Подобные треугольники

Повторение к ОГЭ

Наиболее часто встречающиеся теоретические вопросы

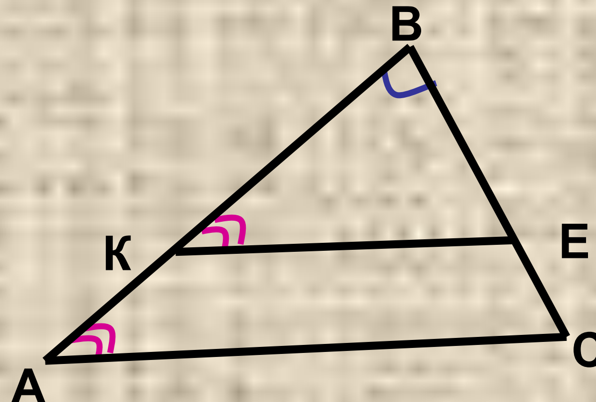
- **Признаки подобия треугольников:**

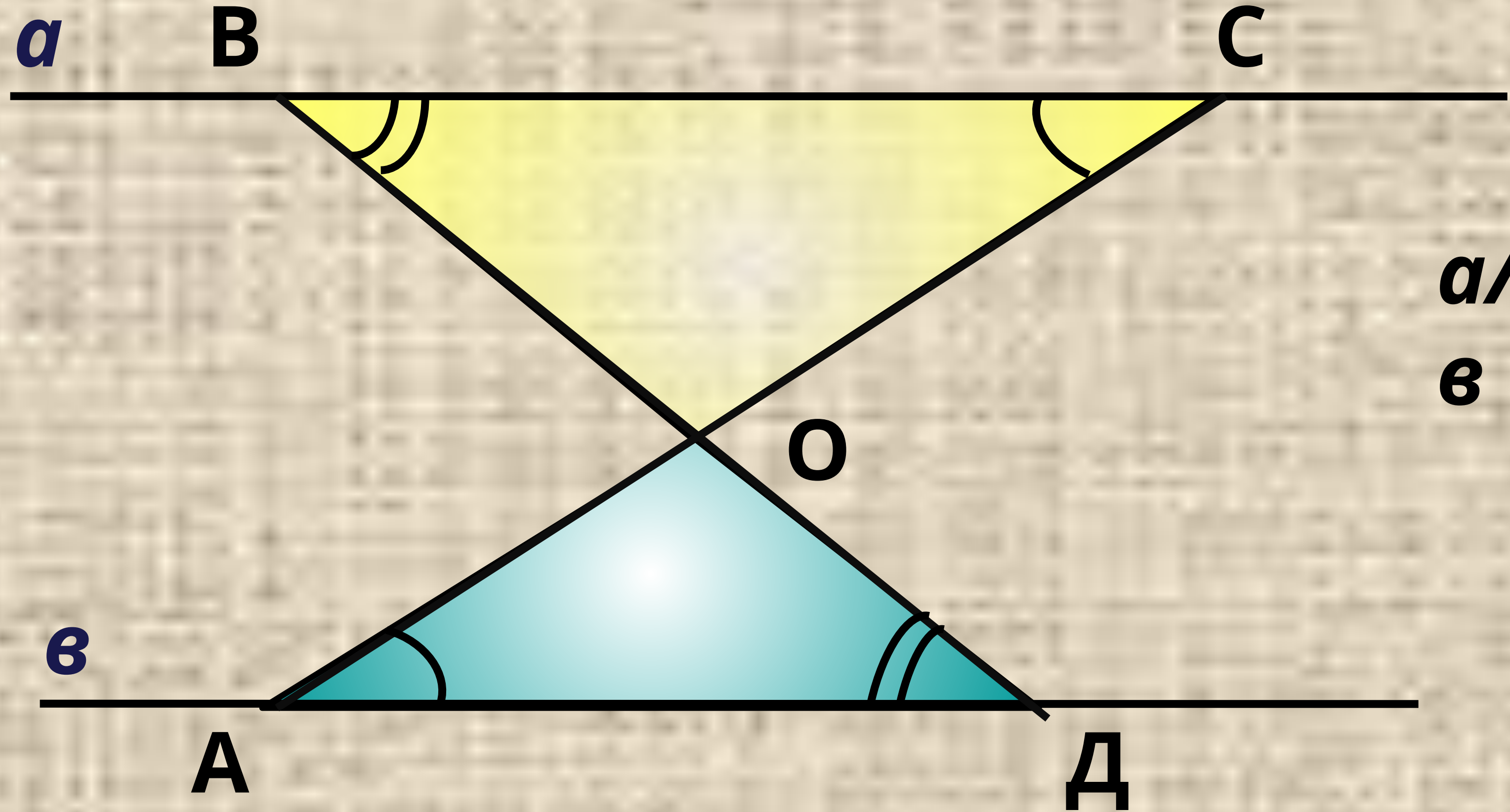
  1.Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

  2.Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

  3.Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

- **Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному (почему)?**

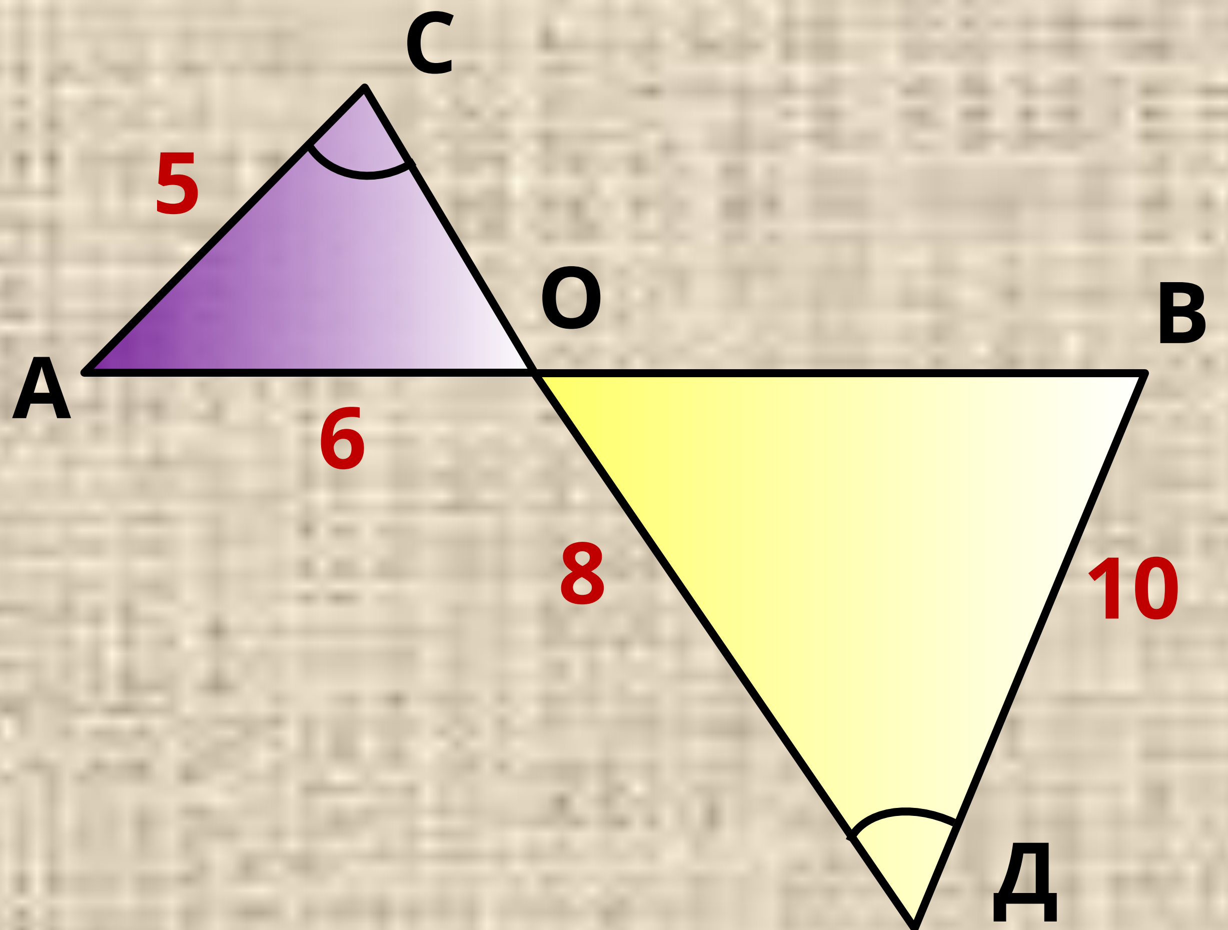




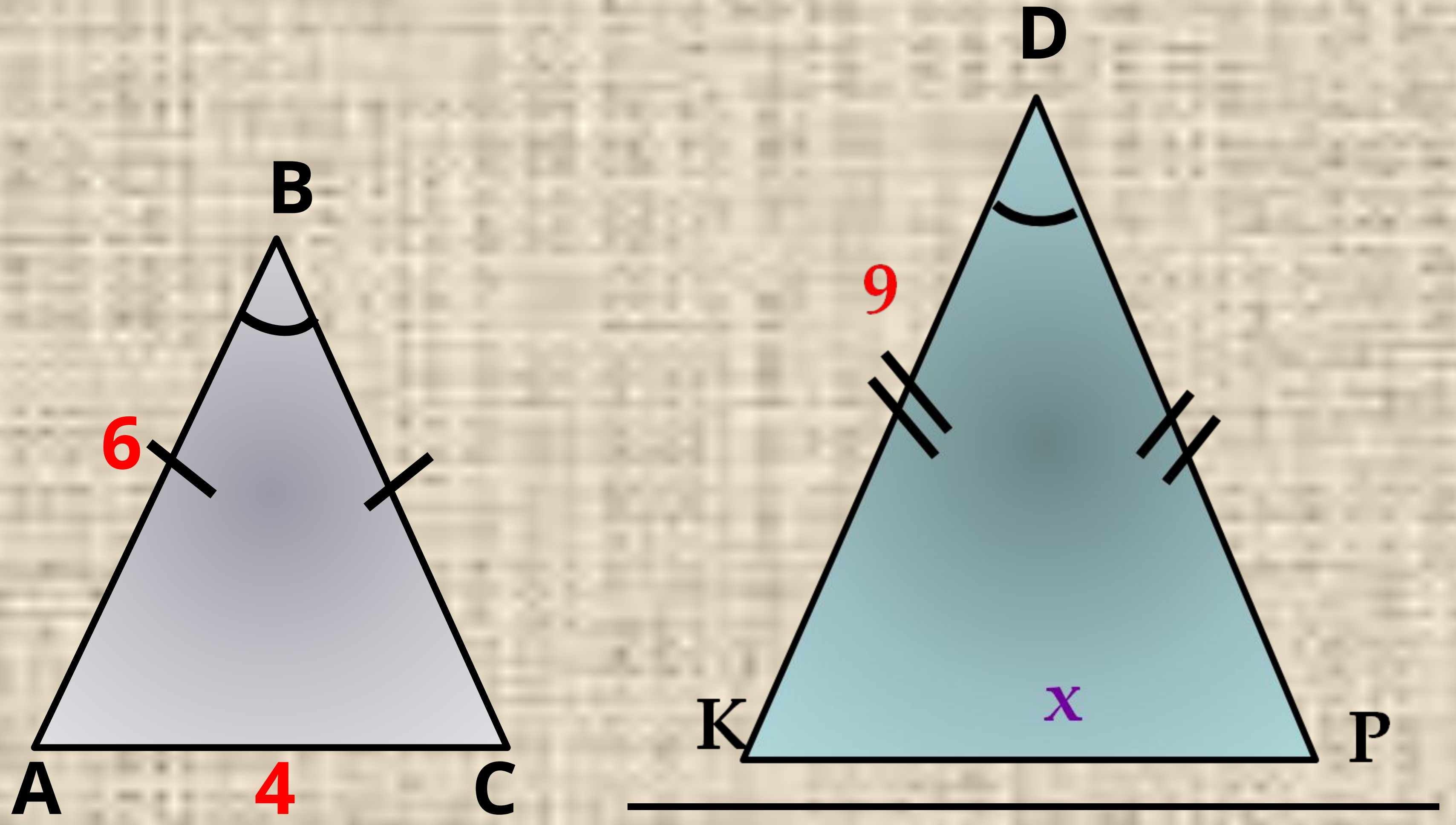
a//

в

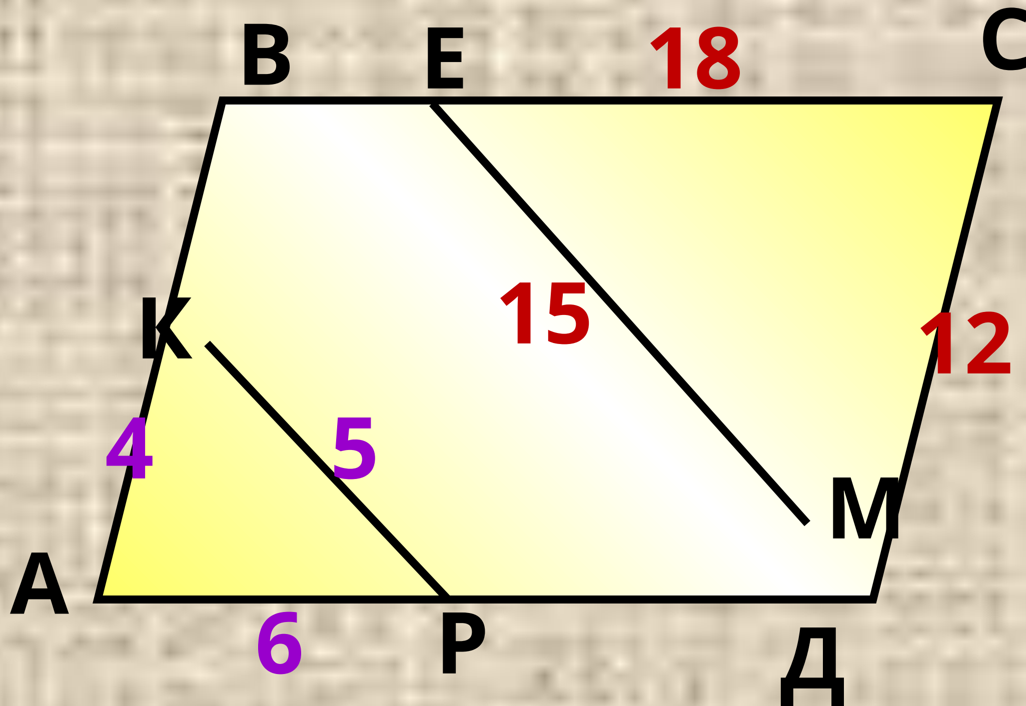
Доказать: Δ ВОС ~ Δ АОД



Найти: CO; OB

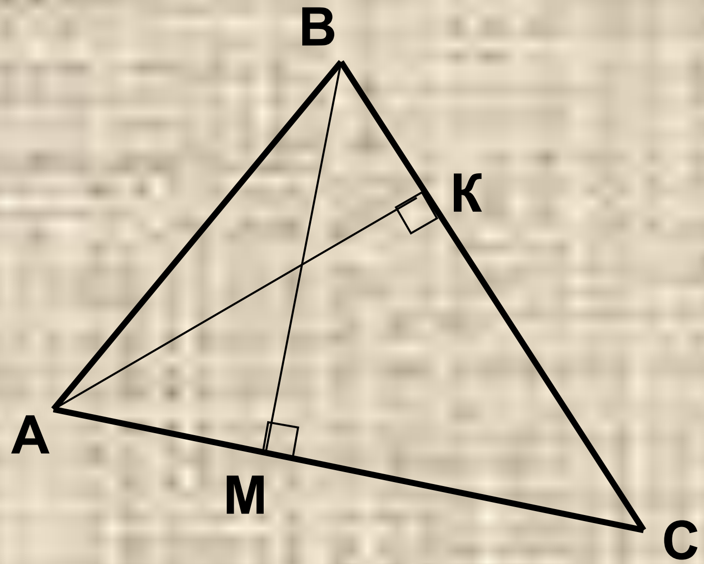


Найти: x

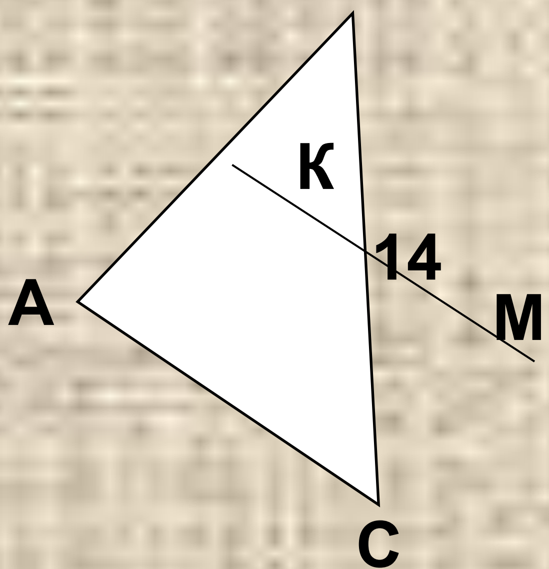


Доказать: $\triangle$ АКР ~ $\triangle$ СМЕ

1. Даны два подобных треугольника. Стороны одного из них равны 12 см, 8 см, 6 см, а меньшая сторона другого равна 9 см. Найдите две другие его стороны.
2. В треугольнике АВС проведены две высоты АК и ВМ.
   1) Докажите, что Δ АКС ~ Δ ВМС.
   2) Найдите высоту ВМ, если АК = 18, СМ = 4, СК = 6.



