ТЕМА 3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование – раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных ограничениях, налагаемых на переменные.

По типу решаемых задач его методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые *задачи линейного про граммирования* (ЗЛП).

Формы записи задачи линейного программирования:

Общей задачей линейного программирования называют задачу

$$\max(\min) \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1,\dots, m_1) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; (i = m_1 + 1,\dots, m_2) \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \; (i = m_2 + 1,\dots, m) \qquad (4)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1, n_1}) \qquad (5)$$

$$x_j \text{ - произвольные } (j = n_1 + 1,\dots, n) \qquad (6)$$

где c_j, a_{ij}, b_i - заданные действительные числа; (1) – целевая функция

(1) – (6) –ограничения;

$x = (x_1;\dots;x_n)$ - план задачи.

Наиболее часто используются оптимизационные модели принятия решений. Их общий вид таков:

$$F(X) \to \max;$$

$$X \in A,$$

где X - параметр, который менеджер может выбирать (управляющий параметр). Он может иметь различную природу - число, вектор, множество и т.п.

Цель менеджера - максимизировать целевую функцию F(X), выбрав соответствующий X. При этом он должен учитывать ограничения $X \in A$ на возможные значения управляющего параметра X - он должен лежать в множестве A. Рассмотрим примеры оптимизационных задач менеджмента.

Среди оптимизационных задач менеджмента наиболее известны задачи линейного программирования, в которых максимизируемая функция F(X) линейная, а ограничения A задаются линейными неравенствами.

Производственная задача. Цех может производить стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола — 20 единиц (футов красного дерева). Стул требует 10 человеко- часов, стол — 15. Имеется 400 единиц материала и 450 человеко-часов. Прибыль при производстве стула — 45 дол. США, при производстве стола — 80 дол. Сколько надо сделать стульев и столов, чтобы получить максимальную прибыль?

Обозначим X1 число изготовленных стульев, X2 — число столов. Задача оптимизации имеет вид:

$$45X1 + 80X2 \rightarrow \max;$$

$$5X1 + 20X2 < 400;$$

$$10X1 + 15X2 < 450;$$

$$X1 > 0;\ X2 > 0.$$

В первой строке выписана целевая функция — прибыль при выпуске X1 стульев и X2 столов. Ее требуется максимизировать, выбирая оптимальные значения переменных X1 и X2. При этом должны быть выполнены ограничения по материалу (вторая строчка) — истрачено не более 400 футов красного дерева. А также и ограничения по труду (третья строчка) — затрачено не более 450 ч.

Кроме того, нельзя забывать, что число столов и число стульев неотрицательны. Если X1 = 0, то это значит, что стулья не выпускаются. Если же хоть один стул сделан, то X1 положительно. Но невозможно представить себе отрицательный выпуск — X1 не может быть отрицательным с экономической точки зрения, хотя с математической точки зрения такого ограничения усмотреть нельзя. В четвертой и пятой строчках задачи и констатируется, что переменные неотрицательны.

Условия производственной задачи можно изобразить на координатной плоскости. Будем по оси абсцисс откладывать значения X1, а по оси ординат — значения X2. Тогда ограничения по материалу и последние две строчки оптимизационной задачи выделяют возможные значения (X1, X2) объемов выпуска в виде треугольника (рис. 1).

