим через А событие – правильно решены все три задачи по алгебре; через В – правильно решены все три задачи по геометрии.

Тогда событие - правильно решены все три задачи хотя бы по одному из предметов – записывается как А + В.

Так как события А и В несовместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Найдем вероятности событий А и В.

$P(A) = 0{,}8^3 = 0{,}512$;

$P(B) = 0{,}6^3 = 0{,}216$.

Следовательно, $P(A+B) = 0{,}512 + 0{,}216 = 0{,}728$.

- **Теорема 2 сложения вероятностей.**

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

- **Расширенная теорема сложения**

P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)-P(ABC).

- Пример. Из 25 студентов группы 10 человек занимаются сноубордом, 5 – горными лыжами, 5 - сноубордом и горными лыжами, а остальные - другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только горными лыжами или только сноубордом?
- Решение.

- **Обозначим через А событие – выбранный спортсмен занимается только горными лыжами; через В – выбранный спортсмен занимается только сноубордом.**
- **Тогда событие - наудачу выбранный спортсмен занимается только горными лыжами или только сноубордом можно записать как А + В.**
- **Так как события А и В совместны, то**

Р(А+В) = Р(А) + Р(В) – Р(АВ).

- **Найдем вероятности событий А, В и АВ.**

Итак, Р(А)=5/25=0,2; Р(В)=10/25=0,4; Р(АВ)=5/25=0,2 .

- **Следовательно, Р(А+В)=0,2+0,4–0,2=0,4.**

- **Определение.** Событие А называется **независимым** от события В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет.
- **Определение.** Два события называются **зависимыми**, если появление одного из них изменяет вероятность появления другого.

- **Учебный вопрос.**

Условная вероятность.

Теоремы умножения вероятностей.

- **Определение.** Вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А произошло, называется **условной вероятностью** события В.

- **Обозначается $P_A(B)$ или P(B/A).**
- **По определению**

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **Теорема умножения вероятностей.** Вероятность появления двух событий равна произведению вероятности наступления одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A) \quad \text{или}$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$$

- В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что все предыдущие события уже совершились

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

- Если события независимые, то **теорема умножения вероятностей** принимает вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

- **Пример.** Из 25 билетов студент выучил 20. Какова вероятность того, что он вытянет счастливый билет, который знает, если он вытягивает билет:

  а) первым; б) вторым.
- **Решение.**
- **а) P= 20/25=4/5.**
- **б) обозначим события:**

A – первый студент вынул «счастливый» билет,
B – второй студент вынул «счастливый» билет.

$$P(B) = P(AB + \overline{A}B) = P(A) \cdot P(B / A) + P(\overline{A}) \cdot P(B / \overline{A}) =$$

$$= \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть $A_1,\ldots,A_n$ – независимые события.
Событие A – наступило хотя бы одно из A_i, $A=A_1+\ldots+A_n$.
Если A_i несовместны, то
$P(A)=P(A_1+\ldots+A_n)=P(A_1)+\ldots+P(A_n)$.
Если A_i совместны, то рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$ - ни одно из A_i не наступило, $\overline{A}=\overline{A}_1\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n$

Тогда

$$\boxed{P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n)}$$

- **Пример.** Пусть S — множество всех исходов при трехкратном бросании монеты. Обозначим через A событие «в первый раз выпал герб», через B событие «выпало не менее двух гербов». Найдите вероятности событий P(A), P(B) и P(AB), если все исходы бросаний равновероятны. Независимы ли эти события?
- Решение.

Общее число исходов $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Число исходов, благоприятствующих событию A, $m = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Итак, $P(A) = 4/8=0,5$.

Исходы, благоприятствующие событию B – (Г,Г,Р); (Г,Р,Г); (Р,Г,Г); (Г,Г,Г), следовательно, $m = 4$.
Таким образом, $P(B) = 4/8=0,5$.

Исходы, благоприятствующие событию AB – (Г,Г,Р); (Г,Р,Г); (Г,Г,Г), следовательно, $m = 3$.
Таким образом, $P(AB) =3/8$.

Если события A и B независимы, то выполняется равенство
$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Имеем $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,5=0,25$ и это не совпадает с вероятностью события AB, значит, события A и B зависимы.

- **Пример.** Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,9, второго - 0,75. Какова вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель?
- Решение.

Обозначим через A_i событие – i-ый стрелок попадет в цель;

противоположное событие $\overline{A_i}$ - i-ый стрелок не попадет в цель, i =1, 2.

Тогда событие - хотя бы один стрелок попадет в цель $A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2$

$P(A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2)$ = P(A_1) P($\overline{A}_2$)+P($\overline{A}_1$) P(A_2)+ P(A_1) P(A_2).

По условию задачи P(A_1)= 0,9; P(A_2)= 0,75.

Тогда P($\overline{A}_1$) = 1 - 0,9 = 0,1;

P($\overline{A}_2$) = 1 - 0,75 = 0,25.

Таким образом,

$P(A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2) = 0,9 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,75 + 0,9 \cdot 0,75 =$

$= 0,225 + 0,075 + 0,675 = 0,975.$

Или P = 1 – P($\overline{A}_1$) P($\overline{A}_2$) = 1 – 0,1· 0,25 = 1- 0,025 = 0,975.

Задание на самоподготовку

- **Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, Высшее образование,2009, с. 30-51.**