Прямая, параллельная стороне АС треугольника АВС, пересекает стороны АВ и ВС в точках К и М соответственно. Найдите АС, если ВК : КА=2:3, КМ=14.



Решение:

Треугольники АВС и КВМ подобны:

угол В - общий,

углы ВАС и ВКМ равны как соответственные при параллельных прямых АС и КМ и секущей АВ),

поэтому КМ:АС= ВК:ВА.

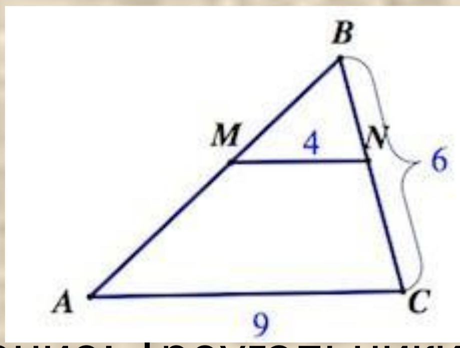
Т.к. ВК : КА = 2 : 3, то ВК : ВА = 2 : 5.

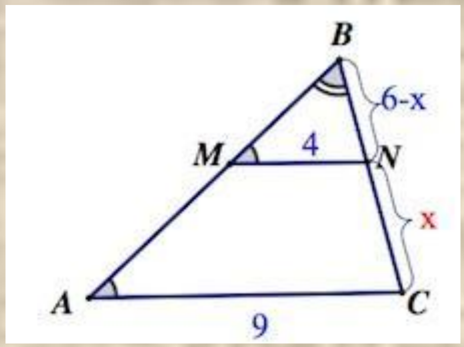
Имеем, АС=КМ * ВА : ВК,

АС=14 * 5 : 2 = 35

Ответ:35.

- Через точки M и N, принадлежащие сторонам AB и BC треугольника ABC соответственно, проведена прямая MN, параллельная стороне AC. Найдите длину CN, если BC = 6, MN = 4 и AC = 9.



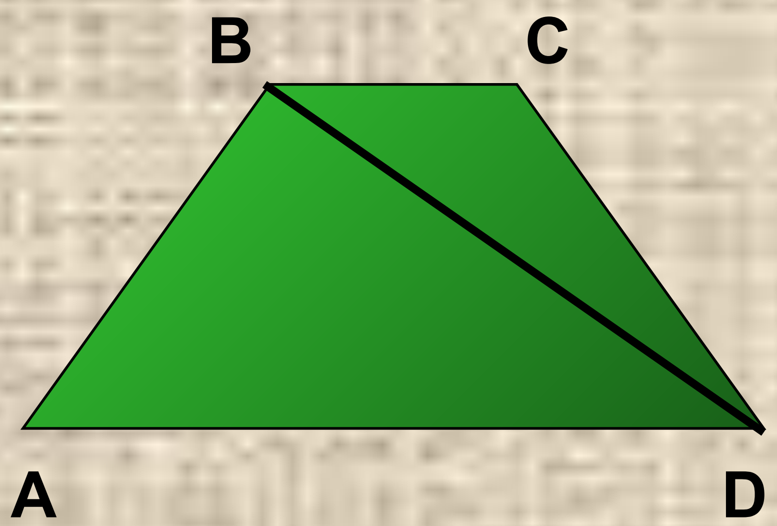


- Решение: Треугольники *MBN* и *ABC* подобны по первому признаку подобия., так как
- 1) у треугольников *MBN* и *ABC* угол *B* – общий 2) в силу параллельности прямых *MN* и *AC* соответственные углы *BMN* и *BAC* равны.
- Из подобия треугольников вытекает пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$$

- Обозначим *NC* за *x* . Соответственно, *BN* = 6 – *x*, согласно условию. Тогда $\frac{6-x}{6} = \frac{4}{9}$. Тогда CN = $3\frac{1}{3}$

Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 5 и 20, BD=10. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.



Решение:

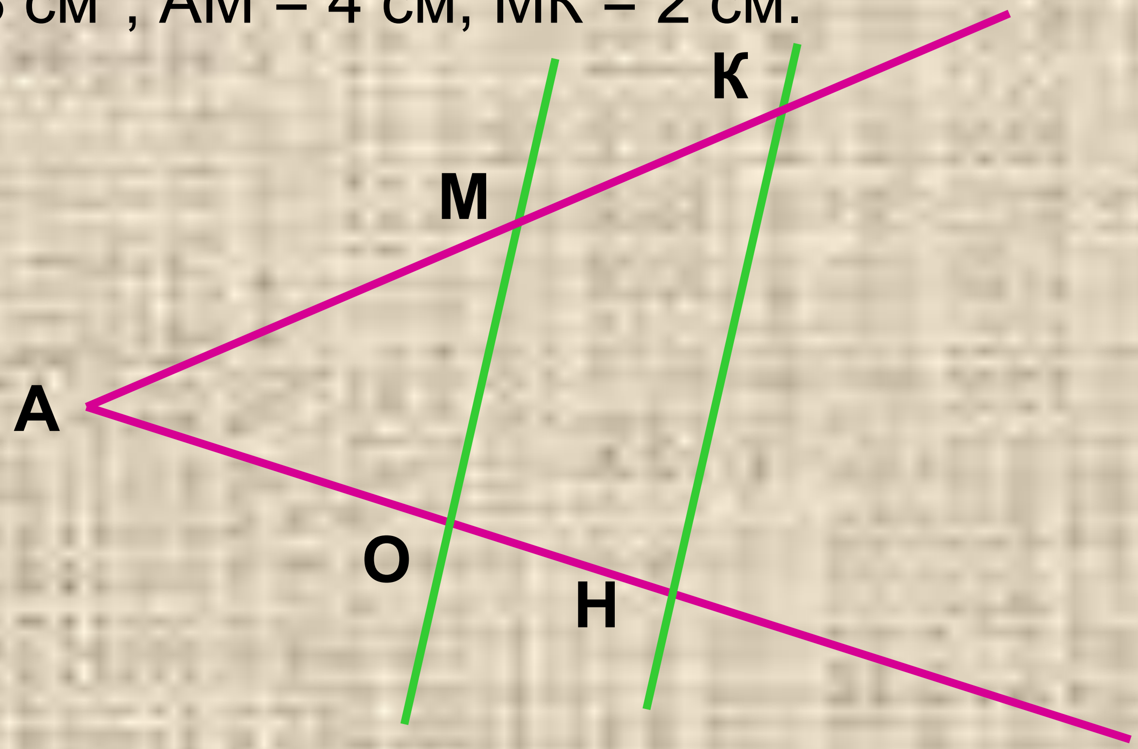
Углы СВД и ВДА равны как накрест лежащие при параллельных прямых ВС и АД и секущей ВД.

Стороны ВС и ВД в Δ ВСД пропорциональны сторонам ВД и АД в Δ АВД соответственно, т.к.
ВС : ВД = 5 : 10 = 0,5 и
ВД : АД = 10 : 20 = 0,5.
Значит, эти треугольники подобны (по второму признаку).

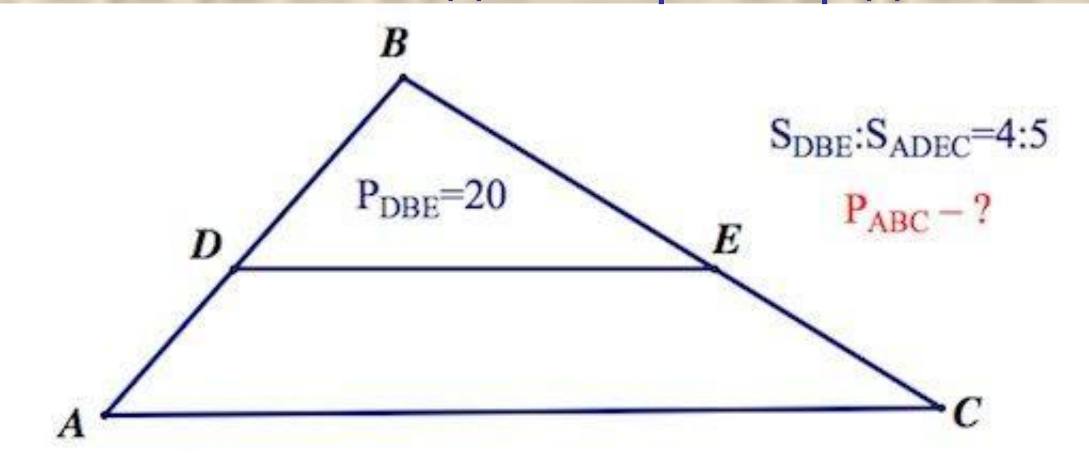
Наиболее часто встречающиеся теоретические вопросы

- Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия
- Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия
- В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

1). Прямые МО и КН , пересекающие стороны угла А, параллельны (М и К лежат на одной стороне угла). Найдите площадь треугольника АМО, если известно, что площадь треугольника АКН равна 48 см^2, АМ = 4 см, МК = 2 см.

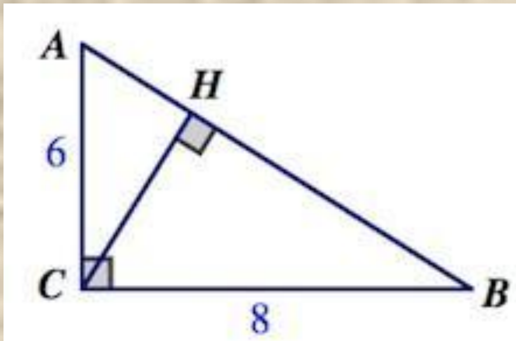


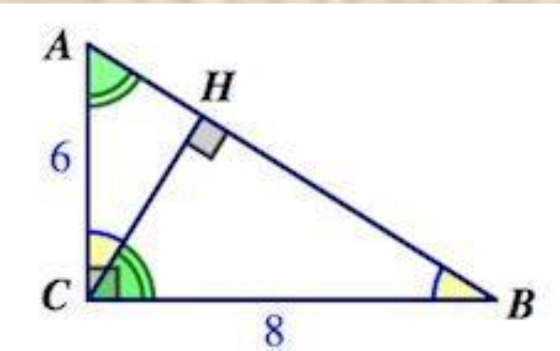
2). Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на треугольник и трапецию, площади которых относятся как 4:5. Периметр образовавшегося треугольника равен 20 см. Найдите периметр данного треугольника.



Ответ: 30.

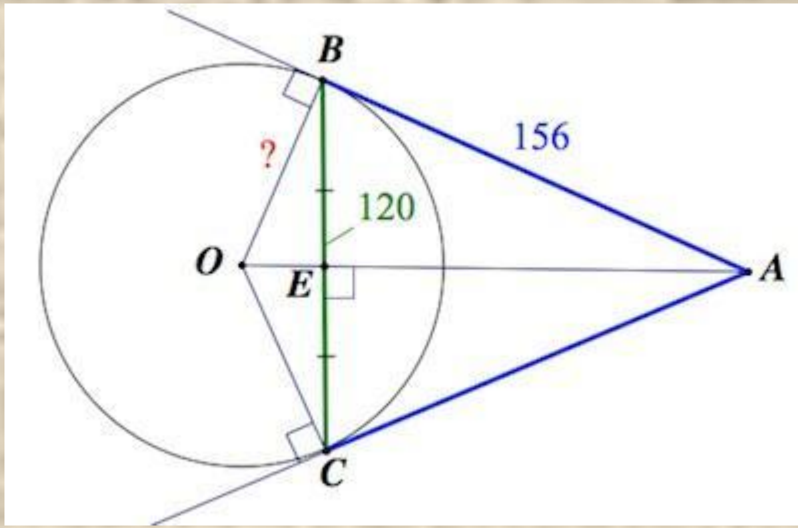
3). Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 см проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислите площади образовавшихся треугольников.





Ответ: 24; 8,64; 15,36.

4). Из одной точки проведены к кругу две касательные. Длина касательной равна 156, а расстояние между точками касания равно 120. Найдите радиус круга.



Ответ: 65

План решения:

1. Найдите подобные треугольники и докажите их подобие
2. Запишите отношение сходственных сторон
3. Выполните необходимые вычисления
4. Запишите ответ

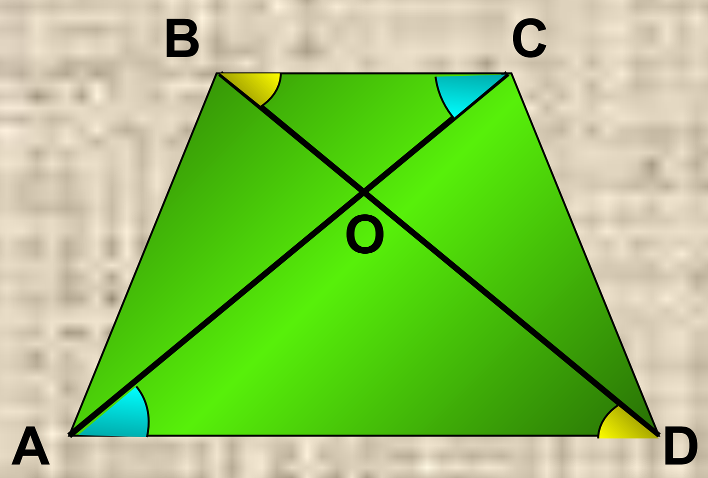
- (№24) Отрезки *AB* и *DC* лежат на параллельных прямых, а отрезки *AC* и *BD* пересекаются в точке *M*. Найдите *MC*, если *AB* =16, *DC* = 24, *AC* = 25.

- (№26) Основания трапеции относятся как 2 : 3. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

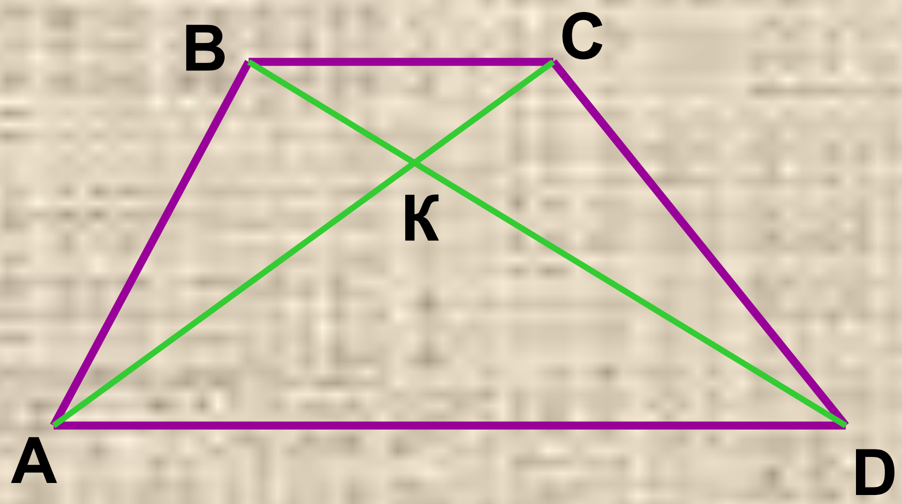
- (№26) Основание *AC* равнобедренного треугольника *ABC* равно 16. Окружность радиуса 12 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания *AC* в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Наиболее часто встречающиеся теоретические вопросы

- Треугольники AOD и COB, образованные отрезками диагоналей и основаниями трапеции, подобны. Коэффициент подобия k = AO : CO



Диагонали трапеции ABCD пересекаются в точке K, причем отрезок BK составляет треть от диагонали BD. Найдите основание AD, если BC = 12 см.



РЕШЕНИЕ:

Треугольники BKC и AKD подобны по двум углам.

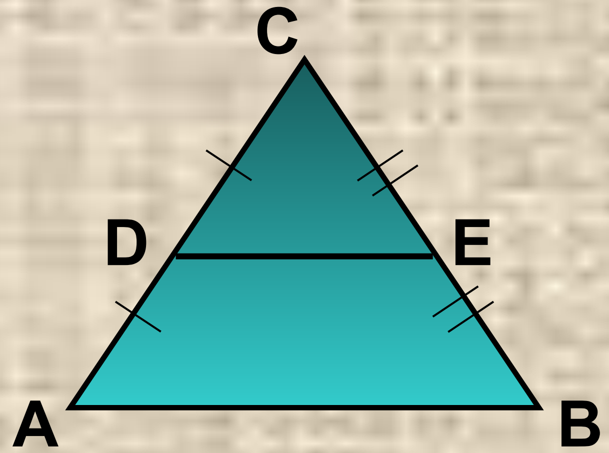
По условию BK – треть BD, тогда BK : KD = 1 : 2, значит BC : AD = 1 : 2, значит AD = 24.

Ответ: 24 см.

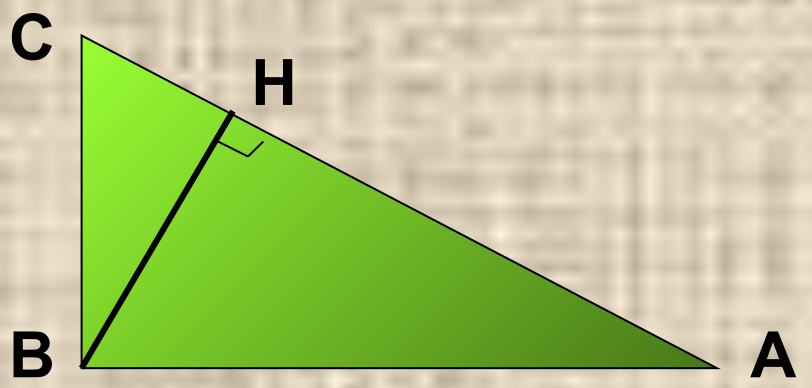
Наиболее часто встречающиеся теоретические вопросы

- Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.
- Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.
- Отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведенных к этим сторонам.
- Катет прямоугольного треугольника является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

- В треугольнике *ABC* *DE* – средняя линия. Площадь треугольника *CDE* равна *45*. Найдите площадь треугольника *ABC*.