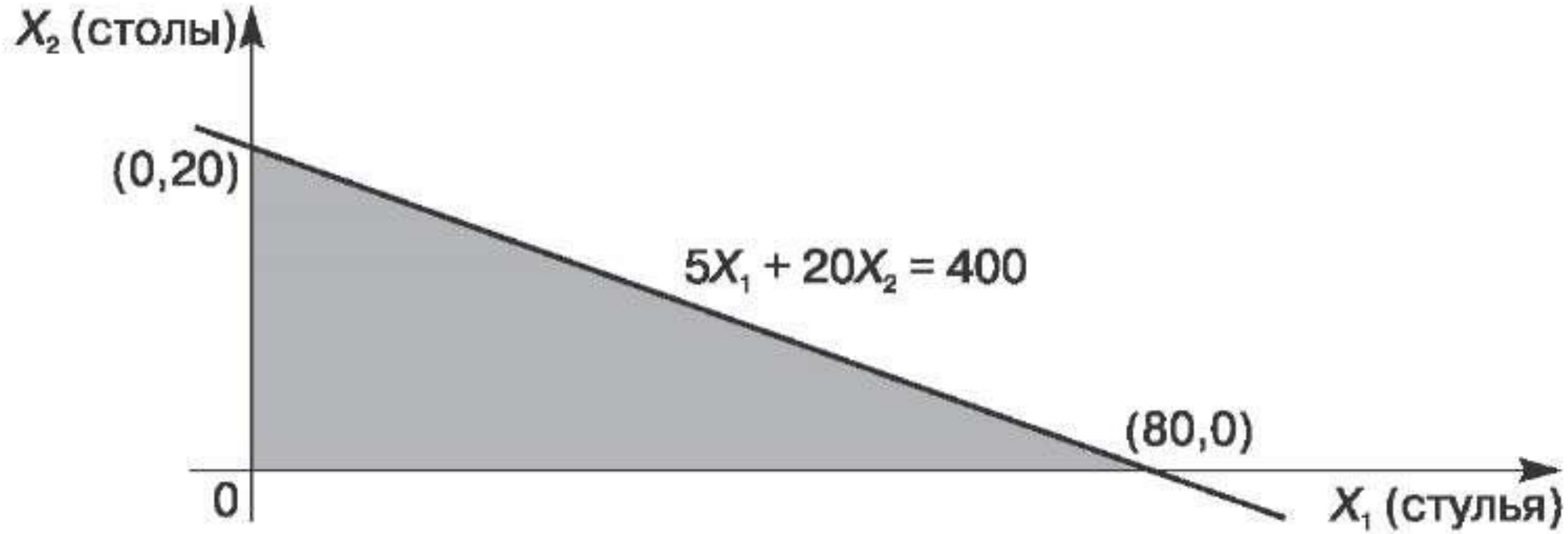

Рис. 1. Ограничения по материалу

Таким образом, ограничения по материалу изображаются в виде выпуклого многоугольника, в данном случае — треугольника. Этот треугольник получается путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей второй строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось *X1,* соответствующую стульям, в точке (80,0). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление стульев, то будет изготовлено 80 стульев.

Та же прямая пересекает ось X2, соответствующую столам, в точке (0,20). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление столов, то будет изготовлено 20 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, что означает — материал останется. Аналогичным образом можно изобразить и ограничения по труду (рис. 2).

