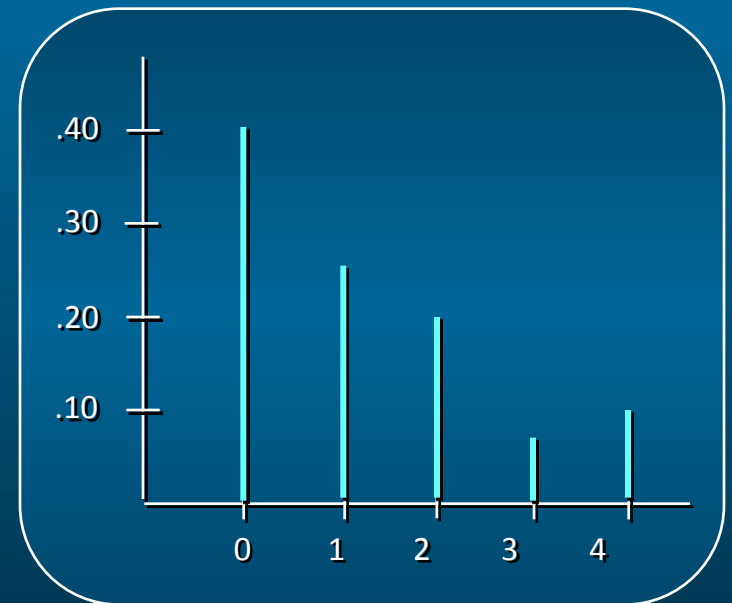


# Модуль 1, Лекція 5

## Числові характеристики ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН



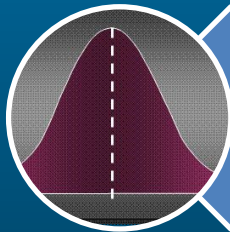
# План



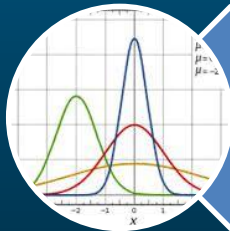
Математичне сподівання та його властивості.



Дисперсія, середнє квадратичне відхилення та їх властивості.



Мода і медіана та їх властивості.



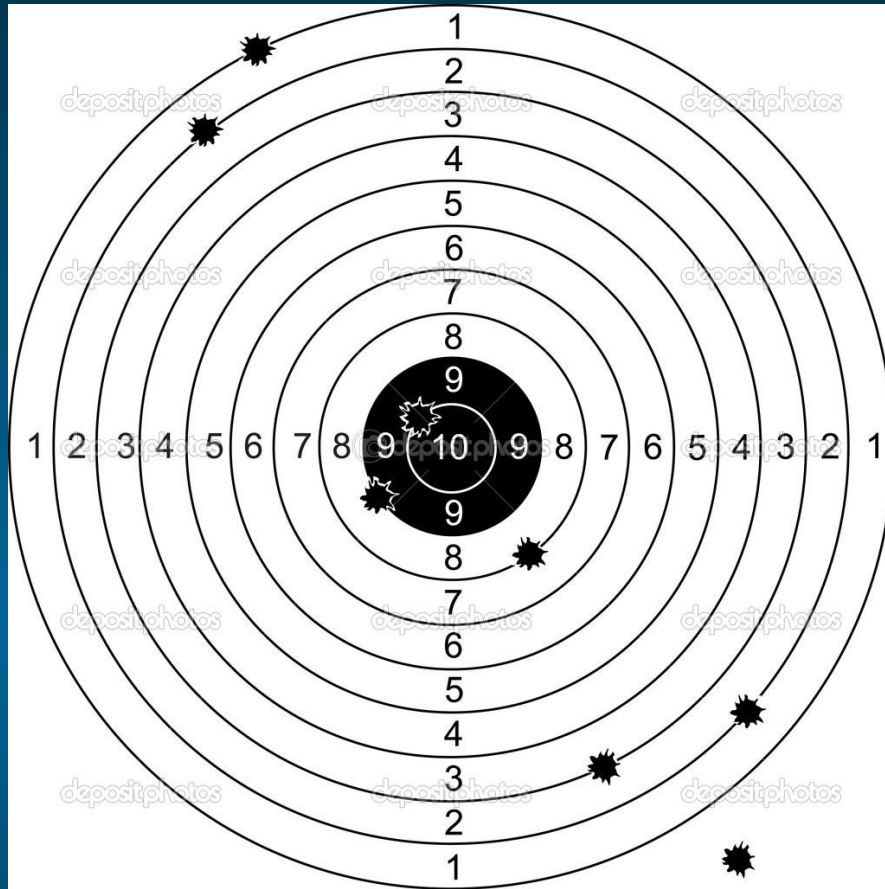
Початкові і центральні моменти; асиметрія, ексцес та їх властивості.