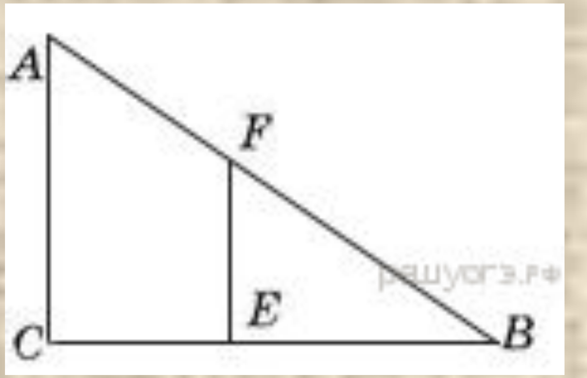


- Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=7, AC=28.



Задачи практического содержания Определение высоты предмета.

Задание 17 № 132764. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте (в метрах) расположен фонарь?

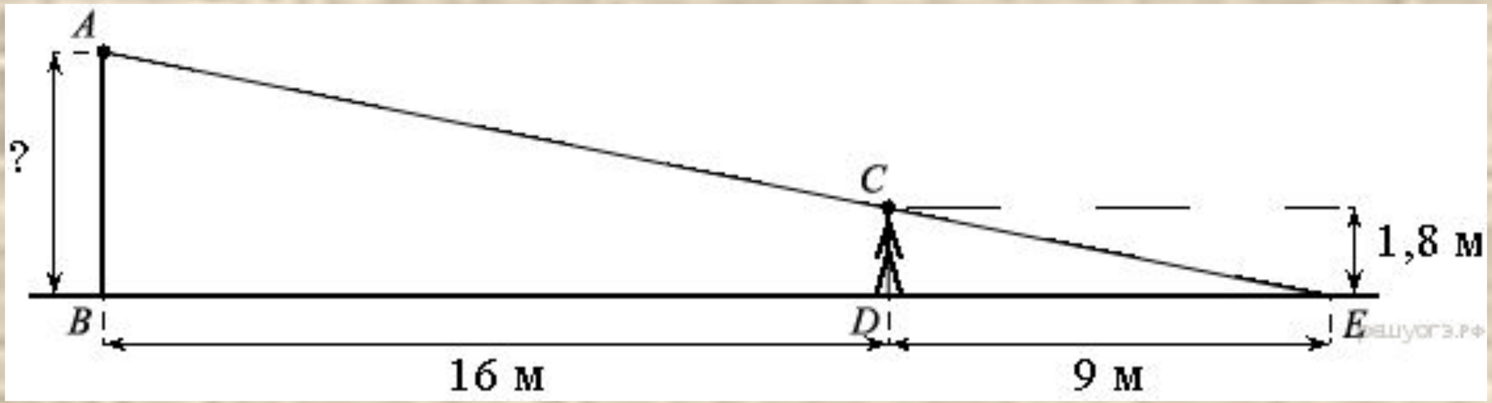


Решение.

Столб и человек образуют два прямоугольных треугольниках *ABC* и *FEB*. Эти треугольники подобны по двум углам. Пусть высота фонаря равна *x* м , тогда ,откуда Поэтому фонарь расположен на высоте 5,1 м.

Ответ: 5,1.

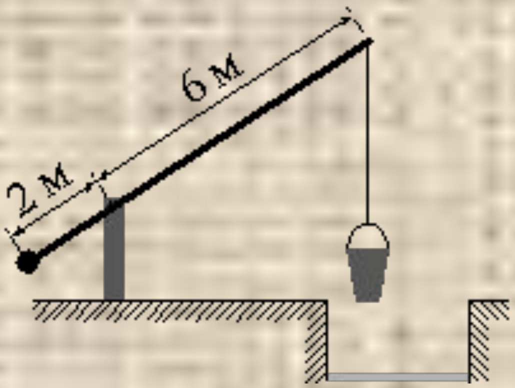
Задание 17 № 314914. Человек, рост которого равен 1,8 м, стоит на расстоянии 16 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 9 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

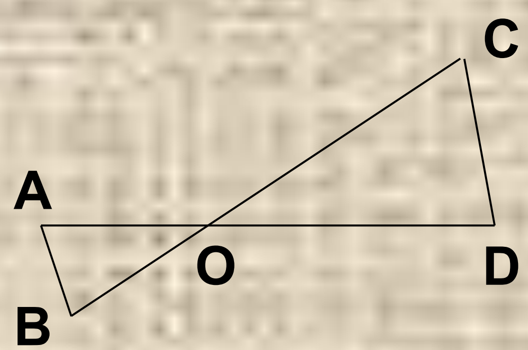


Решение:

Введём обозначения, как показано на рисунке. Рассмотрим прямоугольные треугольники *AEB* и *CDE,* они имеют общий угол *E* и, следовательно, подобны по двум углам. Значит, $\frac{AB}{CD}=\frac{BE}{DE}$, откуда $AB = CD\frac{BE}{DE} = 1{,}8\cdot\frac{16+9}{9} = 5\text{м}$

(№26) На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 2 м, а длинное плечо — 6 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 0,5 м?





Дано: BO=2 м, OC=6 м, AB=0,5 м.

Найти: CD

Решение:

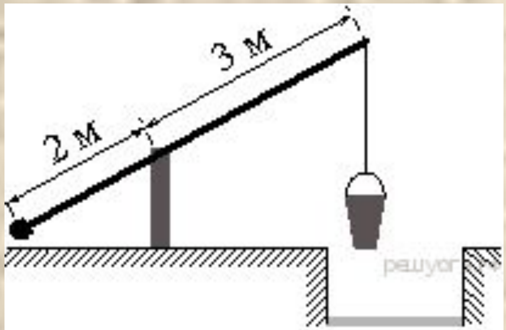
Треугольники ABO и DCO подобны (по двум углам),

AB : CD = BO : OC,

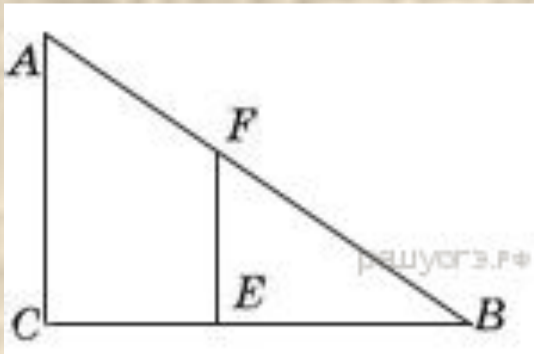
CD=AB*OC : BO,
CD=0,5*6:2=1,5 (м).

Ответ: 1,5

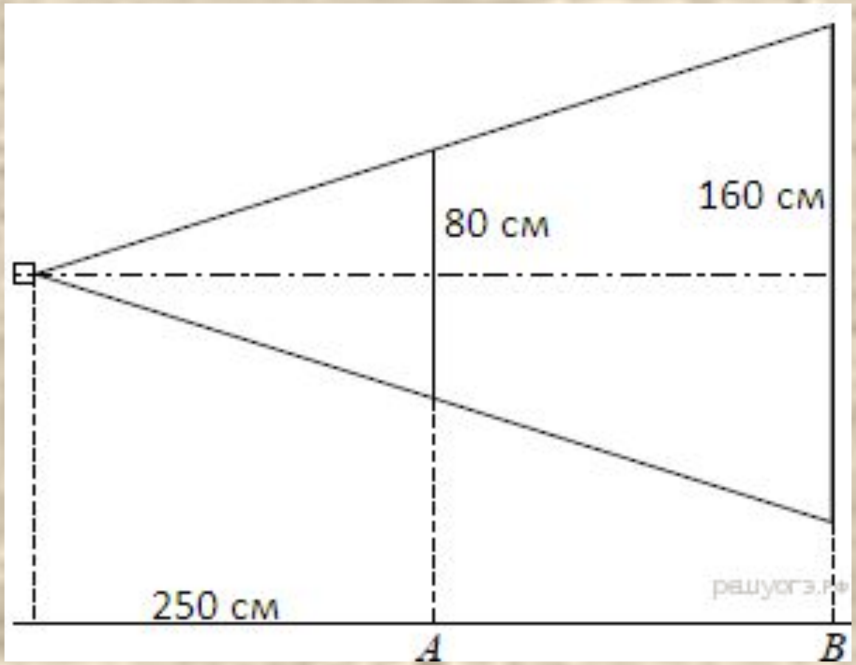
- (№26) На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 2 м, а длинное плечо — 3 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 1 м?



- (№17) Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,4 м. Найдите длину тени человека в метрах.



- **(№17) № 44.** Проектор полностью освещает экран *A* высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран *B* высотой 160 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

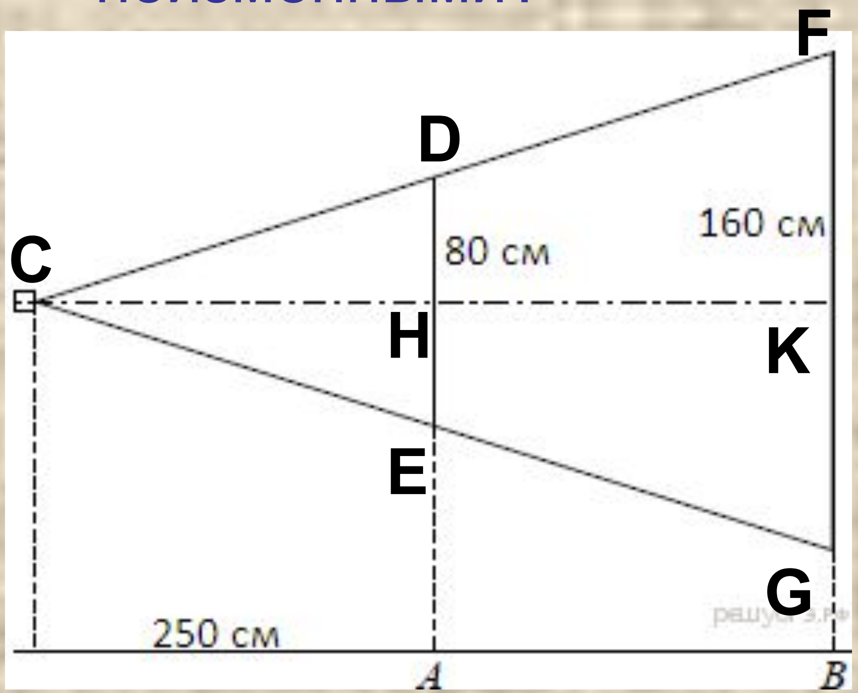


Решение (1 способ)

Заметим, что высота экрана, расположенного на расстоянии 250 см, в 2 раза меньше высоты экрана, расположенного на искомом расстоянии, значит, по теореме о средней линии, искомое расстояние в два раза больше первоначального экрана: $250 \cdot 2 = 500$.

Ответ: 500.

- **(№17) № 44.** Проектор полностью освещает экран *A* высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран *B* высотой 160 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?



Решение (2 способ)

По условию *FG=160 см, DE=80 см, CH=250 см.*

Найти: СК.

Δ *CFG* ~ Δ *CDE* (признак?), поэтому

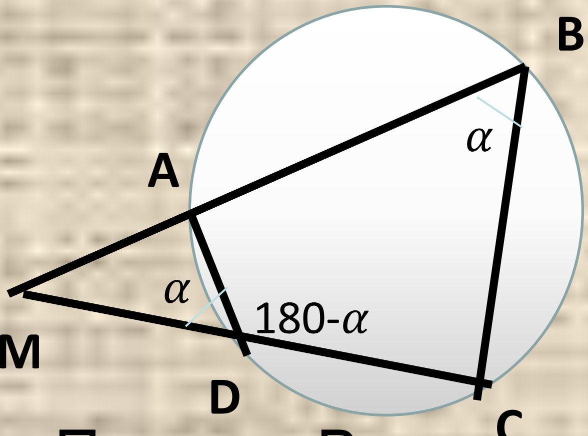
СН : СК = *DE* : *FG.*

СК = СН * *FG* : *DE*

СН=250*160 : 80 = 500

Ответ: 500.

Стр.357 **Задача 25**. *Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.*



РЕШЕНИЕ.

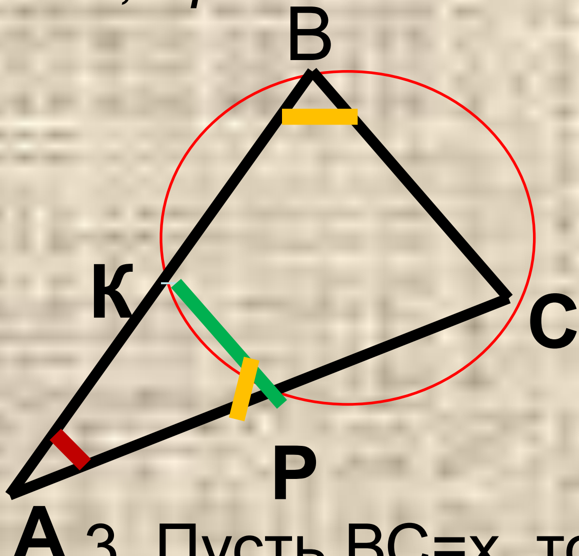
1. По свойству углов вписанного четырёхугольника (п.75) сумма противоположных углов 4-угольника равна 180^0 .
2. Пусть < B=α , тогда <ADC=180-α.
3. По свойству смежных углов <MDA= 180- (180-α)= α.
4. Рассмотрим ∆ MBC и ∆ MDA.

<M –общий, <B=< MDA=α.

∆MBC∞∆ MDA по двум углам.

9B683D

Стр.357,356. **ЗАДАЧА 24**. *Окружность пересекает стороны АВ и АС ∆ АВС в точках К и Р соответственно и проходит через вершины В и С. Найдите длину отрезка КР, если АК=16, а сторона АС в 1,6 раза больше стороны ВС.*



РЕШЕНИЕ.

1. ∆АКР∞∆АВС (см.предыдущую задачу) по двум углам. <А общий, <В=<КРА.

2. Если ∆ подобны, то стороны пропорциональны (по определению). Составим пропорцию

$$\frac{AK}{AC}=\frac{KP}{BC}=\frac{AP}{AB}$$

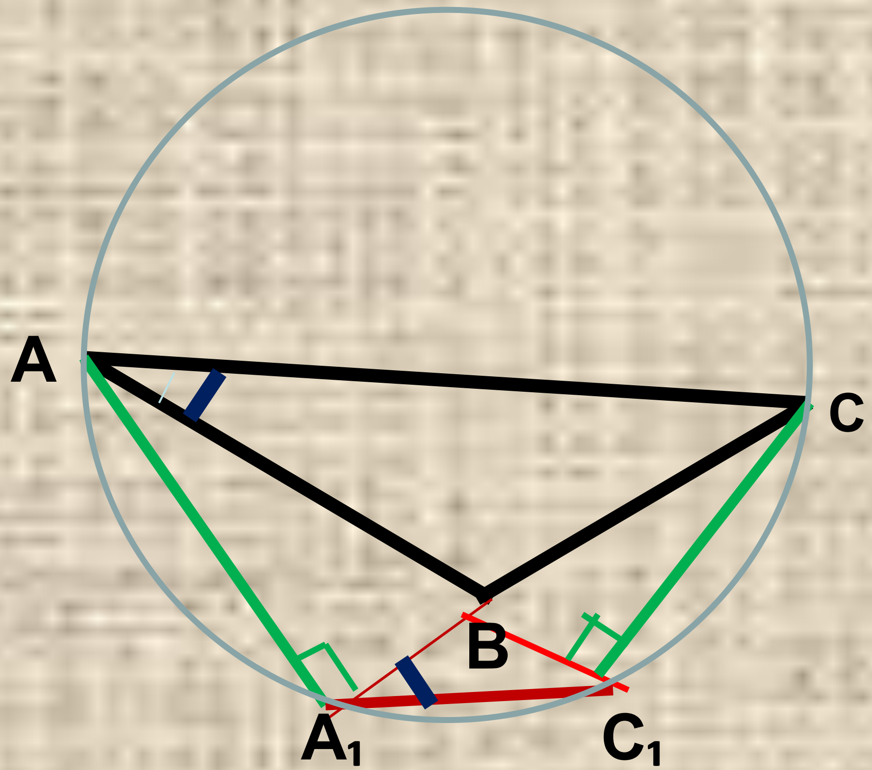
3. Пусть ВС=х, тогда АС=1,6х.

$$\frac{16}{1{,}6x}=\frac{KP}{x}$$

$$KP=\frac{16*x}{1{,}6*x}=10$$

ОТВЕТ : КР=10.

Стр. 361 Задача 25.*В Δ ABC с тупым <ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что $\Delta A_1BC_1 \infty \Delta$ ABC*.