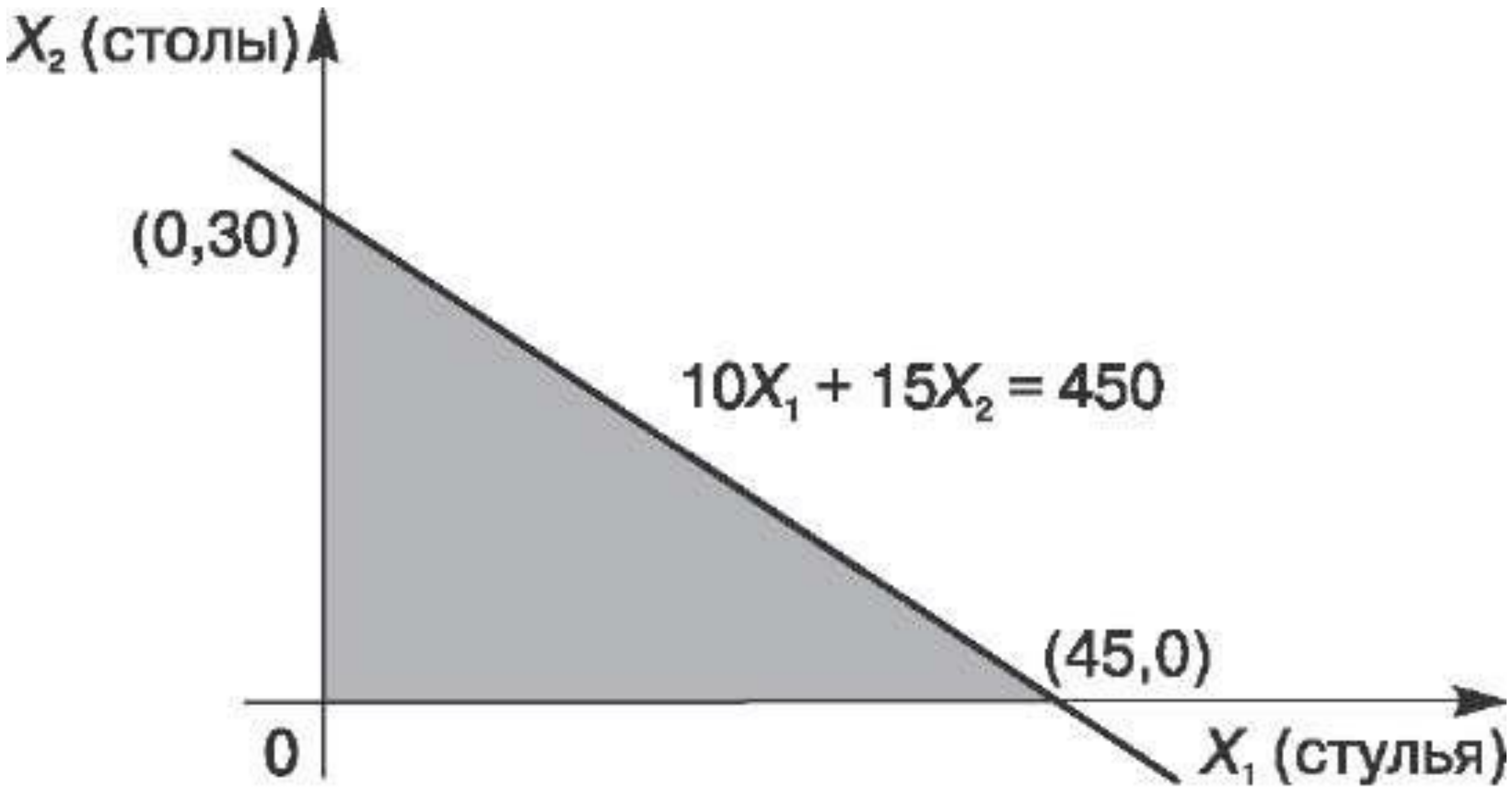

Рис. 2. Ограничения по труду

Ограничения по труду, как и ограничения по материалу, изображаются в виде треугольника, который получается аналогично — путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей третьей строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось X1, соответствующую стульям, в точке (45,0). Это означает, что если все трудовые ресурсы пустить на изготовление стульев, то будет сделано 45 стульев. Та же прямая пересекает ось X2, соответствующую столам, в точке (0,30). Это означает, что если всех рабочих поставить на изготовление столов, то будет сделано 30 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, что означает — часть рабочих будет простаивать.

Мы видим, что очевидного решения нет — для изготовления 80 стульев есть материал, но не хватает рабочих рук, а для производства 30 столов есть рабочая сила, но нет материала, Значит, надо изготавливать и то и другое. Но в каком соотношении?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо «совместить» рис. 1 и рис. 2, получив область возможных решений, а затем проследить, какие значения принимает целевая функция на этом множестве (рис. 3).