# Числові характеристики

Закон розподілу ймовірностей дає повну інформацію про випадкові величини.

Але часто достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки.

Характеристики, що виражають в стислій формі найістотніші особливості закону розподілу випадкової величини, називаються числовими характеристиками випадкової величини.



$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_i$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$



# Математичне сподівання

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини  $X$ , називається ряд

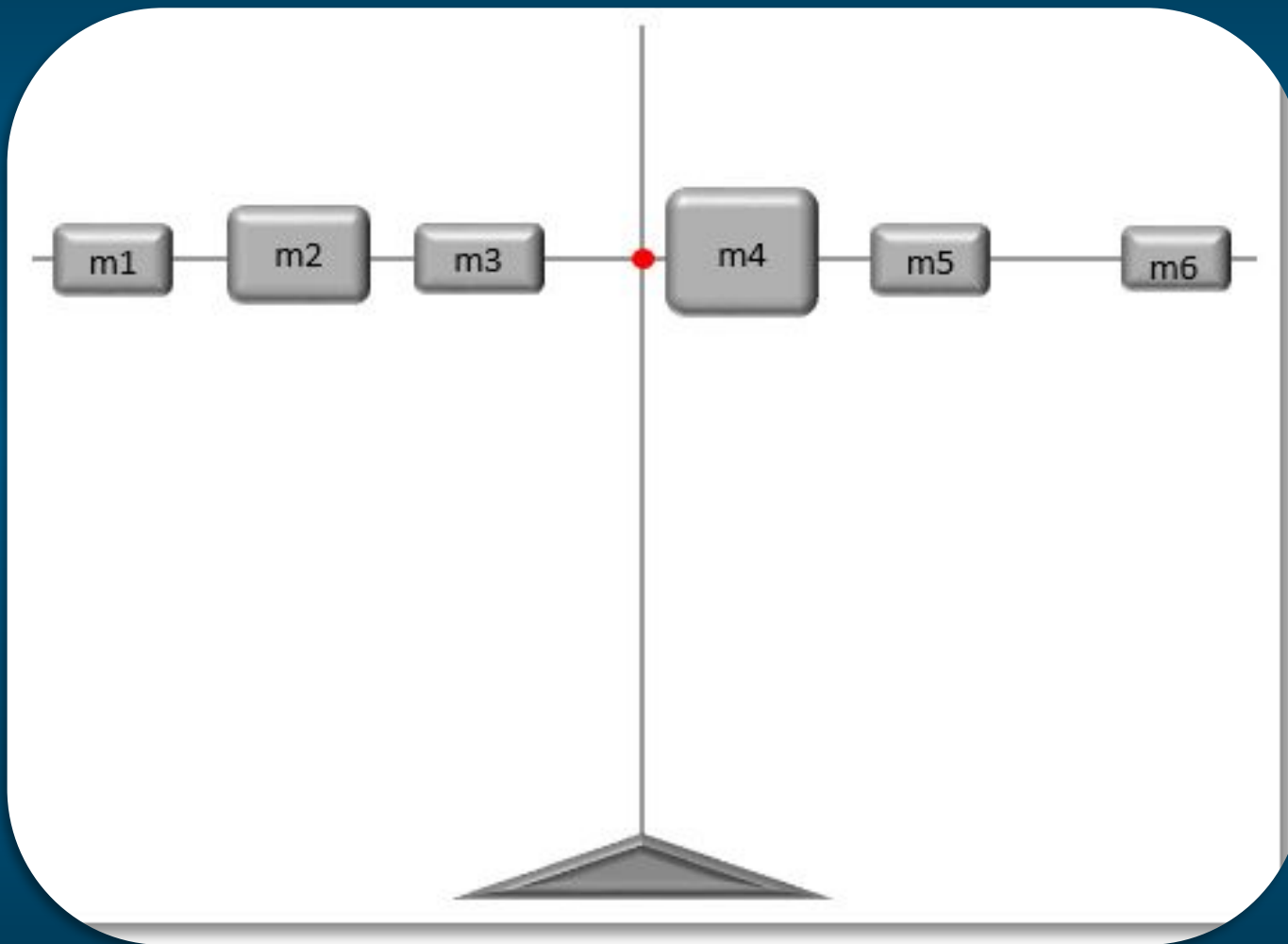
$$M(X) = \sum x_i p_i$$

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини  $X$ , називається інтеграл

$$M(X) = \int x f(x) dx$$

Термін «математичне сподівання» випадкової величини  $X$  є синонімом терміна «середнє значення» цієї величини.

# Математичне сподівання



# Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання від сталої величини  $C$

дорівнює самі

$$M(C) = C$$

2.

$$M(CX) = CM(X)$$

3.

$$M(AX+B) = AM(X)+B$$



# Приклад 1.

Закони розподілу випадкових величин  $X$  і  $Y$  задані таблицями:

$x_i$	- 0,5	- 0,1	0,1	0,5
$p_i$	0,4	0,1	0,1	0,4

$y_j$	- 100	- 80	- 10	10	10	80
$p_j$	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

$$\begin{aligned}M(X) &= \sum_{s=1}^4 x_s p_s = -0,5 \cdot 0,4 - 0,1 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,4 = \\ &= -0,2 - 0,01 + 0,01 + 0,2 = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(Y) &= \sum_{j=1}^6 y_j p_j = -100 \cdot 0,1 - 80 \cdot 0,2 - 10 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,2 + 80 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,1 = \\ &= -10 - 16 - 2 + 2 + 16 + 10 = 0.\end{aligned}$$