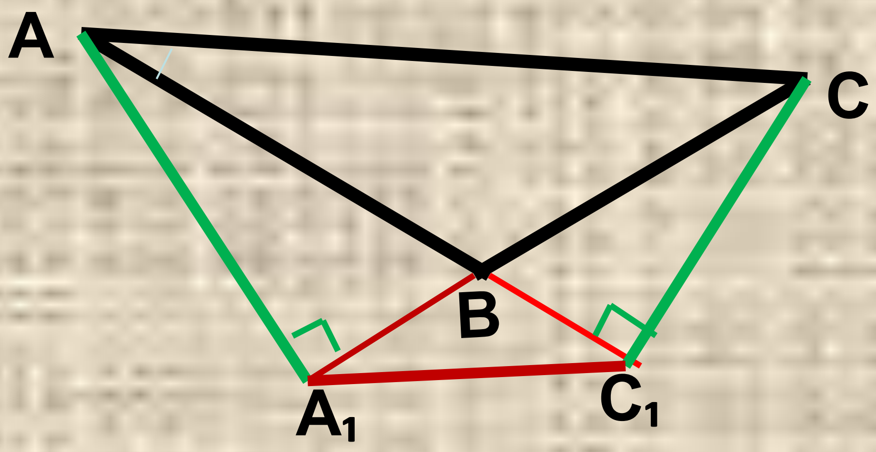


РЕШЕНИЕ:
(1 способ)

1.$<AA_1C=<CC_1A=90^0$;
AC диаметр окружности, описанной около ΔAA_1C и ΔAC_1C.
2. Рассмотрим ΔABC и ΔA_1BC_1:
$<ABC=<A_1BC_1$ (вертикальные),
$<CAC_1=<CA_1C_1$ (вписанные углы опираются на дугу CC_1)
$\Delta ABC \infty \Delta A_1BC_1$ по двум углам.

(B35E5A)

Стр. 361 Задача 25. *В ∆ ABC с тупым <ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что $\Delta A_1BC_1 \infty \Delta ABC$.*



РЕШЕНИЕ:

(2 способ).

1. ΔABA_1 и ΔCBC_1 прямоугольные:
   $<AA_1B=<CC_1B=90^0$,
   $<ABA_1=<CBC_1$ (вертикальные).
   $\Delta ABA_1 \infty \Delta CBC_1$ (по двум углам).

2. Из подобия треугольников составляем пропорцию $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B}{C_1B}$
   По свойству пропорции получаем $\frac{AB}{A_1B} = \frac{CB}{C_1B}$

3. В ΔABC и ΔA_1BC_1 стороны пропорциональны и углы между ними равны(вертикальные $<ABC=< A_1BC_1$).

$\Delta ABC \infty \Delta A_1BC_1$

Приложение

1. AM и BK – перпендикуляры к прямой ***a,*** точки M и K – основания перпендикуляров. AK ∩ BM = O. Найдите AM и MK, если
   MO = 6, BO = 4, BK = 6.
2. В треугольнике OBC проведен отрезок MK, параллельный стороне BC. Найдите отношение площадей треугольника OMK и трапеции MBCK, если OM = 4, MB = 12.
3. В треугольнике MPK сторона MK равна 12. Биссектриса MA делит сторону PK на отрезки

   AK = 8, AP = 10. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону MP биссектриса KB.

Приложение

- Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC, если BK:KA=3:7, KM=12.

- Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC, если BK:KA=1:5, KM=17.

- Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=12, AC=42, NC=25.

- Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=13, AC=65, NC=28.

Приложение

Основания ВС и AD трапеции ABCD равны соответственно 4,5 и 18, BD=9. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Основания ВС и AD трапеции ABCD равны соответственно 4 и 64, BD=16. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Основания ВС и AD трапеции ABCD равны соответственно 3 и 12, BD=6. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе АС. Найдите АВ, если АН=3, АС=12.

Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе АС. Найдите АВ, если АН=10, АС=40.