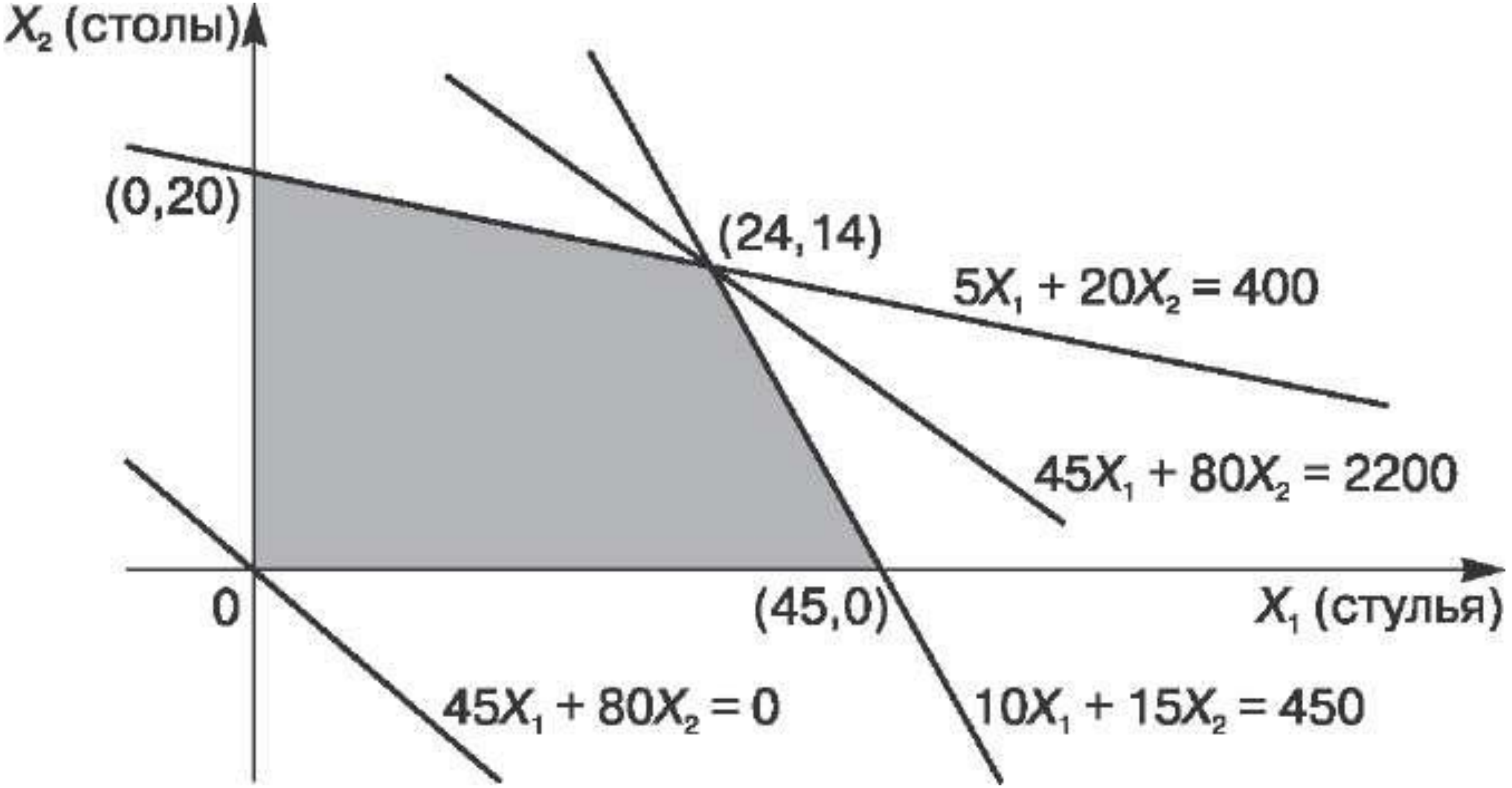

Рис. 3. Основная идея линейного программирования

Таким образом, множество возможных значений объемов выпуска стульев и столов (X1, X2), или, в других терминах, множество A, задающее ограничения на параметр управления в общей оптимизационной задаче, представляет собой пересечение двух треугольников, т.е. выпуклый четырехугольник, показанный на рис. 3. Три его вершины очевидны — это (0,0), (45,0) и (0,20). Четвертая — это пересечение двух прямых — границ треугольников на рис. 1 и рис. 2, т.е. решение системы уравнений

$$5X1 + 20X2 = 400;$$

$$10X1 + 15X2 = 450.$$

Из первого уравнения: $5X1 = 400 - 20\ X2$, $X1 = 80 - 4X2$. Подставляем значение X1, выраженное через X2, во второе уравнение:

$10(80 - 4X2) + 15X2 = 800 - 40X2 + 15X2 = 800 - 25X2 = 450$,

следовательно, $25X2 = 350$, $X2 = 14$, откуда $X1 = 80 - 4 \times 14 = 80 - 56 = 24$. Итак, четвертая вершина четырехугольника — это (24, 14).

Надо найти максимум линейной функции на выпуклом многоугольнике. (В общем случае линейного программирования — максимум линейной функции на выпуклом многограннике, лежащем в конечномерном линейном пространстве.) Основная идея линейного программирования состоит в том, что максимум достигается в вершинах многоугольника. В общем случае — в одной вершине, и это — единственная точка максимума. В частном — в двух, и тогда отрезок, их соединяющий, тоже состоит из точек максимума.

Целевая функция 45Х1 + 80Х2 принимает минимальное значение, равное 0, в вершине (0,0). При увеличении аргументов эта функция увеличивается. В вершине (24, 14) она принимает значение 2200. При этом прямая 45Х1 + 80Х2 = 2200 проходит между прямыми ограничений 5Х1 + 20Х2 = 400 и 10Х1 + 15Х2 = 450, пересекающимися в той же точке. Отсюда, как и из непосредственной проверки двух оставшихся вершин, вытекает, что максимум целевой функции, равный 2200, достигается в вершине (24, 14).

Таким образом, оптимальный выпуск таков: 24 стула и 14 столов. При этом используется весь материал и все трудовые ресурсы, а прибыль равна 2200 дол.