# Дисперсія та середнє квадратичне

Математичне сподівання не дає повної інформації про випадкову величину – воно не характеризує міру розсіювання.

Математичне сподівання ще називають центром розсіювання.

Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають дисперсією.

# Дисперсія

Для визначення дисперсії розглянемо відхилення

випадкової величини  $X$  від її математичного сподівання

$$X - M(X)$$

Математичне сподівання такого відхилення випадкової величини  $X$  завжди дорівнює нулю:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$$

Отже, відхилення не може бути мірою розсіювання випадкової величини.

# Дисперсія

Дисперсією випадкової величини  $X$  називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Для дискретної випадкової величини  $X$ :

$$D(X) = \sum (x_i - M(X))^2 p_i$$

Для неперервної випадкової величини  $X$ :

$$D(X) = \int (x - M(X))^2 f(x) dx$$

# Властивості дисперсії

1.

$$D(C) = 0$$

2.

$$D(CX) = C^2D(X)$$

3.

$$D(AX+B) = A^2D(X)$$

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C) = M(0) = 0$$

$$\begin{aligned} D(AX+B) &= M(AX+B - M(AX+B))^2 = \\ &= M(AX+B - AM(X) - B)^2 = M(AX - AM(X))^2 = \\ &= A^2M(X - M(X))^2 = A^2D(X) \end{aligned}$$

# Властивості дисперсії

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2M(X)X + M^2(X)) = \\ &= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = \\ &= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X) \end{aligned}$$

# Дисперсія та середнє квадратичне

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання.

Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті.

Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина.

Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

# Дисперсія та середнє квадратичне

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини  $X$  називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$



## Приклад 2.

Закон розподілу випадкової величини  $X$  задано таблицею, обчислити  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ :

$x_i$	-4	-2	1	2	4	6
$p_i$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Розв'язання:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 p_i - \left( \sum_{i=1}^6 x_i p_i \right)^2;$$

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{i=1}^6 x_i p_i = -4 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,1 = \\ &= -0,4 - 0,4 + 0,3 + 0,4 + 0,4 + 0,6 = 0,9; \end{aligned}$$

## Приклад 2.

$x_i$	-4	-2	1	2	4	6
$p_i$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Продовження:

$$\begin{aligned}M(X^2) &= \sum_{i=1}^6 x_i^2 p_i = 16 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,1 + 36 \cdot 0,1 = \\ &= 1,6 + 0,8 + 0,3 + 0,8 + 1,6 + 3,6 = 8,7;\end{aligned}$$

$$D(X) = 8,7 - (0,9)^2 = 8,7 - 0,81 = 7,89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7,89} \approx 2,8.$$

# Мода та медіана випадкової величини

Моду ( $M_o$ ) випадкової величини  $X$  називається найімовірніше її значення.

(Таке значення, що має найбільшу ймовірність появи)

Медіана ( $M_e$ ) випадкової величини – таке її значення, відносно якого рівноймовірно одержання більшого або меншого значення випадкової величини, тобто:

$$P(X < M_e) = P(X \geq M_e)$$

Медіана – це абсциса точки, в якій площа під кривою розподілу ділиться навпіл. Медіана визначається як корінь рівняння :

$$F(x) = 0,5$$

# Початкові та центральні моменти

Більш загальною формою числових характеристик випадкових величин є моменти k-го порядку.

Моментом k-го порядку випадкової величини називається математичне сподівання k-го степеня відхилення випадкової величини від деякої сталої величини  $a$ :

$$M[(X-a)^k]$$

Якщо  $a=0$ , то момент називається початковим

$$\eta_k = M[X^k]$$

Якщо  $a=M(X)$ , то момент називається центральним

$$\mu_k = M[(X-M(X))^k]$$

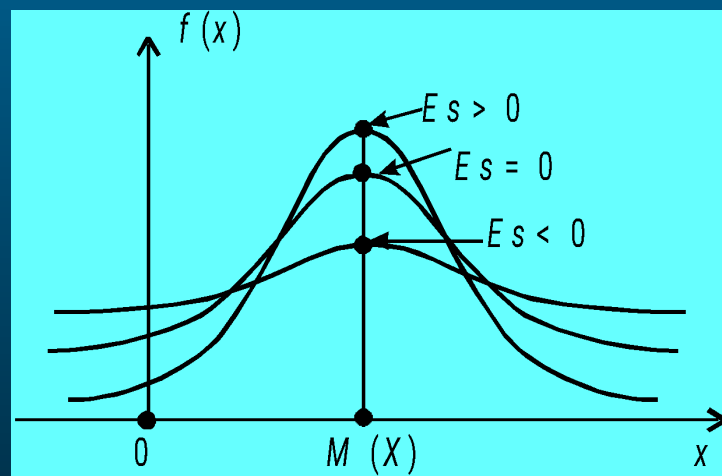
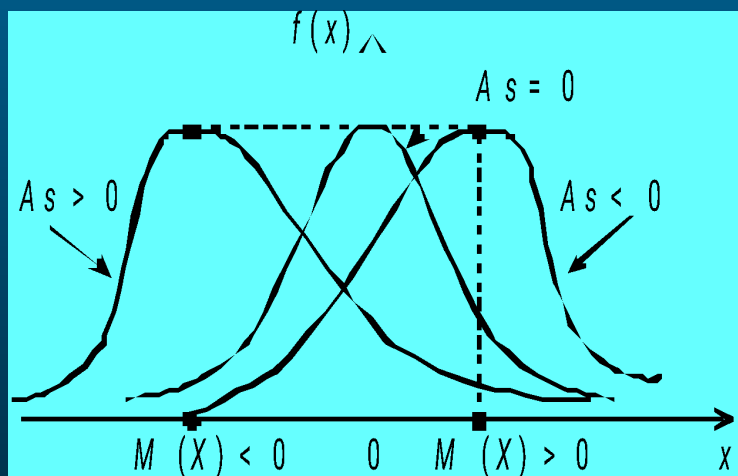
# Асиметрія і ексцес

Коефіцієнт асиметрії (зкошеності) характеризує асиметрію графіка функції розподілу

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Коефіцієнт ексцесу характеризує гостровершинність кривої розподілу

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$



Дякую за увагу!