Задачи на готовых чертеж

Признаки подобия треугольни

1

2

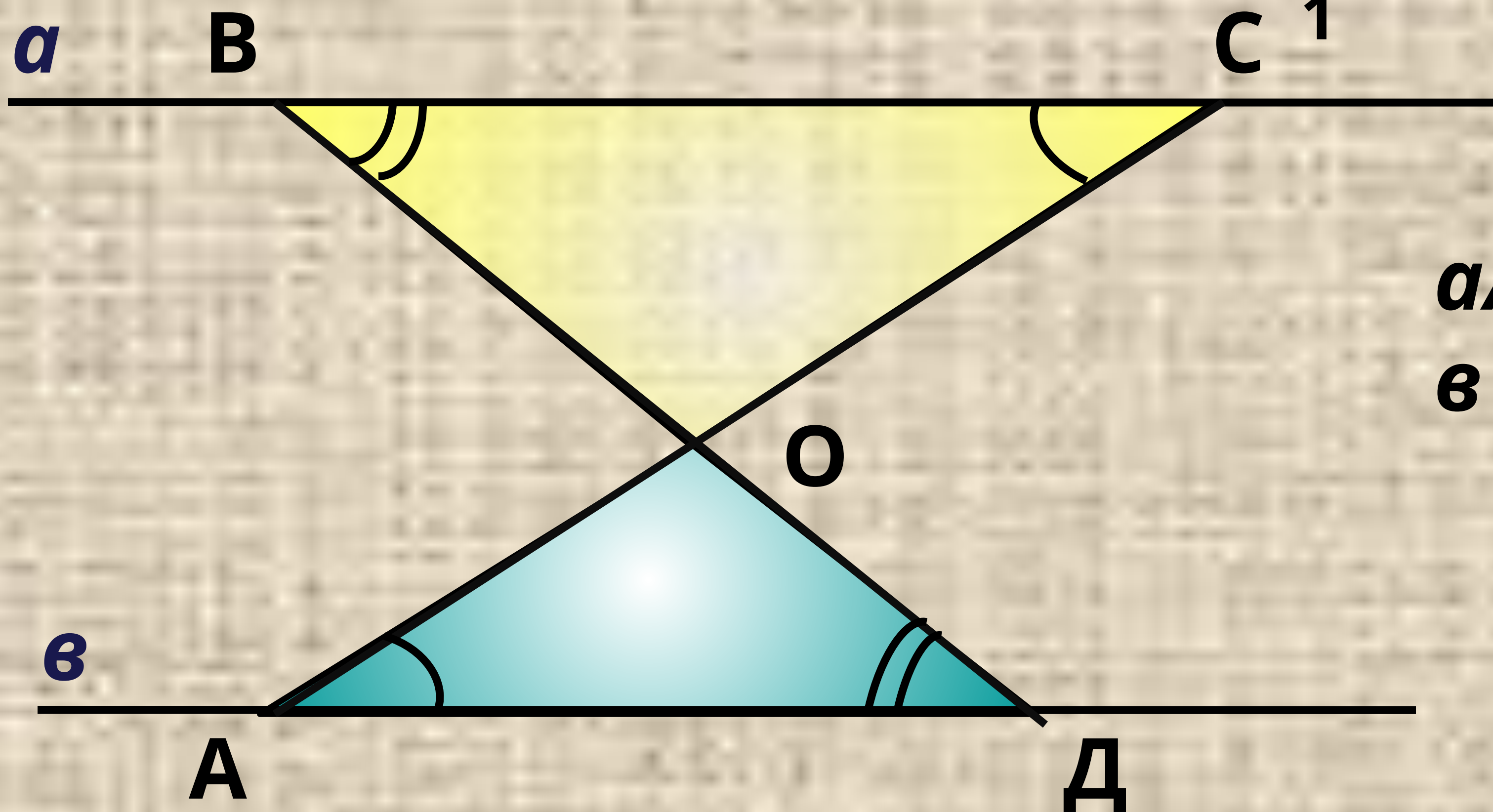
3

Литература

Первый признак подобия треугольников

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

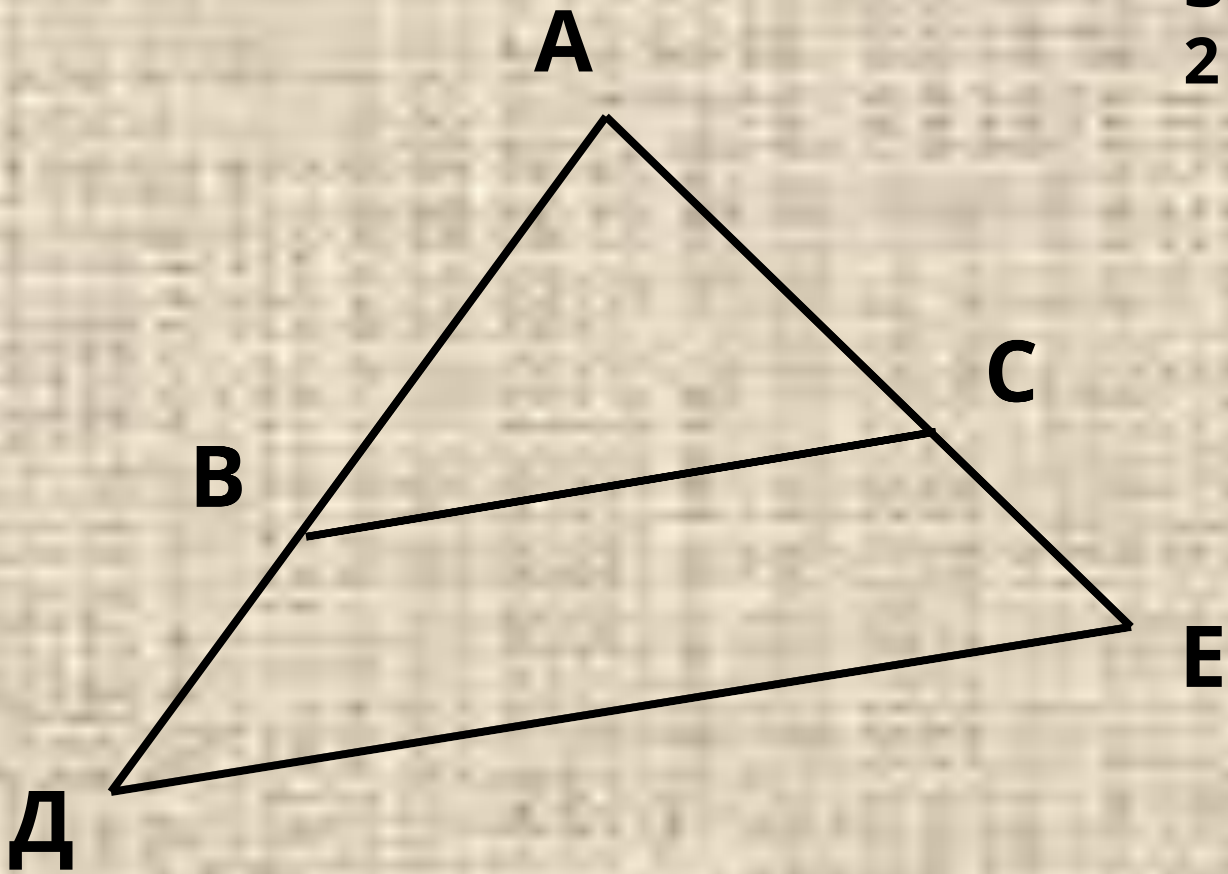
Задача 1



а//в

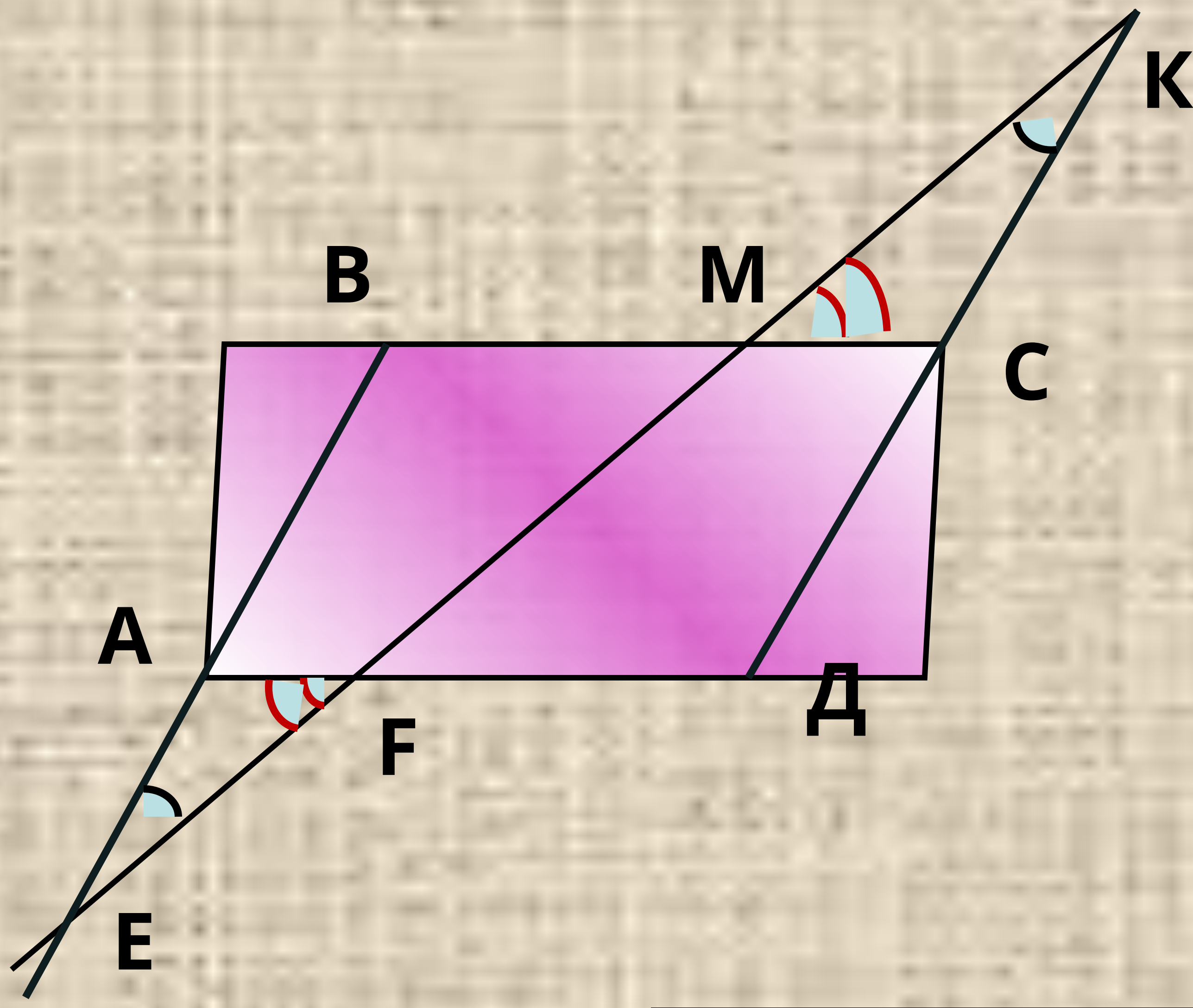
Доказать: Δ ВОС ~ Δ АОД

Задача 2



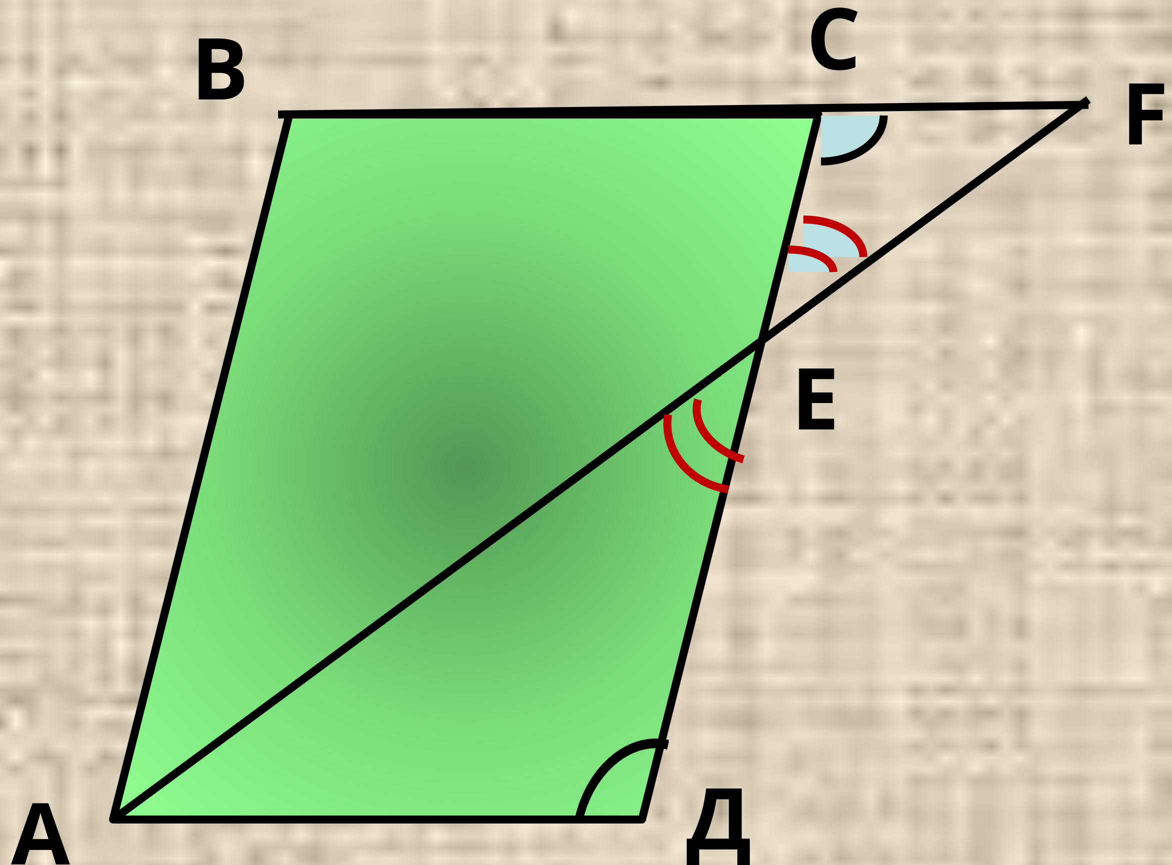
Доказать: Δ АВС∼Δ АДЕ

Задача 3



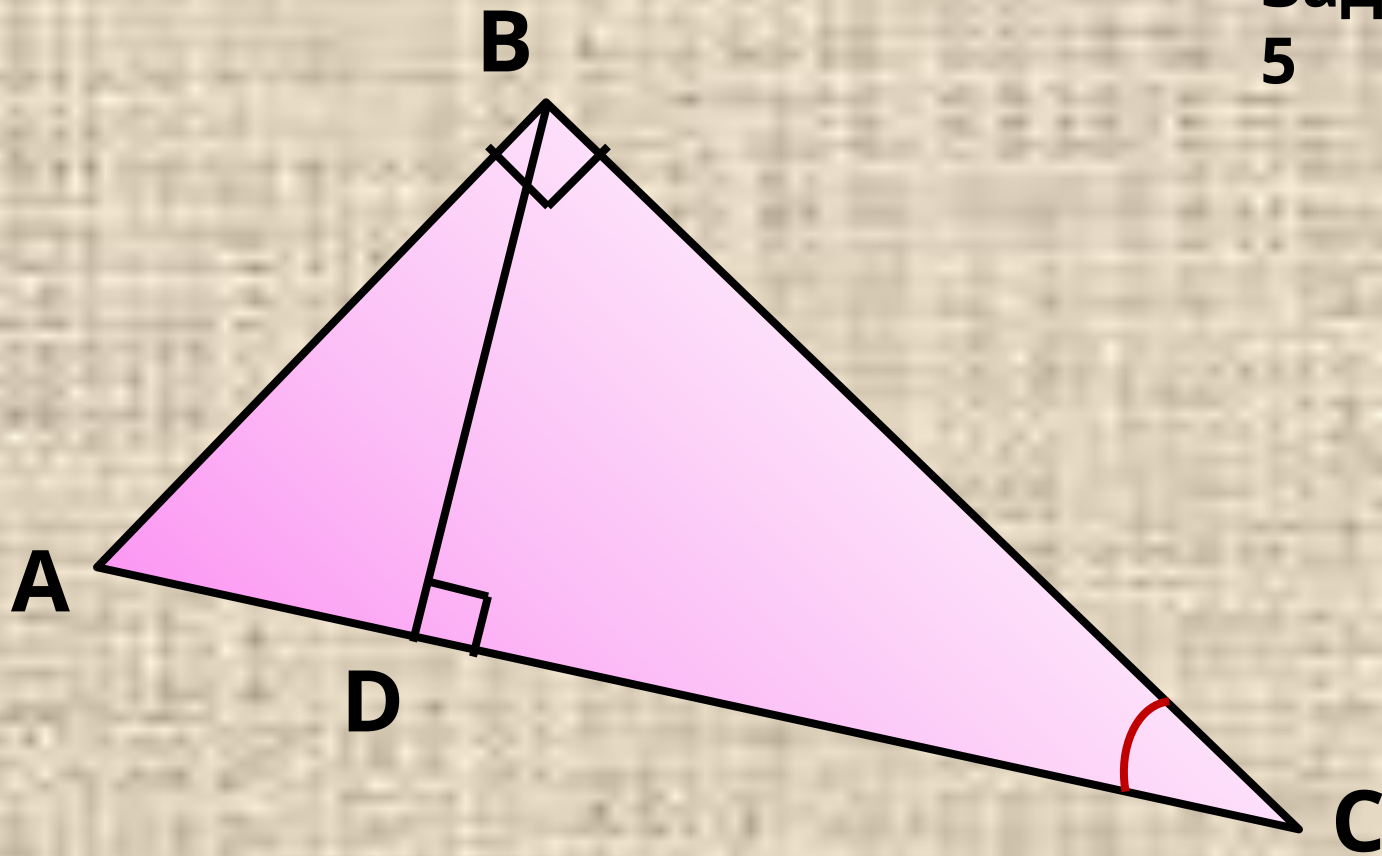
Доказать: Δ AFE ∼Δ CMK

Задача 4



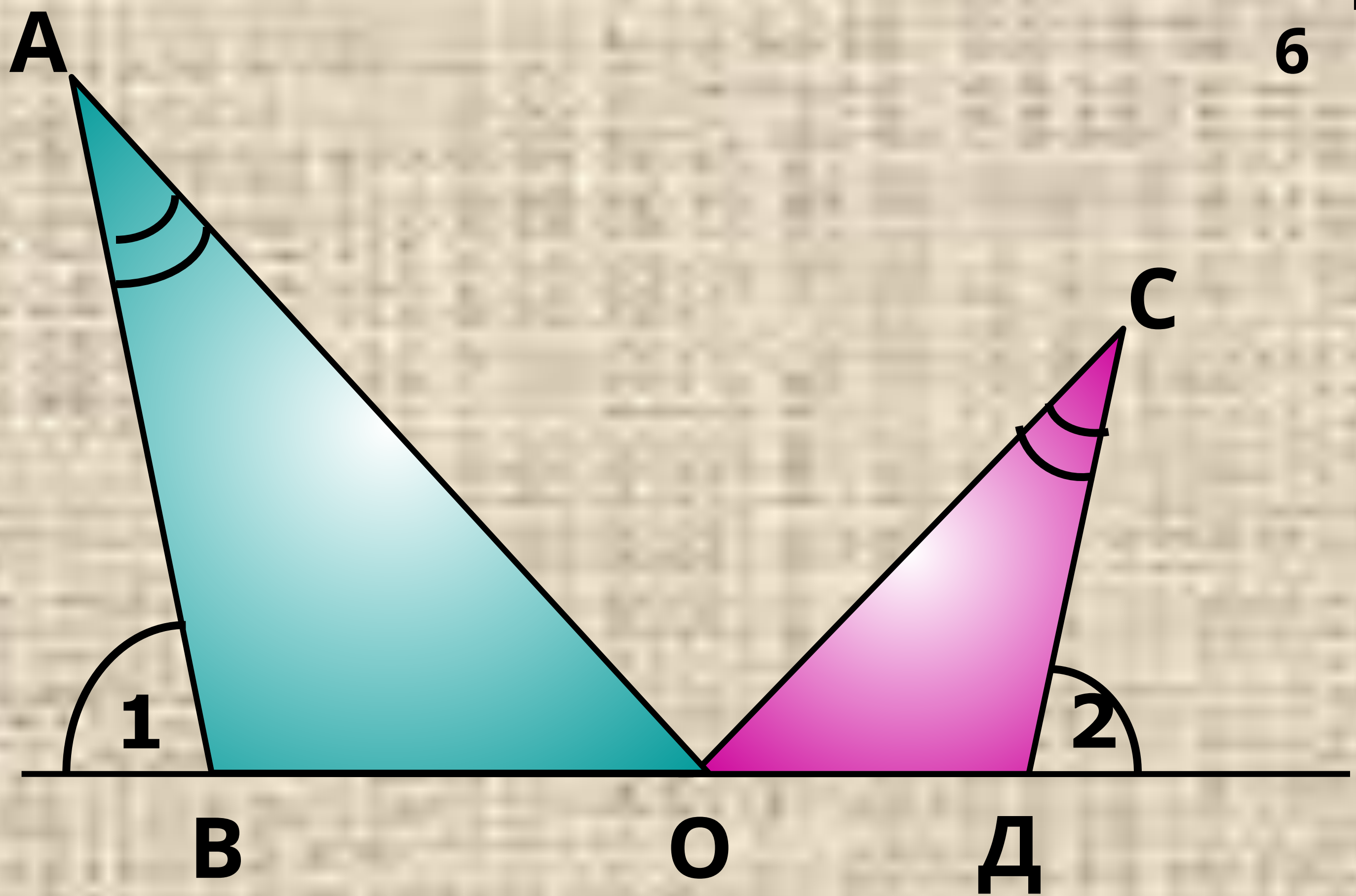
Доказать: $\triangle$ АДЕ ~ $\triangle$FCE

Задача 5



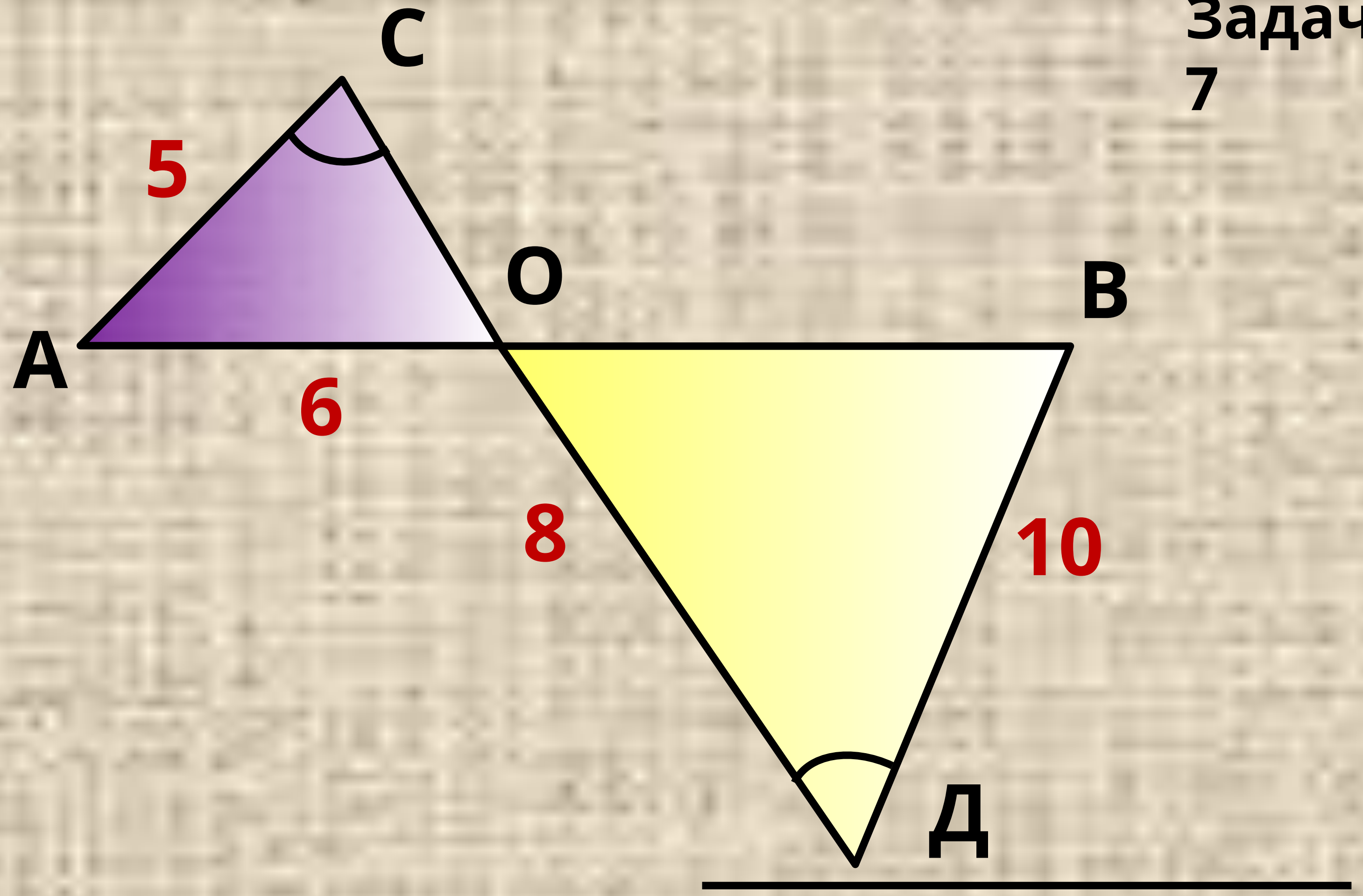
Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle BDC$

Задача 6



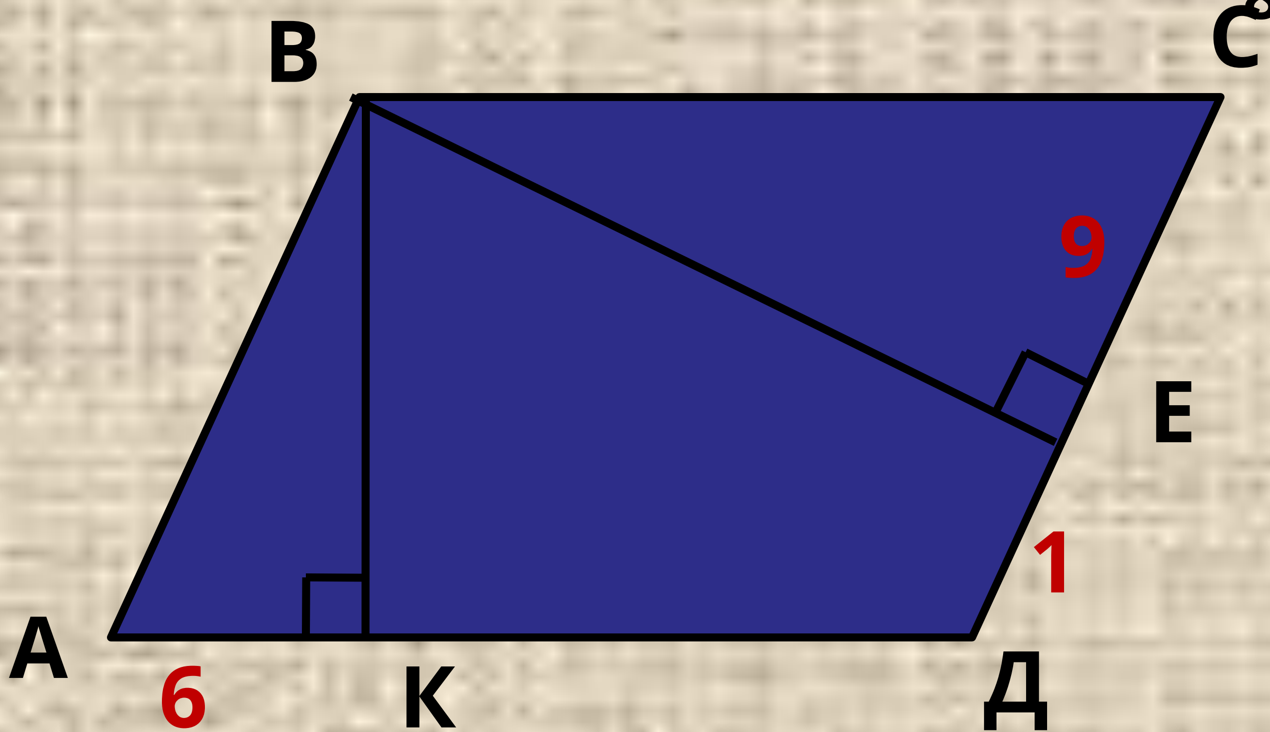
Доказать:
АО/СО

Задача 7



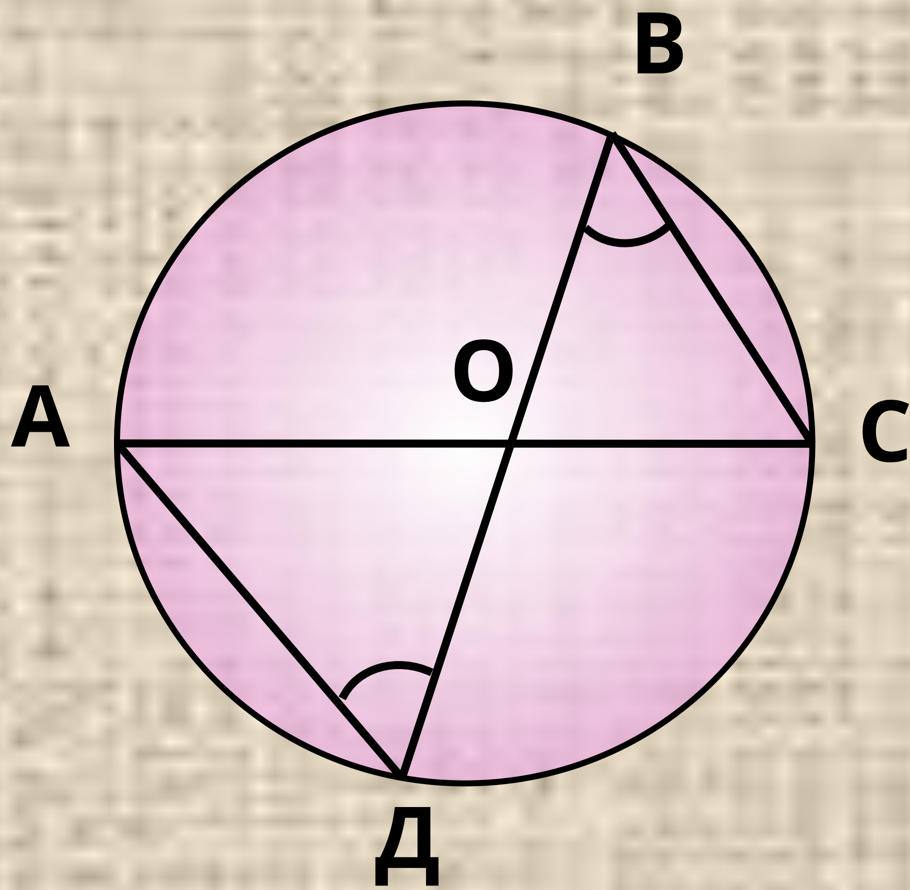
Найти: CO; OB

Задача 8



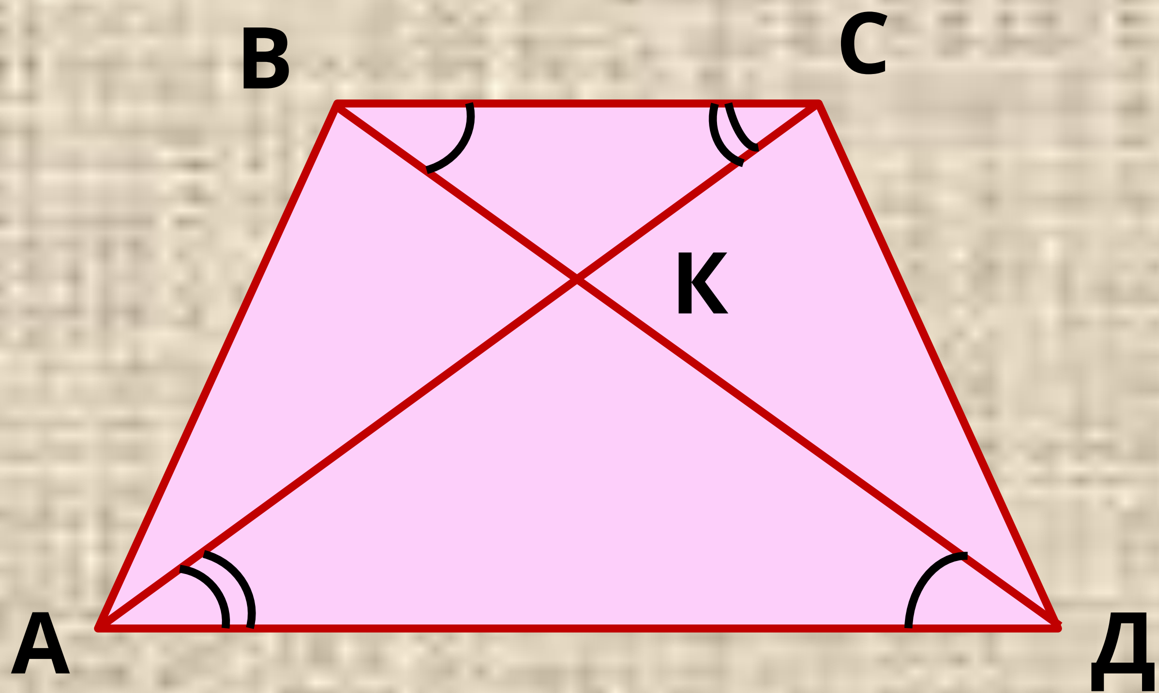
Найти: BC

Задача 9



Доказать: $\triangle$ АОД ~ $\triangle$ СОВ

Задача 10



Найти: подобные треугольники

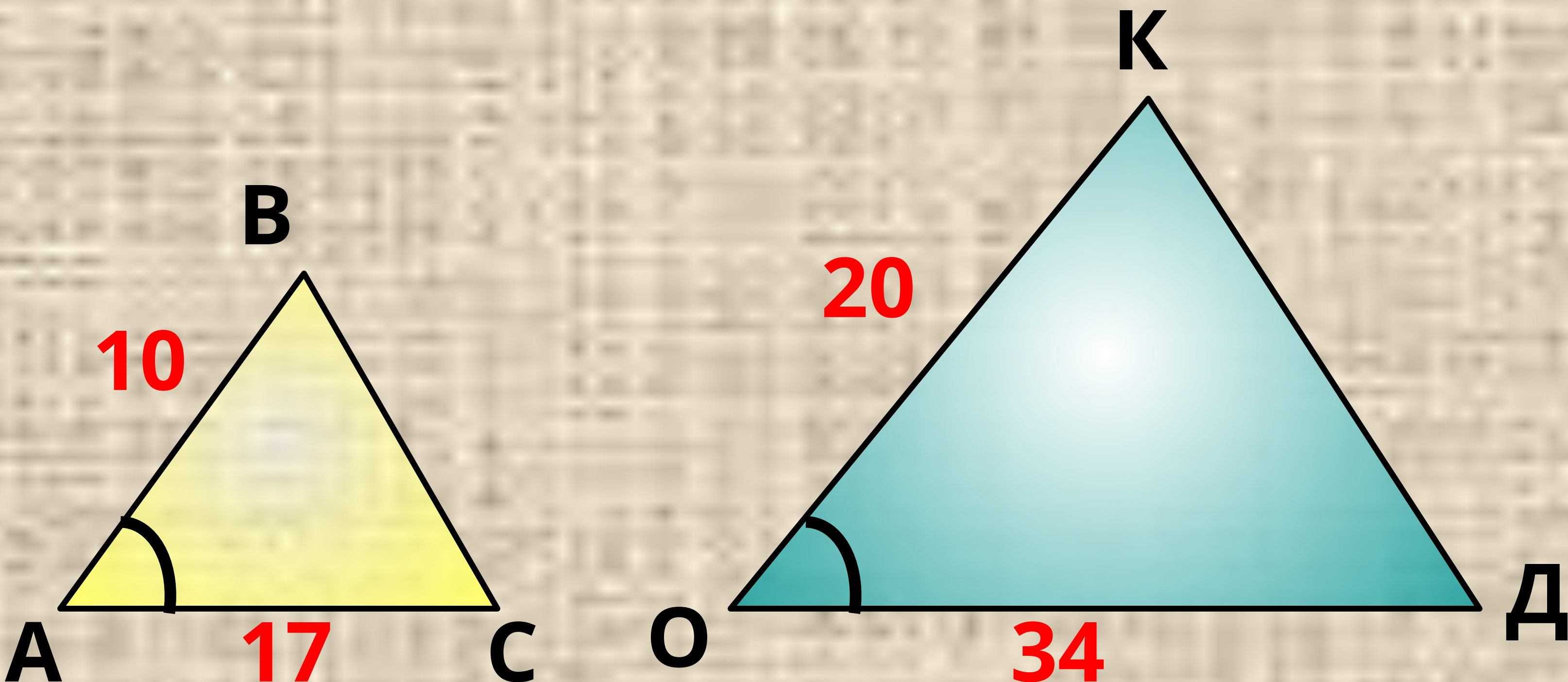
Второй признак подобия треугольни

1 2 3 4 5

6 7 8 9 10

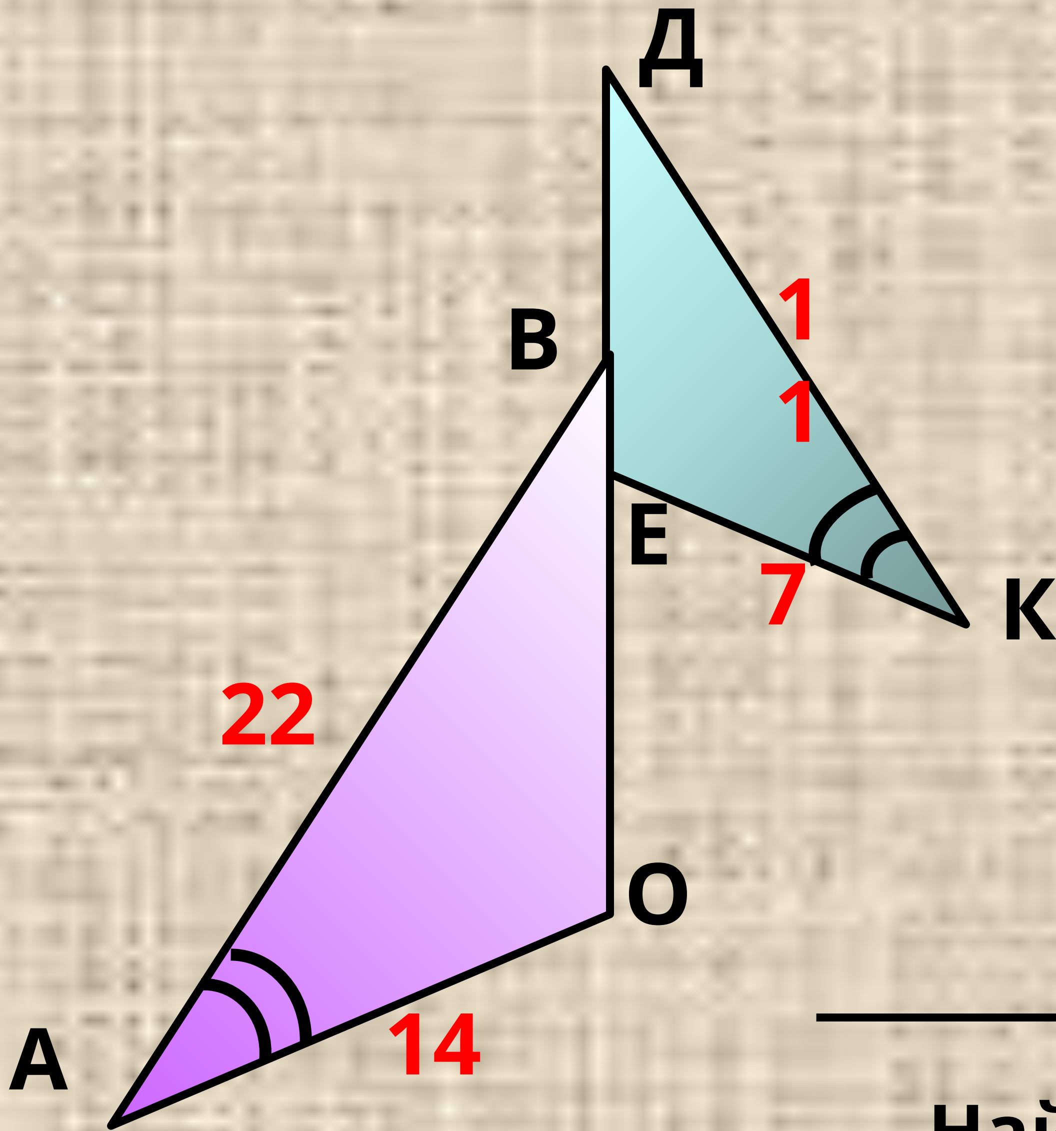
11

Задача 1



Доказать: $\angle Д = \angle С$

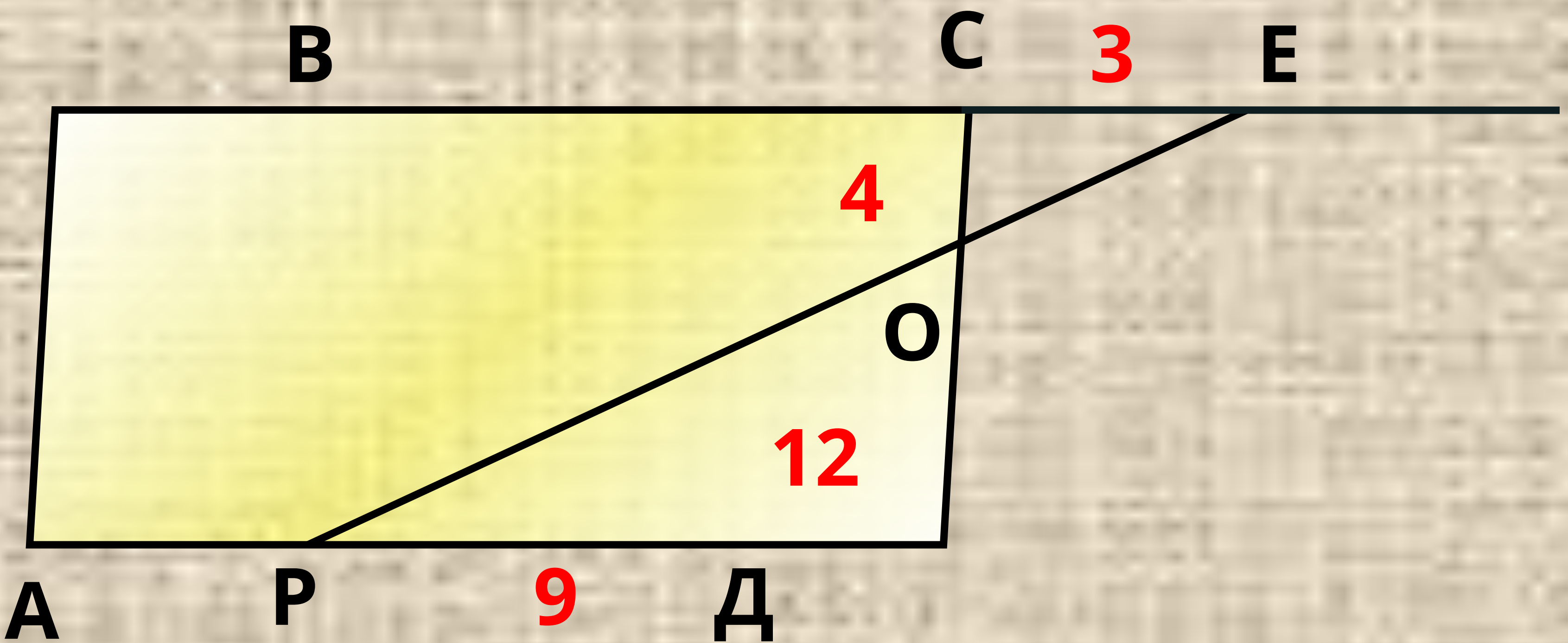
Задача 2



С

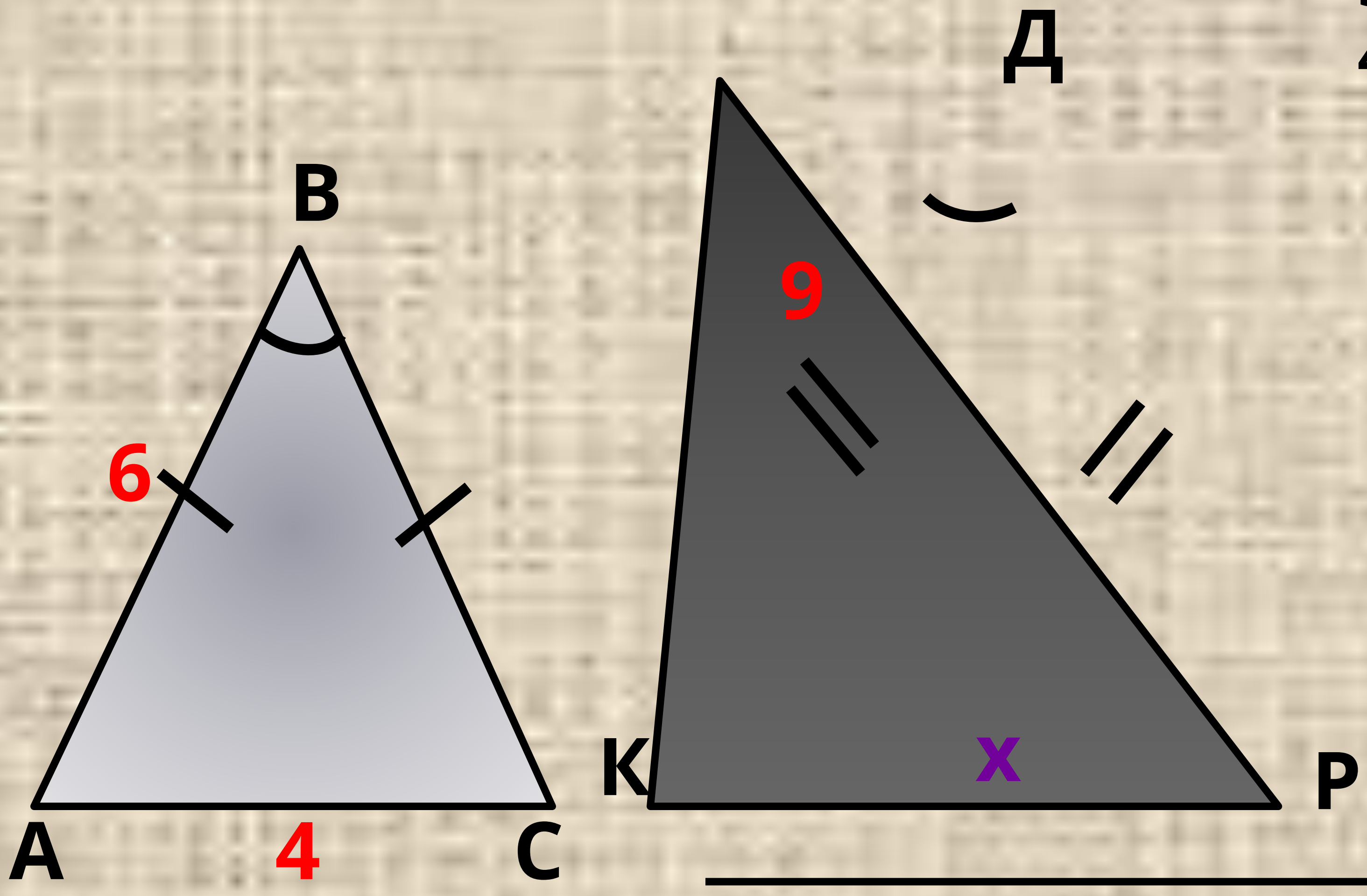
Найти: ВО: ДЕ

Задача 3



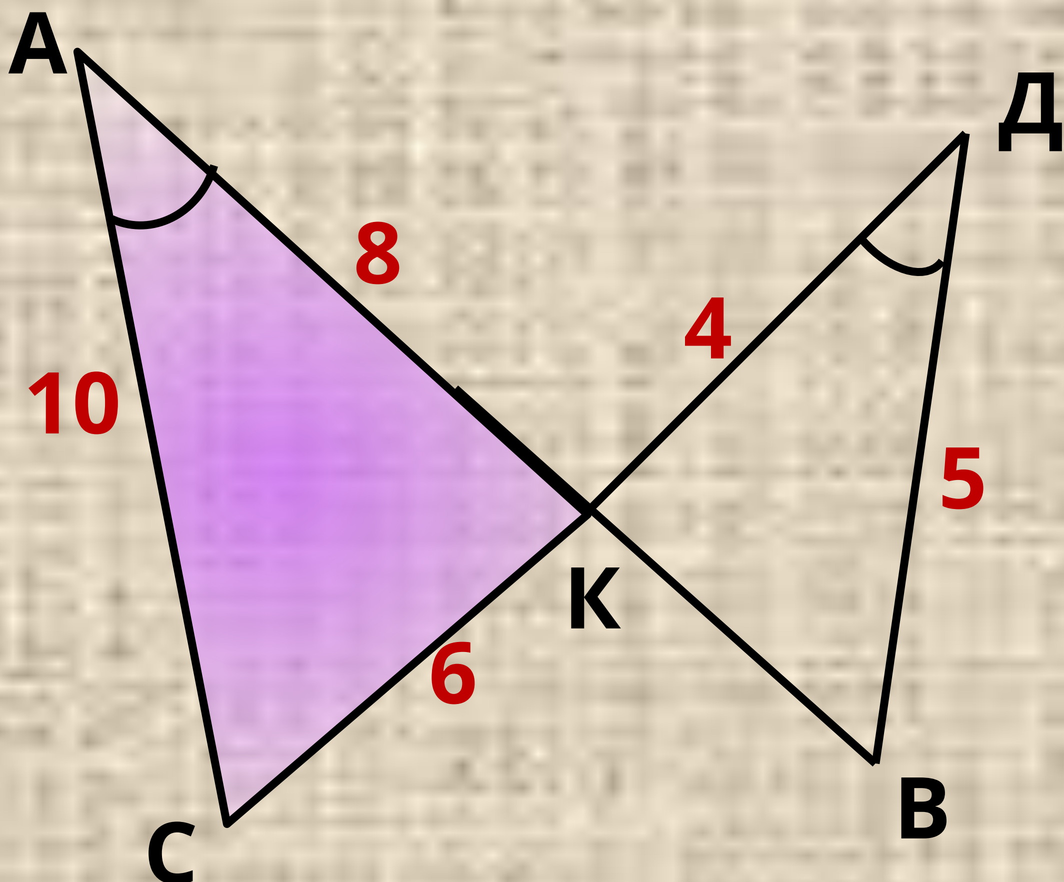
Доказать: △ РОД ~△ EOC

Задача 4



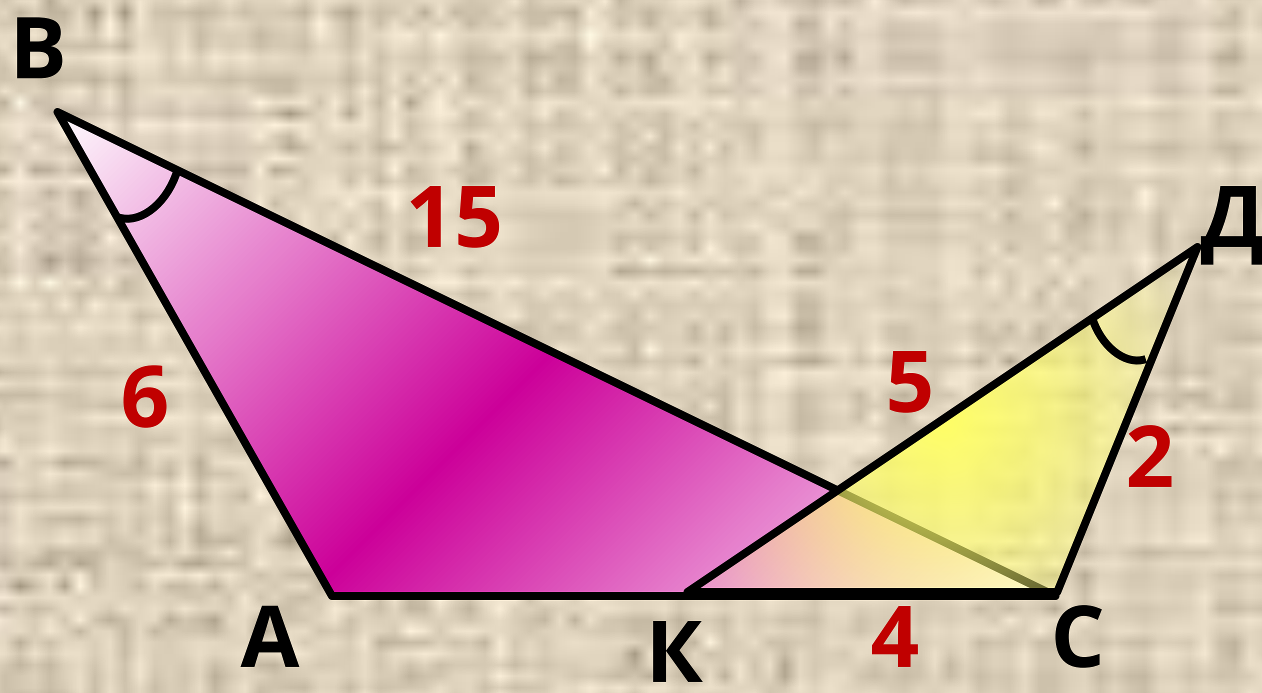
Найти: x

Задача 5



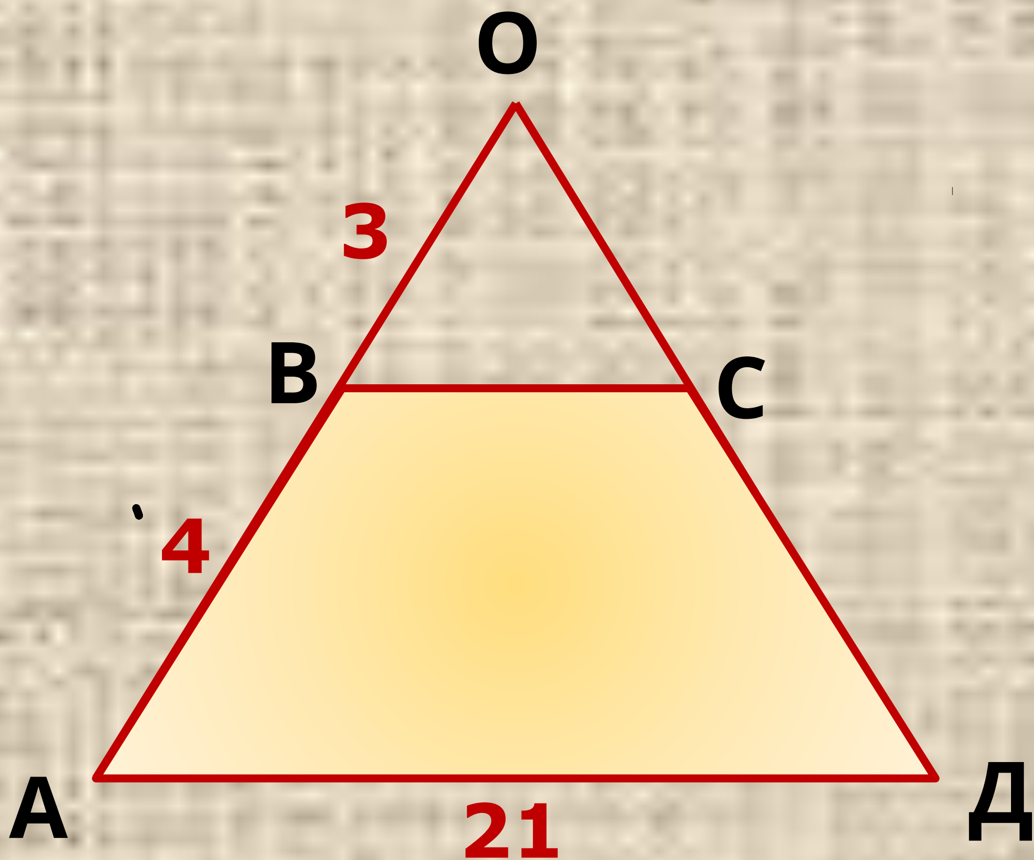
Найти: КВ

Задача 6



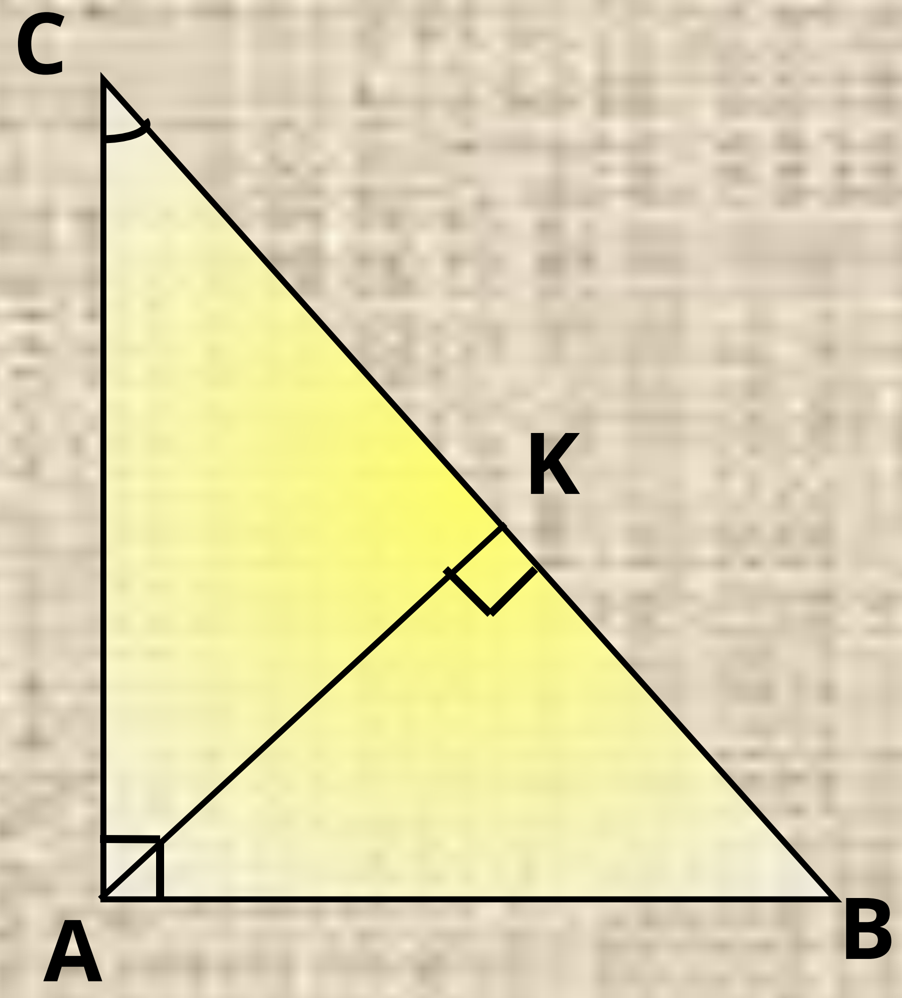
Найти: АС

Задача 7



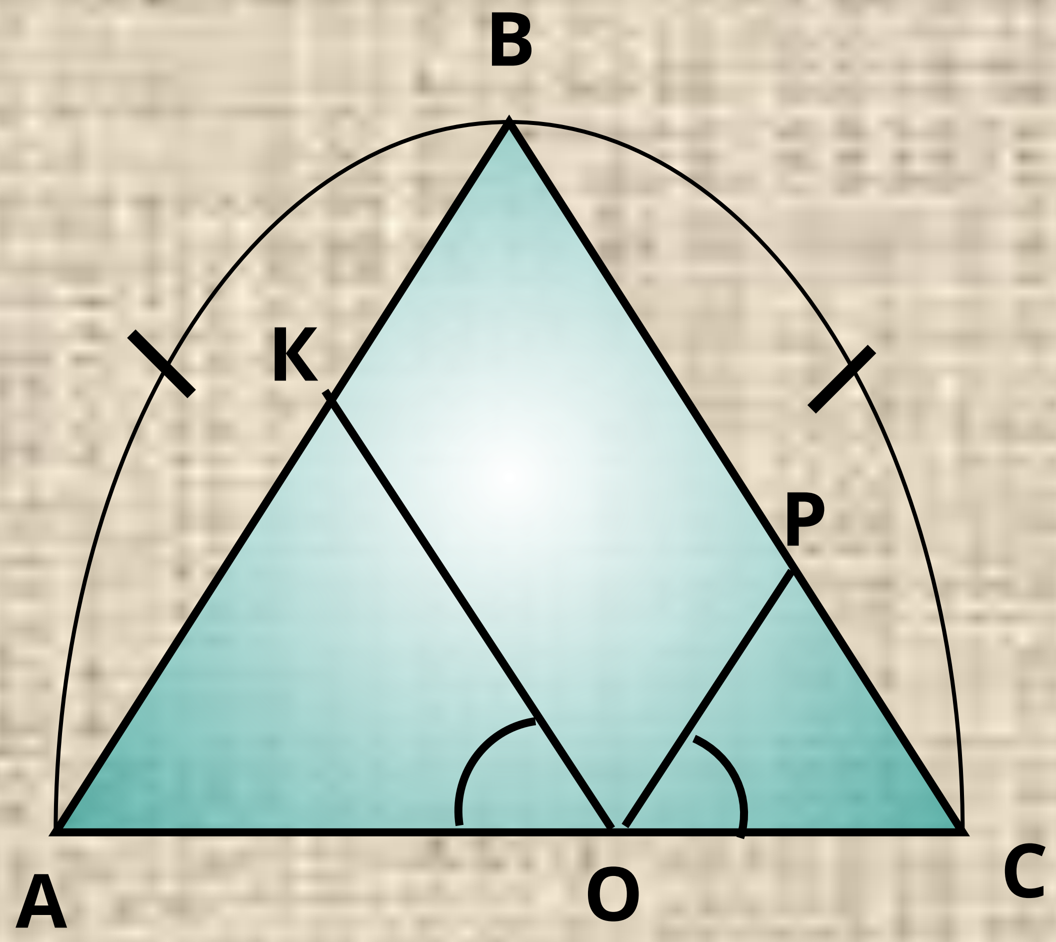
Найти: BC

Задача 8



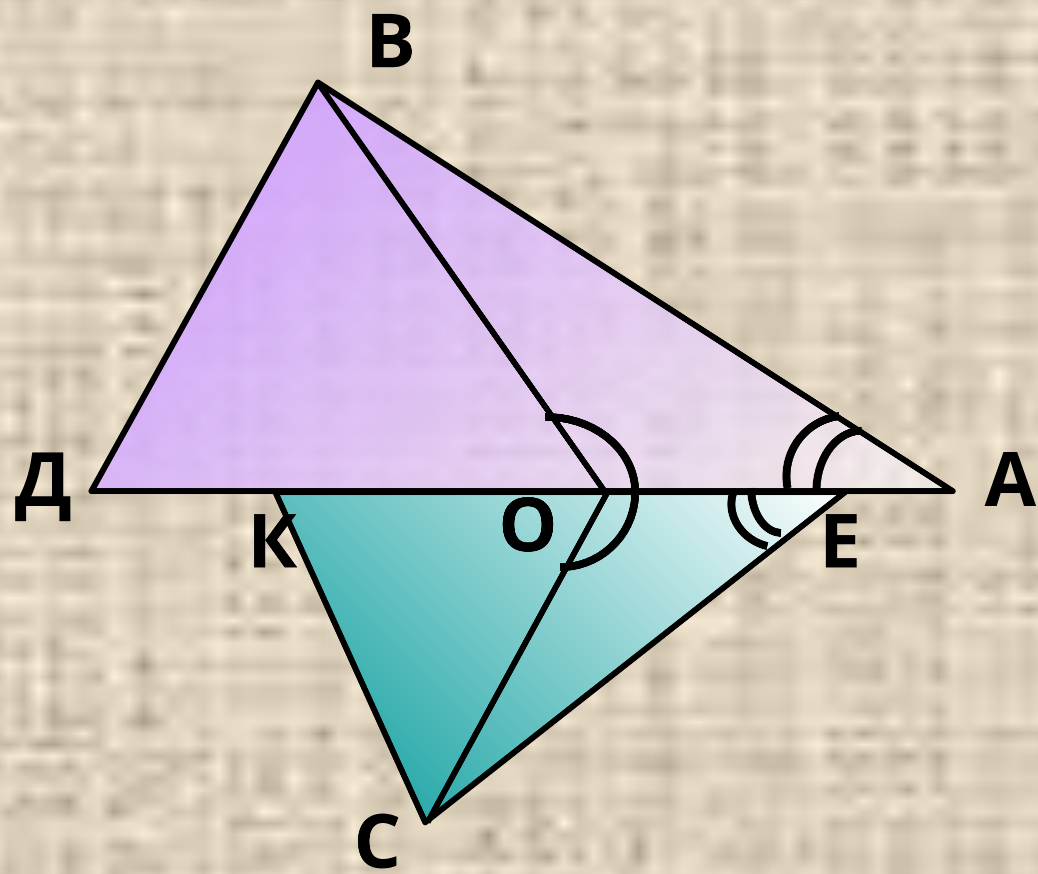
Найти подобные треугольники

Задача 9



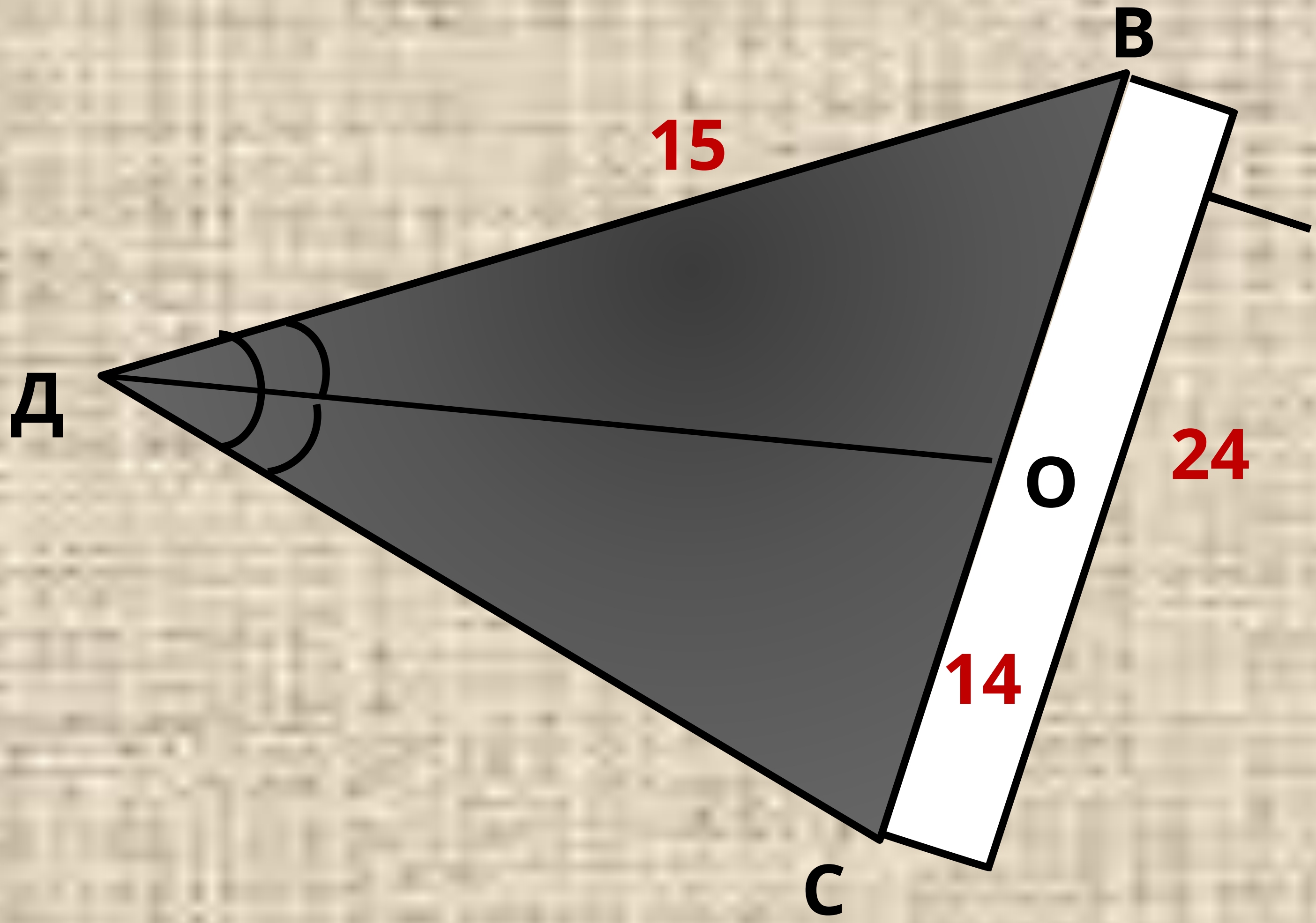
Найти подобные треугольники

Задача 10



Найти: подобные треугольники

Задача 11

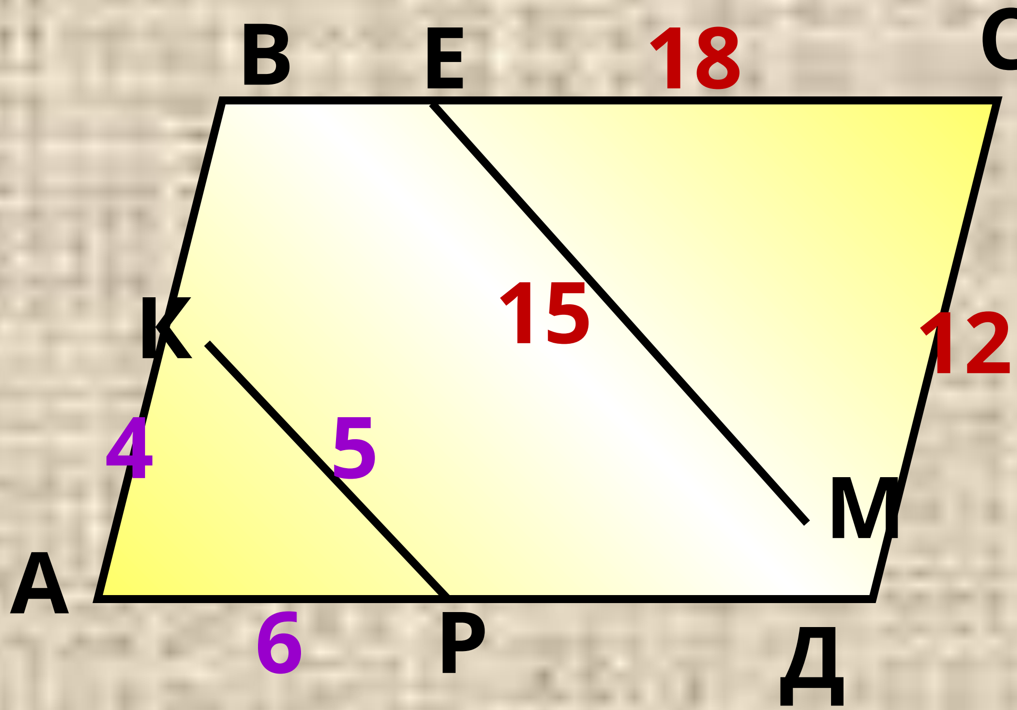


Найти:
ДС

Третий признак подобия треугольников

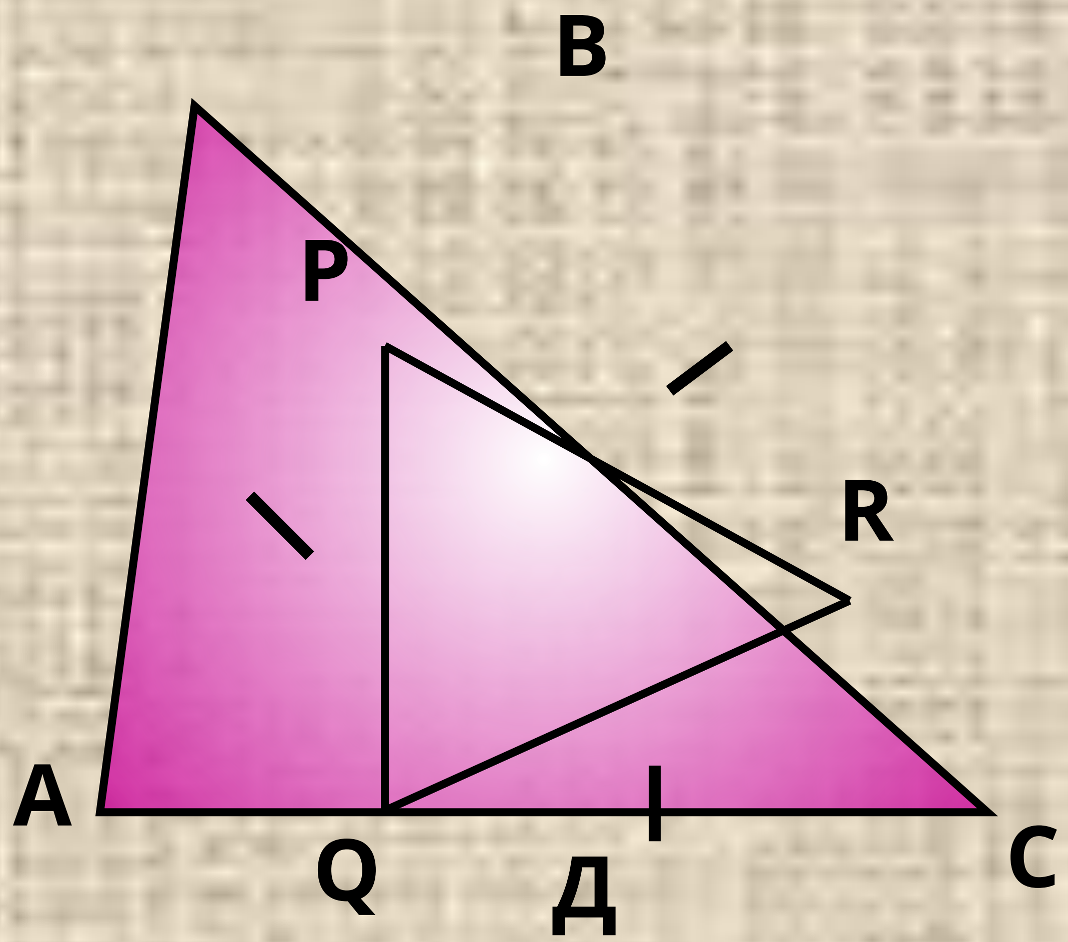
1 2 3 4

Задача 1



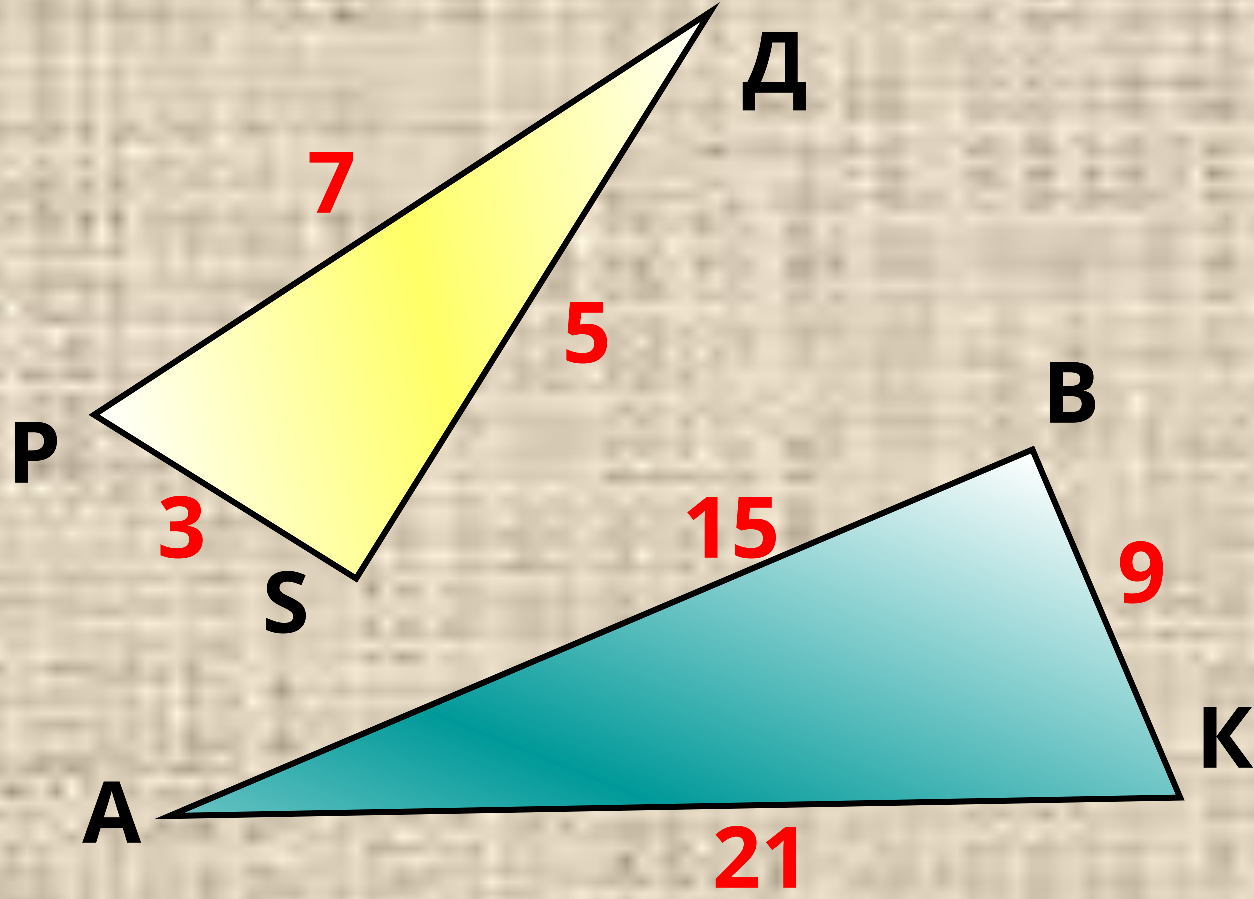
Доказать: △AKP ~ △CME

Задача 2



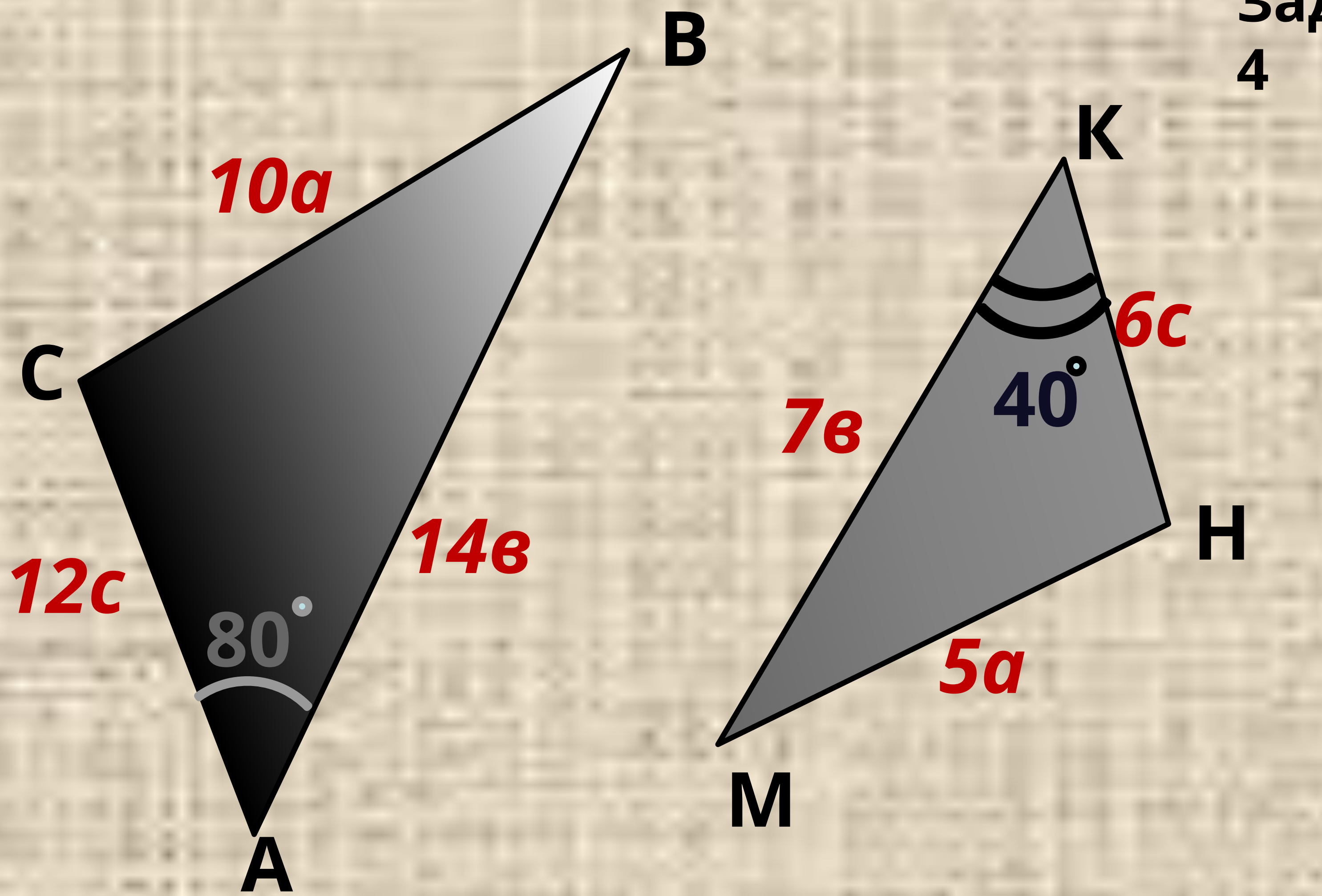
Доказать: Δ ABC ~ Δ PRQ

Задача 3



Доказать: $\angle P = \angle K$

Задача 4



Найти:∠ M и∠ B

Список литературы

1.Саврасова С.М.,Ястребинецкий Г.А.
Упражнения по планиметрии на готовых чертежах.-
М.: просвещение, 1987.-112 с.: ил.

2. Зив Б.Г. и др.
Задачи по геометрии: Пособие для учащихся 7-11 кл. общеобразоват.учреждений.-М.:Просвещение, 2000.-271 с.: ил.

3. Рабинович Е.М.
Сборник задач на готовых чертежах.-К.:1996.-56с.

4. Гаврилова Н.Ф.
Поурочные разработки по геометрии: 8 класс.-2-е изд., перераб. и доп.-М.: ВАКО,2008.-368 с.

Спасибо за внимание!